

## Werk

**Titel:** Anschauliche Geometrie

**Autor:** Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

**Verlag:** Springer

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN379425343

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

**LOG Id:** LOG\_0005

**LOG Titel:** Erstes Kapitel. Die einfachsten Kurven und Flächen.

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Die einfachsten Kurven und Flächen.

### § 1. Ebene Kurven.

Die einfachste Fläche ist die Ebene, die einfachsten Kurven sind die ebenen Kurven; unter ihnen die einfachste ist die Gerade. Die Gerade läßt sich definieren als kürzester Weg zwischen zwei Punkten, oder als Schnittkurve zweier Ebenen, oder als Rotationsachse.

Die nächst einfache Kurve ist der Kreis. Schon dieses Gebilde hat zu so vielen und tiefen Untersuchungen Anlaß gegeben, daß sie allein eine Vorlesung füllen würden. Wir definieren den Kreis als die Kurve, deren Punkte von einem gegebenen Punkt gleichen Abstand haben.

Wir erzeugen den Kreis durch die bekannte Zirkel- oder Fadenkonstruktion. Sie ergibt anschaulich: Der Kreis ist eine geschlossene, in ihrem ganzen Verlauf konvexe Kurve; daher läßt sich durch jeden seiner Punkte eine bestimmte Gerade — die Tangente — legen, die nur diesen einen Punkt — den Berührungspunkt — mit dem Kreise gemein hat und die sonst in dessen Äußeren verläuft (Abb. 1). Der Radius  $MB$  nach dem Berührungspunkt  $B$  muß die kürzeste Verbindung des Kreismittelpunktes  $M$  mit der

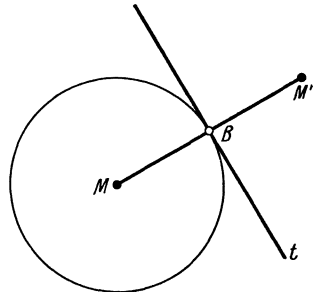


Abb. 1.

Tangente  $t$  sein. Denn deren Punkte liegen mit Ausnahme des Berührungspunktes im Äußeren des Kreises, sind also vom Mittelpunkt weiter entfernt als der Berührungspunkt. Hieraus folgt weiter, daß jener Radius auf der Tangente senkrecht steht. Zum Beweise spiegele ich den Mittelpunkt  $M$  an der Tangente  $t$ , d. h. ich fälle von  $M$  aus das Lot auf  $t$  und verlängere es um sich selbst bis  $M'$ ;  $M'$  wird der Spiegelbildpunkt von  $M$  genannt. Da nun  $MB$  die kürzeste Verbindung zwischen  $M$  und  $t$  ist, so muß aus Symmetriegründen auch  $M'B$  die kürzeste Verbindung zwischen  $M'$  und  $t$  sein. Folglich stellt der Streckenzug  $MBM'$  die kürzeste Verbindung zwischen  $M$  und  $M'$  dar, muß also bei  $B$  umgeknickt verlaufen, d. h.  $MB$  steht in der Tat auf  $t$  senkrecht.

Es liegt nahe, eine Verallgemeinerung der Kreiskonstruktion zu betrachten. Bei der Fadenkonstruktion des Kreises habe ich nämlich

um einen festen Punkt, den Kreismittelpunkt, einen geschlossenen Faden zu legen und beim Zeichnen straff zu ziehen; eine ähnliche Kurve werde ich erhalten, wenn ich den geschlossenen Faden um zwei feste Punkte lege. Die so entstehende Kurve heißt Ellipse, die beiden festen Punkte heißen deren Brennpunkte. Die Fadenkonstruktion kennzeichnet die Ellipse als die Kurve, deren Punkte konstante Abstandssumme von zwei gegebenen Punkten haben. Läßt man die beiden Punkte zusammenrücken, so erhält man den Kreis als Grenzfall der Ellipse. Allen erwähnten Eigenschaften des Kreises entsprechen einfache Eigenschaften der Ellipse. Sie ist geschlossen, überall konvex und besitzt in jedem Punkte eine Tangente, die mit Ausnahme des Berührungspunktes ganz im Äußeren der Ellipse verläuft. Den Radien des Kreises entsprechen bei der Ellipse die beiden Verbindungslinien eines Kurvenpunktes mit den Brennpunkten. Sie

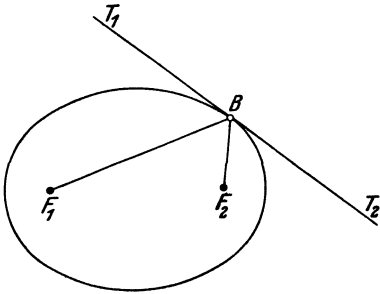


Abb. 2.

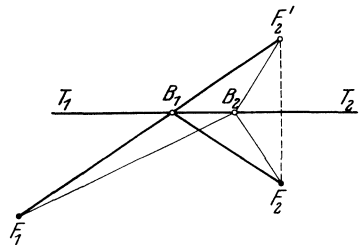


Abb. 3.

werden die Brennstrahlen des Ellipsenpunktes genannt. In Analogie zu der Tatsache, daß die Kreistangente auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht, bildet die Ellipsentangente gleiche Winkel mit den Brennstrahlen des Berührungspunktes. Meine Behauptung lautet in der Bezeichnungswiese von Abb. 2:  $\sphericalangle F_1BT_1 = \sphericalangle F_2BT_2$ . Zum Beweis (Abb. 3) spiegele ich  $F_2$  an der Tangente und nenne den Spiegelpunkt  $F'_2$ . Nun ist die Gerade  $F_1F'_2$ , welche die Tangente in  $B_1$  treffen möge, der kürzeste Weg zwischen  $F_1$  und  $F'_2$ . Also ist  $F_1B_1F_2$  der kürzeste Weg zwischen  $F_1$  und  $F_2$ , der die Tangente trifft; denn für jeden anderen Punkt  $B_2$  ist  $F_1B_2F_2 = F_1B_2F'_2$  länger als  $F_1B_1F_2 = F_1B_1F'_2$ . Andererseits wird aber der kürzeste Weg zwischen  $F_1$  und  $F_2$ , der die Tangente trifft, von den Brennstrahlen des Berührungspunktes  $B$  gebildet. Denn jeder andere Punkt der Tangente hat, da er im Ellipsenäußeren liegt, größere Entfernungssumme von den Brennpunkten als der Ellipsenpunkt  $B$ .  $B$  fällt also mit  $B_1$  zusammen, und hieraus folgt die Behauptung. Denn  $F_2$  und  $F'_2$  liegen zu der Geraden  $T_1T_2$  symmetrisch, und  $\sphericalangle F_1B_1T_1$  ist der Scheitelwinkel von  $\sphericalangle F'_2B_1T_2$ .

Diese Eigenschaft der Ellipsentangente erlaubt eine optische Anwendung, der die Namen Brennpunkt und Brennstrahl ihren Ursprung verdanken. Denkt man sich nämlich in einem Brennpunkt eine Lichtquelle angebracht und die Ellipse als spiegelnd, so wird das Licht im anderen Brennpunkt wieder vereinigt.

Nicht ganz so leicht ausführbar wie die Ellipsenkonstruktion, aber im Prinzip nicht schwieriger ist die Konstruktion einer Kurve, deren Punkte von zwei festen Punkten konstante Abstandsdifferenz haben. Diese Kurve heißt Hyperbel, die festen Punkte heißen deren Brennpunkte. Es soll also (Abb. 4) für jeden Kurvenpunkt  $B$  oder  $B'$  die Beziehung  $F_1B - F_2B = \text{const} = a$  oder  $F_2B' - F_1B' = a$  gelten. Demnach besteht die Hyperbel aus zwei getrennten Ästen. Die Anschauung zeigt, daß die Hyperbel überall konvex ist und in jedem Punkt eine Tangente besitzt. Wir werden später (S. 8, Fußnote 2) beweisen, daß auch hier die Tangente keinen weiteren Punkt außer dem Berührungspunkt mit der Kurve gemein hat. In analoger Weise wie bei der Ellipse läßt sich zeigen, daß die Tangente den Winkel zwischen den Brennstrahlen des Berührungspunktes halbiert (vgl. Abb. 6).

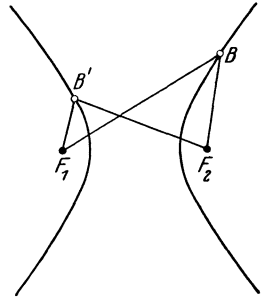


Abb. 4.

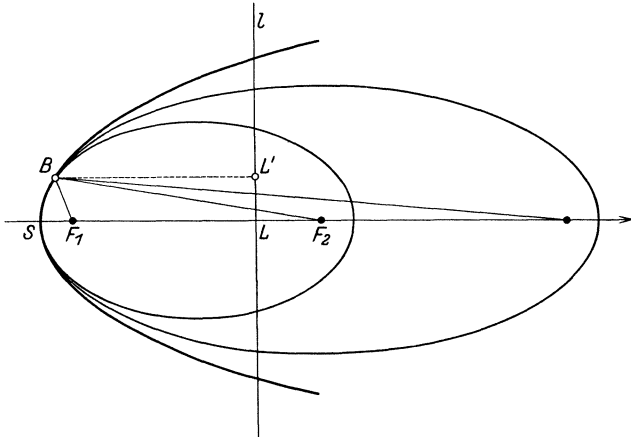


Abb. 5.

Aus der Ellipse kann man durch Grenzübergang eine weitere Kurve, die Parabel erzeugen (Abb. 5). Dazu halte ich den einen Brennpunkt, z. B.  $F_1$ , und den ihm nächstgelegenen Scheitel  $S$  der Ellipse fest (unter den Scheiteln der Ellipse versteht man die Schnittpunkte der Kurve mit der Verbindungslinie der Brennpunkte). Ich betrachte nun die Ellipsen, die entstehen, wenn der zweite Brennpunkt  $F_2$  sich auf der Ver-

längerung von  $SF_1$  immer weiter von  $F_1$  entfernt; diese Ellipsen streben gegen eine Grenzkurve, und das ist eben die Parabel. Aus dem Grenzübergang können wir eine einfache Definition der Parabel herleiten. Solange mein Zeichenstift bei der Fadenkonstruktion der Ellipse in der Nähe von  $S$  bleibt (Abb. 5), ist der nach  $F_2$  laufende Faden bei großer Entfernung von  $F_1$  und  $F_2$  ungefähr parallel  $SF_1$ . Errichtet man also in einem beliebigen Punkt  $L$  von  $F_1F_2$  das Lot  $l$  auf  $F_1F_2$ , so gilt angenähert

$$F_1B + BF_2 = F_1B + BL' + LF_2 = \text{const}$$

( $L'$  ist der Fußpunkt des Lotes von  $B$  auf  $l$ ). Wenn ich nun für

$$\text{„const} - LF_2\text{“}$$

eine neue Konstante einführe ( $LF_2$  ist ja für ein und dieselbe Kurve konstant), so erhalte ich:

$$F_1B + BL' = \text{const.}$$

Diese Beziehung gilt immer genauer, je größer die Entfernung  $F_1F_2$  wird, und bei der Grenzkurve ist sie streng erfüllt. Somit ist die Parabel diejenige Kurve, deren Punkte konstante Entfernungssumme von einem festen Punkt und einer festen Geraden haben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Kurve, für deren Punkte der Abstand von einem festen Punkt gleich dem von einer festen Geraden ist. Wir erhalten diese Gerade, indem wir zu  $l$  die Parallele auf der anderen Seite von  $S$  im Abstand  $SF_1$  ziehen; sie wird die Leitlinie der Parabel genannt.

Denkt man sich die Parabel spiegelnd, so reflektiert sie alle Lichtstrahlen, die parallel  $SF_1$  einfallen, in den Punkt  $F_1$ ; dies folgt ebenfalls aus dem Grenzübergang.

Wir haben die „Schar“ aller Ellipsen betrachtet, die einen Scheitel und den nächstgelegenen Brennpunkt gemein haben. Nunmehr wollen wir die Schar aller Ellipsen betrachten, die beide Brennpunkte gemein haben. Diese Schar „konfokaler“ Ellipsen (focus heißt Brennpunkt) bedeckt die Ebene „einfach und lückenlos“, das heißt, durch jeden Punkt der Ebene geht genau eine Kurve der Schar; denn jeder Punkt besitzt eine bestimmte Entfernungssumme von den beiden Brennpunkten, liegt also auf der Ellipse, die zu diesem Wert der Summe gehört<sup>1</sup>.

Wir nehmen nun noch die Schar aller Hyperbeln hinzu, die ebenfalls die beiden vorgegebenen Punkte zu Brennpunkten haben. Auch diese Schar bedeckt die Ebene einfach und lückenlos<sup>2</sup>, so daß durch jeden

<sup>1</sup> Die Strecke zwischen den Brennpunkten ist eine (ausgeartete) Ellipse. Man erhält sie, wenn man als Wert der Entfernungssumme den Abstand der Brennpunkte wählt.

<sup>2</sup> Die Gerade durch die Brennpunkte mit Ausnahme ihrer Verbindungsstrecke ist eine ausgeartete Hyperbel, ebenso die Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke der Brennpunkte; bei ihr hat die Entfernungsdifferenz den konstanten Wert Null.

Punkt der Ebene genau zwei Kurven des Systems konfokaler Ellipsen und Hyperbeln hindurchgehen (Abb. 6). In jedem vorgegebenen Punkt (außer in den Brennpunkten) halbieren die Tangenten der hindurchgehenden Hyperbel und Ellipse Winkel und Nebenwinkel der Brennstahlen des Punktes, stehen also aufeinander senkrecht.

Die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln bilden daher zwei „zueinander orthogonale Kurvenscharen“ (zwei Scharen heißen orthogonal, wenn jede Kurve der einen Schar jede der anderen senkrecht schneidet; als Winkel zweier Kurven definiert man den Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkt). Um eine

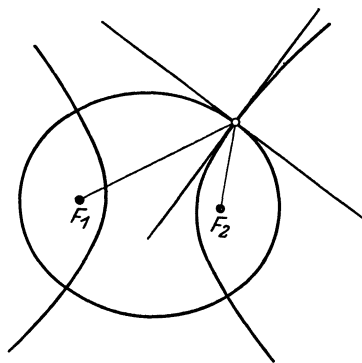


Abb. 6.

Übersicht über dieses Kurvensystem zu gewinnen (Abb. 7), beginnen wir mit der Mittelsenkrechten von  $F_1F_2$  und durchlaufen dann zunächst die Schar der Hyperbeln. Diese werden immer flacher und gehen schließlich in die beiderseitige Verlängerung von  $F_1F_2$  über. Damit ist die Ebene vollständig ausgefüllt. Wir springen nun auf die Strecke  $F_1F_2$

selbst über, an die sich die zunächst sehr langgestreckten Ellipsen anschließen, die allmählich immer kreisähnlicher werden und sich gleichzeitig unbegrenzt vergrößern. Damit ist die Ebene zum zweiten Male ausgefüllt.

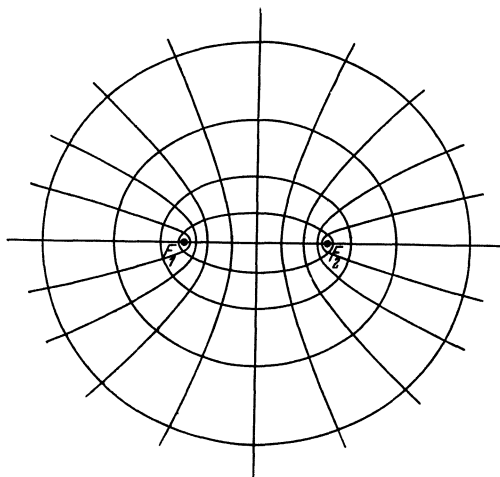


Abb. 7.

Ein anderes besonders einfaches Beispiel orthogonaler Kurvenscharen sind die konzentrischen Kreise und die Geraden durch den gemeinsamen Mittelpunkt. Man erhält diese Figur aus der vorigen durch Grenz-

übergang, indem man die Brennpunkte zusammenrücken läßt. Dabei gehen die Ellipsen in Kreise und die Hyperbeln in Geradenpaare über.

Die Niveaulinien und die Linien größter Steigung auf einer Landkarte sind ebenfalls orthogonale Scharen.

Schließlich sei noch eine andere Fadenkonstruktion erwähnt, die zu orthogonalen Scharen führt. Um eine konvexe Kurve, etwa um einen

Kreis, sei ein offener Faden geschlungen. Ich betrachte die Kurve, die der Endpunkt des Fadens beschreibt, wenn ich den Faden straff angespannt vom Kreis abwickele (Abb. 8). Die so erhaltene „Kreisevolvente“ läuft in immer weiteren Windungen um den Kreis herum, ist also eine Spirale. Die Konstruktion ergibt anschaulich, daß die Kurve auf einer der beiden Kreistangenten senkrecht steht, die ich vom betrachteten Kurvenpunkt aus an den Kreis legen kann. Auch alle anderen Umläufe der Evolvente schneiden diese Tangente rechtwinklig; und zwar ist das zwischen zwei Umläufen liegende Tangentenstück von fester Länge, nämlich gleich dem Umfang des erzeugenden Kreises.

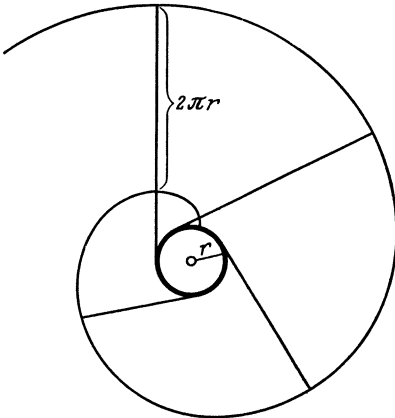


Abb. 8.

Ich kann nun noch beliebig viele weitere Evolventen desselben Kreises zeichnen, indem ich an einem anderen Peripheriepunkt mit der Abwicklung des Fadens beginne; die Gesamtheit dieser Evolventen kann aber auch durch Rotation um den Kreismittelpunkt aus einer von ihnen erzeugt werden. Die Schar der Evolventen bedeckt die Ebene mit Ausnahme des Kreisinneren einfach und lückenlos. Sie ist orthogonal zur Schar der in einem bestimmten Umlaufsinn gezogenen Kreishalbtangenten.

Auch bei einer beliebig vorgegebenen Schar gerader Linien besteht die Orthogonalschar stets aus Evolventen. Ihre erzeugende Kurve ist diejenige, die (wie in unserm Beispiel der Kreis) von den gegebenen Geraden eingehüllt wird. Wir kommen darauf in der Differentialgeometrie (S. 158) und in der Kinematik (S. 243, 244) zurück.

## § 2. Zylinder, Kegel, Kegelschnitte und deren Rotationsflächen.

Die einfachste krumme Fläche, den Kreiszyylinder, kann ich aus den einfachsten Kurven — Kreise und Gerade — dadurch erzeugen, daß ich eine auf der Kreisebene senkrechte Gerade längs der Kreisperipherie verschiebe. Ferner erhalte ich den Kreiszyylinder, wenn ich eine Gerade um eine zu ihr parallele Gerade als Achse rotieren lasse. Der Kreiszyylinder ist also eine *Rotationsfläche*. Die Rotationsflächen sind eine wichtige Gattung von Flächen, die uns im praktischen Leben in jedem Glas, jeder Flasche usw. entgegentreten. Sie sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß man sie durch Rotation einer ebenen Kurve um eine in der Kurvenebene liegende Achse erzeugen kann.

Eine zur Achse senkrechte Ebene schneidet den Kreiszyylinder in einem Kreis. Eine zur Achse schräge Ebene ergibt, wie die Anschauung lehrt, eine ellipsenähnliche Schnittkurve. Ich beweise nun, daß diese Kurve tatsächlich eine Ellipse ist. Ich nehme eine Kugel, die gerade in den Zylinder hineinpaßt, und verschiebe sie, bis sie die Schnittebene berührt (Abb. 9). Genau so verfähre ich mit einer zweiten Kugel auf der anderen Seite der Schnittebene. Die Kugeln berühren den Zylinder in zwei Kreisen und die Ebene in zwei Punkten  $F_1$  und  $F_2$ . Einen beliebigen Punkt  $B$  der Schnittkurve verbinde ich nun mit  $F_1$  und  $F_2$  und betrachte die Zylindergerade durch  $B$ , die die beiden Berührungskreise der Kugeln in  $P_1$  und  $P_2$  schneiden möge.  $BF_1$  und  $BP_1$  sind nun Tangenten an eine und dieselbe Kugel durch einen festen Punkt  $B$ . Alle solche Tangenten sind gleich lang, wie aus der allseitigen Rotationssymmetrie der Kugel ersichtlich. Also ist  $BF_1 = BP_1$ . Ebenso folgt  $BF_2 = BP_2$ . Daher ist

$$BF_1 + BF_2 = BP_1 + BP_2 = P_1P_2.$$

Die Entfernung  $P_1P_2$  ist aber unabhängig von der Wahl des Kurvenpunktes  $B$  wegen der Rotationssymmetrie der Figur. Alle Punkte der Schnittkurve haben also von  $F_1$  und  $F_2$  dieselbe Entfernungssumme, das heißt, die Schnittkurve ist eine Ellipse mit den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$ .

Wir können diese Tatsache auch als Satz der Projektionslehre formulieren: Der Schatten eines Kreises auf einer zur Kreisebene geneigten Ebene ist eine Ellipse, wenn die Lichtstrahlen senkrecht zur Kreisebene einfallen.

Nächst dem Kreiszyylinder ist die einfachste Rotationsfläche der Kreiskegel. Er entsteht durch Rotation einer Geraden um eine sie schneidende Achse. Einen Kreiskegel bilden daher auch alle Tangenten von einem festen Punkt an eine feste Kugel oder die Projektionsstrahlen durch einen Kreis von einem Punkt der Kreisachse aus.

Eine zur Kegelachse senkrechte Ebene schneidet den Kegel in einem Kreis; wenn ich die Ebene etwas neige, ergibt sich als Schnittkurve eine Ellipse. Der Beweis dafür wird genau wie beim Kreiszyylinder mittels zweier berührenden Hilfskugeln geführt.

Neige ich die Schnittebene immer weiter gegen die Achse, so wird die Ellipse immer langgestreckter. Ist die Schnittebene schließlich einer Kegelerzeugenden parallel, so kann die Schnittkurve nicht mehr im Endlichen geschlossen sein. Ein dem früheren entsprechender Grenzübergang lehrt, daß dann die Schnittkurve eine Parabel ist.

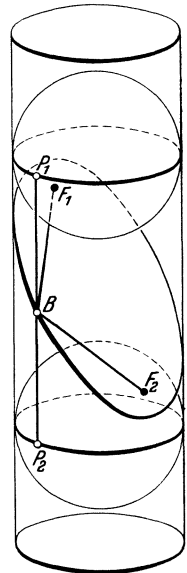


Abb. 9.



Neige ich jetzt die Schnittebene noch stärker, so trifft sie auch den anderen, bisher nicht getroffenen Teil des Kegels; die Schnittkurve hat das Aussehen einer Hyperbel (Abb. 10). Um zu beweisen, daß sie wirklich eine Hyperbel ist, legt man in die beiden Teile des Kegels die Kugeln, die sowohl den Kegel als auch die Schnittebene berühren. (Die Kugeln liegen diesmal auf derselben Seite der Schnittebene, während sie im Fall der Ellipse zu verschiedenen Seiten liegen.) Der Beweis verläuft nun entsprechend wie S. 7. Es ist (Abb. 10)

$$\begin{aligned} BF_1 &= BP_1, & BF_2 &= BP_2, \\ BF_1 - BF_2 &= BP_1 - BP_2 \\ &= P_1P_2 = \text{const.} \end{aligned}$$

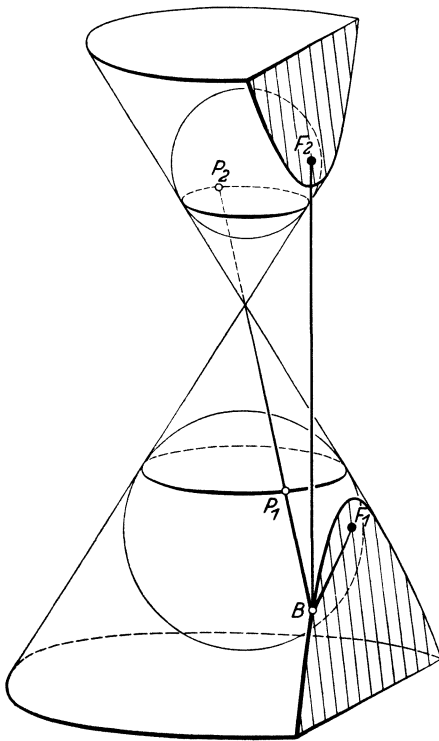


Abb. 10.

Wir haben also gefunden, daß jeder Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, die nicht durch die Spitze des Kegels geht, entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel ist<sup>1</sup>. Diese Kurven haben demnach eine innere Verwandtschaft und werden deshalb unter dem Namen *Kegelschnitte* zusammengefaßt<sup>2</sup>. Zu den drei erwähnten „eigentlichen“ Kegelschnitten sind als „uneigentliche“ noch deren Grenzfälle hinzuzunehmen, die man erhält, wenn man die Schnittebene durch die Kegelspitze legt oder den Kegel zum Zylinder ausarten läßt. Als entartete Kegelschnitte lassen sich also auffassen: der Punkt, eine „doppeltgezählte“ Gerade, zwei sich schneidende Geraden, zwei

parallele Geraden und die leere Ebene. Die Kegelschnitte werden auch als *Kurven zweiter Ordnung* bezeichnet. Dieser Name ist ihnen deswegen gegeben worden, weil sie in cartesischen Koordinaten durch Gleichungen

<sup>1</sup> Der Kreis ist als ein Grenzfall der Ellipse aufzufassen (vgl. S. 2).

<sup>2</sup> Der Schatten eines Kreises auf einer beliebigen Ebene ist also ein Kegelschnitt, falls die Lichtquelle sich in einem beliebigen Punkt der Kreisachse befindet. Daß dabei auch Hyperbeln auftreten, kann man an dem Lichtkegel einer Autolampe erkennen; diese beleuchtet in der Fahrtebene das Innere eines Hyperbelzweiges. Da jede Hyperbeltangente als Schatten einer Kreistangente aufgefaßt werden kann, hat die Hyperbeltangente nur den Berührungspunkt mit der Hyperbel gemein, wie S. 3 behauptet war.

zweiten Grades dargestellt werden, eine Eigenschaft, die sich nicht unmittelbar anschaulich formulieren läßt. Sie hat allerdings die anschauliche Folge, daß die Kegelschnitte von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden; es gibt aber noch viele andere Kurven mit dieser Eigenschaft. In den Anhängen dieses Kapitels sollen zwei weitere geometrische Erscheinungen dargestellt werden, die ebenso wie die Brennpunktskonstruktion für alle nicht ausgearteten Kegelschnitte kennzeichnend sind: Die Fußpunktkonstruktionen und die Eigenschaften der Leitlinien.

Nachdem wir durch Rotation einer Geraden den Zylinder und den Kegel erzeugt haben, liegt es nahe, die Rotationsflächen zu betrachten, die durch Rotation eines Kegelschnittes entstehen. Ich werde dabei die Rotationsachse so wählen, daß der Kegelschnitt zu ihr symmetrisch liegt; dann gehen nämlich die zu beiden Seiten der Achse liegenden Kurventeile nach einer halben Umdrehung ineinander über, so daß ich

nur eine einzige Fläche erhalte, während sonst ein komplizierteres Gebilde entstünde.

Da die Ellipse zwei Symmetrieachsen besitzt, führt sie zu zwei verschiedenen Rotationsflächen; je nachdem die Ellipse um die größere oder die kleinere Achse rotiert, erhalte ich ein verlängertes (Abb. 11) oder ein abgeplattetes Rotationsellipsoid

(Abb. 12). Für die letzte Fläche ist die Erde ein geläufiges Beispiel, für die erste näherungsweise das Hühnerei.

Der Übergangsfall zwischen den beiden Rotationsellipsoiden entsteht, wenn man den Längenunterschied zwischen den Achsen der Ellipse immer kleiner werden läßt. Dann wird aus der Ellipse ein Kreis, und man erhält die Kugel. Da der Kreis zu jedem seiner Durchmesser symmetrisch liegt, läßt sich die Kugel auf unendlich viele Arten durch Rotation erzeugen. Durch diese Eigenschaft ist die Kugel gekennzeichnet. Sie ist die einzige Fläche, die auf mehr als eine Art durch Rotation erzeugt werden kann.

Die Parabel hat nur eine einzige Symmetrieachse und führt daher zu einer einzigen Rotationsfläche, dem Rotationsparaboloid (Abb. 13).

Die Hyperbel dagegen führt zu zwei verschiedenen Rotationsflächen. Je nachdem die Rotation um die Verbindungslinie der Brennpunkte

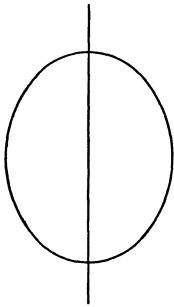


Abb. 11.

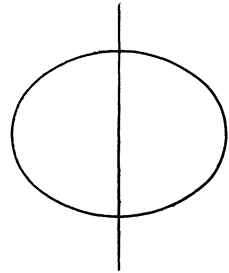


Abb. 12.

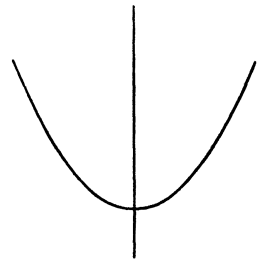


Abb. 13.

oder um deren Mittelsenkrechte erfolgt, erhalte ich das zweischalige (Abb. 14) oder das einschalige Rotationshyperboloid (Abb. 15). Es besteht nun die überraschende Tatsache, daß auf dem einschaligen

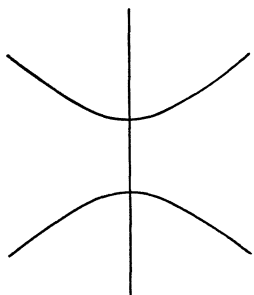


Abb. 14.

Rotationshyperboloid unendlich viele Geraden verlaufen. Man kann nämlich diese Fläche auch dadurch erzeugen, daß man eine Gerade um eine andere zu ihr windschiefe Gerade rotieren läßt (bisher hatten wir nur Rotationsflächen kennengelernt, deren Achse mit der erzeugenden Kurve in einer Ebene liegt). Der

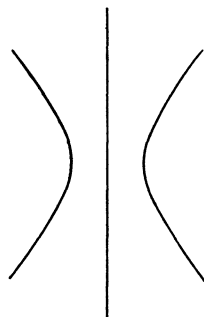


Abb. 15.

Beweis kann nur analytisch geführt werden. Man erkennt aber anschaulich, daß diese Konstruktion die Fläche auf zwei Weisen liefert; denn betrachtet man eine Gerade  $g'$  (Abb. 16), welche zur ursprünglichen Erzeugenden  $g$  symmetrisch in bezug auf eine Ebene durch die Achse  $a$  liegt, so muß die neue Gerade  $g'$  durch Rotation wieder dieselbe Fläche erzeugen wie  $g$ .

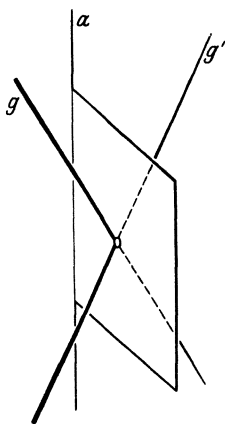


Abb. 16.

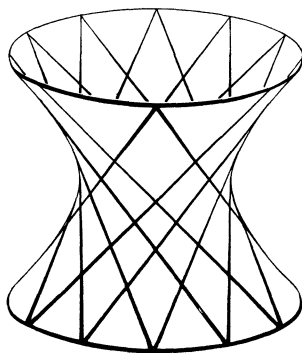


Abb. 17.

Demnach enthält das einschalige Rotationshyperboloid zwei Scharen von Geraden, von denen jede Schar für sich die Fläche ganz bedeckt, und welche so angeordnet sind, daß jede Gerade der einen Schar jede der anderen schneidet (bzw. ihr parallel ist), während zwei Geraden derselben Schar stets zueinander windschief verlaufen (Abb. 17).

### § 3. Die Flächen zweiter Ordnung.

Die Flächen, die durch Rotation der Kegelschnitte entstehen, sind besondere Typen einer größeren Klasse von Flächen, die aus analy-

tischen Gründen Flächen zweiter Ordnung genannt werden; es sind die Flächen, deren Punkte in cartesischen Raumkoordinaten eine Gleichung zweiten Grades erfüllen. Wie sich daraus leicht analytisch ergibt, haben diese Flächen die Eigenschaft, von jeder Ebene in einer Kurve zweiter Ordnung, das heißt einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Kegelschnitt getroffen zu werden. Wenn ich ferner von irgendeinem Punkt aus an eine Fläche zweiter Ordnung alle Tangenten lege, so erhalte ich einen Kegel, der von jeder Ebene in einem Kegelschnitt getroffen wird. Der Kegel berührt überdies die Fläche in Punkten eines Kegelschnittes. Die Flächen zweiter Ordnung sind zugleich die einzigen, die eine dieser Eigenschaften haben<sup>1</sup>. Wir betrachten jetzt ihre verschiedenen Typen.

Aus dem Kreiszyylinder entsteht durch Verallgemeinerung der elliptische Zylinder. Er wird durch eine Gerade beschrieben, die ich auf einer

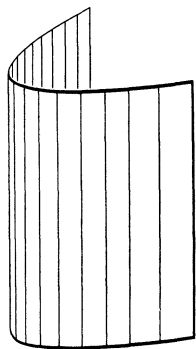


Abb. 18.

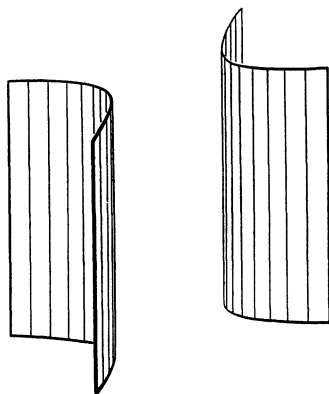


Abb. 19.

Ellipse senkrecht zur Kurvenebene wandern lasse. Auf dieselbe Weise ergeben sich aus der Parabel und Hyperbel der parabolische und der hyperbolische Zylinder (Abb. 18, 19).

Die entsprechende Verallgemeinerung des Kreiskegels ist der allgemeine Kegel zweiter Ordnung. Er besteht aus den Verbindungsgeraden eines beliebigen eigentlichen Kegelschnittes mit einem Punkt außerhalb der Kurvenebene. Es ist zu beachten, daß man hier nicht, wie bei den Zylindern, zu verschiedenen Flächentypen kommt, wenn man von einer Ellipse oder einer Parabel oder Hyperbel ausgeht; wie wir gesehen haben, kann eben eine veränderliche Ebene mit einem festen Kegel jeden der drei Kegelschnitte gemein haben, mit einem festen Zylinder dagegen nicht.

<sup>1</sup> Aus der zuerst genannten Eigenschaft folgt, daß eine Gerade, wenn sie nicht eine ganze Strecke lang in die Fläche fällt, höchstens zwei Punkte mit ihr gemein haben kann; doch gibt es außer den Flächen zweiter Ordnung noch viele andere Flächen, die dasselbe Verhalten den Geraden gegenüber zeigen, z. B. die Oberfläche eines Würfels.

Den Kegel und den elliptischen Zylinder kann ich aus den entsprechenden Rotationsflächen auch durch ein Deformationsverfahren erhalten, das man *Dilatation* nennt. Ich halte alle Punkte einer beliebigen durch die Rotationsachse der Fläche gehenden Ebene fest und denke mir alle übrigen Punkte des Raumes in derselben Richtung auf die feste Ebene zu oder von ihr weg bewegt, derart, daß die Abstände aller Punkte von der festen Ebene sich im selben Verhältnis ändern. Man kann beweisen, daß eine solche Transformation alle Kreise in Ellipsen (oder Kreise) verwandelt. Sie führt ferner Geraden wieder in Geraden über, Ebenen in Ebenen<sup>1</sup> und Kurven und Flächen zweiter Ordnung in ebensolche.

Durch Dilatation eines (verlängerten oder abgeplatteten) Rotationsellipsoids entsteht das allgemeinste Ellipsoid. Während die Rotationsellipsoide symmetrisch zu jeder Ebene durch die Achse liegen, besitzt das allgemeinste Ellipsoid nur drei Symmetrieebenen. Diese stehen aufeinander senkrecht; aus ihren drei Schnittgeraden schneidet die Fläche Strecken ungleicher Länge aus; man nennt sie die „große“, „mittlere“ und „kleine“ Achse des Ellipsoids (Abb. 20). Aus dem dreiachsigen Ellipsoid erhält man das abgeplattete und das verlängerte

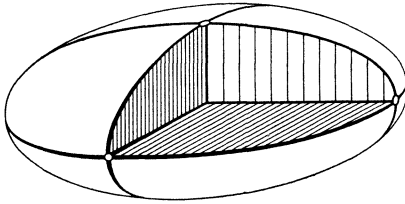


Abb. 20.

Rotationsellipsoid zurück, indem man durch Dilatation große und mittlere bzw. mittlere und kleine Achse einander gleich macht.

Die Form dreiachsiger Ellipsoide bemerkt man oft bei Steinen in der Meeresbrandung. Durch die abschleifende Arbeit des Wassers wird jeder beliebig geformte Stein allmählich immer mehr einem Ellipsoid ähnlich. Die mathematische Untersuchung dieser Erscheinung führt auf Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das ein- und zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid sind die allgemeinsten Flächen, die durch Dilatation der Rotationshyperboloide und des Rotationsparaboloids entstehen. Die beiden Hyperboloide besitzen drei Symmetrieebenen, das elliptische Paraboloid zwei.

Da jede Dilatation Geraden in Geraden überführt, hat das allgemeine einschalige Hyperboloid mit der zugehörigen Rotationsfläche die Eigenschaft gemeinsam, daß auf ihm zwei Scharen von Geraden verlaufen. Sie sind wie die Geraden des einschaligen Rotationshyperboloids derart angeordnet, daß jede Gerade der einen Schar jede der anderen schneidet,

<sup>1</sup> Die Gestaltänderung, die die Figuren einer Ebene bei einer Dilatation erleiden, ist dieselbe wie bei einer Parallelprojektion dieser Ebene auf eine gegen sie geneigte Ebene.

während je zwei Geraden derselben Schar sich nicht treffen, sondern zueinander windschief sind. Ich kann daher das einschalige Hyperboloid folgendermaßen konstruieren: Ich greife aus der einen Schar drei beliebige Geraden heraus (Abb. 21). Da sie zueinander windschief liegen, kann ich durch jeden Punkt  $P$  der einen Geraden eine und nur eine Gerade  $p$  legen, welche die beiden anderen Geraden trifft, nämlich die Schnittgerade der Ebenen, die durch  $P$  und die zweite Gerade bzw. durch  $P$  und die dritte Gerade gehen.  $p$  hat mit dem Hyperboloid drei Punkte

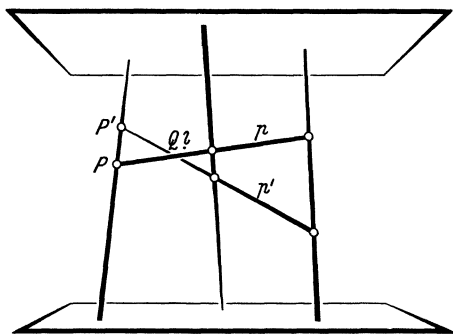


Abb. 21.

gemein, muß also ganz in ihm verlaufen, da das Hyperboloid als Fläche zweiter Ordnung von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. Lasse ich nun  $P$  die ganze erste Gerade durchlaufen, so durchläuft die zugehörige Gerade  $p$  alle Geraden derjenigen Schar auf der Fläche, zu der die erste Gerade nicht gehört; greife ich dann aus dieser Schar wieder drei beliebige Geraden heraus, so erhalte ich aus diesen in derselben Weise die andere Schar, darunter natürlich die drei Ausgangsgeraden. Die Konstruktion ergibt, daß alle Geraden derselben Schar zueinander windschief liegen; denn hätten  $p$  und  $p'$  (Abb. 21) einen Schnittpunkt  $Q$ , so lägen die Ausgangsgeraden in der Ebene  $PP'Q$ , während sie nach Voraussetzung windschief sind.

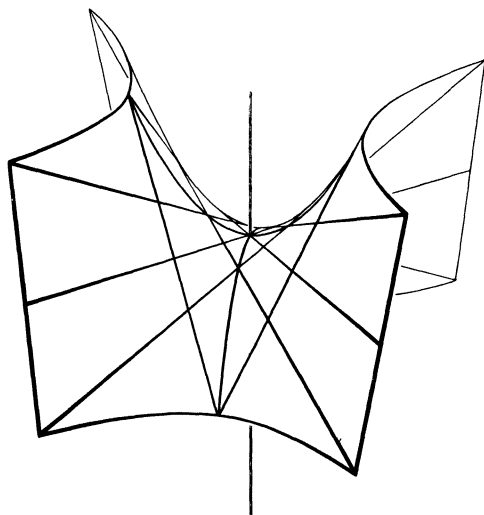


Abb. 22.

Drei windschiefe Geraden bestimmen auf diese Weise stets ein einschaliges Hyperboloid, außer in dem Fall, daß sie einer und derselben Ebene parallel sind (ohne selbst parallel zu sein). In diesem Fall bestimmen sie eine neue Fläche zweiten Grades, die nicht zu einer Rotationsfläche spezialisiert werden kann; sie wird hyperbolisches Paraboloid genannt. Die Fläche hat ungefähr die Gestalt eines Sattels (Abb. 22).

Sie besitzt zwei zueinander senkrechte Symmetrieebenen, von denen sie in Parabeln geschnitten wird. Wie die drei Ausgangsgeraden sind sämtliche Geraden beider Scharen je einer festen Ebene parallel. Die Anschauung zeigt, daß diese Fläche von keiner Ebene in einer Ellipse geschnitten werden kann, da sich jeder ebene Schnitt ins Unendliche erstrecken muß. Aus diesem Grunde ist es unmöglich, das hyperbolische Paraboloid durch Dilatation einer Rotationsfläche herzustellen; denn auf jeder Rotationsfläche liegen Kreise, und diese würden bei der Dilatation in Ellipsen übergehen.

Wir haben hier ein neues Prinzip der Erzeugung von Flächen kennengelernt: Man legt für eine bewegliche Gerade irgendeine Führung im

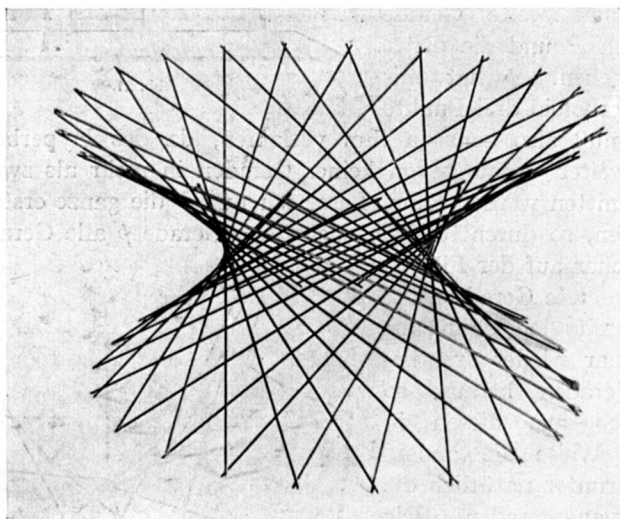


Abb. 23 a.

Raum fest und läßt sie über diese Führung hinwandern. Eine so erzeugte Fläche nennt man eine *Regelfläche*. Unter den neun Flächen zweiter Ordnung gibt es also sechs Regelflächen, nämlich die drei Zylinder, den Kegel, das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid; die beiden letztgenannten Flächen haben eine Sonderstellung, es sind nämlich die einzigen Regelflächen außer der Ebene, bei denen mehr als eine Gerade durch jeden Flächenpunkt hindurchgeht.

Die drei übrigen Flächen zweiter Ordnung — Ellipsoid, elliptisches Paraboloid und zweischaliges Hyperboloid — können schon deshalb keine Geraden enthalten, weil sie sich nicht ohne Unterbrechung in zwei entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche erstrecken.

Über die beiden Scharen von Geraden, die auf dem einschaligen Hyperboloid und auf dem hyperbolischen Paraboloid verlaufen, läßt

sich ein überraschender Satz ableiten. Denken wir uns die Geraden der Fläche aus starrem Material und in jedem Schnittpunkt so aneinander befestigt, daß sie sich um die Schnittpunkte drehen, aber nicht aneinander gleiten können. Man sollte denken, daß die Geraden infolge dieser Befestigung ein starres Gerüst ergeben müßten. Tatsächlich ist aber das Gerüst beweglich (Abb. 23 a, b). Um die hierbei auftretende Gestaltänderung des Hyperboloids überblicken zu können, denken wir uns diejenige Symmetrieebene, die die Fläche in einer Ellipse trifft, horizontal festgehalten und suchen die Deformation des Gerüsts so auszuführen, daß diese Ebene stets Symmetrieebene bleibt. Da das Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid die einzigen Flächen sind, auf der durch jeden Punkt zwei in der Fläche enthaltene Geraden laufen, so muß das Stangenmodell des Hyperboloids bei der Deformation entweder stets ein Hyperboloid bleiben, oder ein hyperbolisches Paraboloid werden; es läßt sich zeigen, daß der letzte Fall nicht eintreten kann. Wir können nun versuchen, die Geraden des Gerüsts immer steiler gegen die Symmetrieebene aufzurichten. Dann erhalten wir immer stärker abgeplattete Flächen. Die Ellipse in der Symmetrieebene durchläuft das in § 1 geschilderte System konfokaler Ellipsen, die immer schmäler werden.

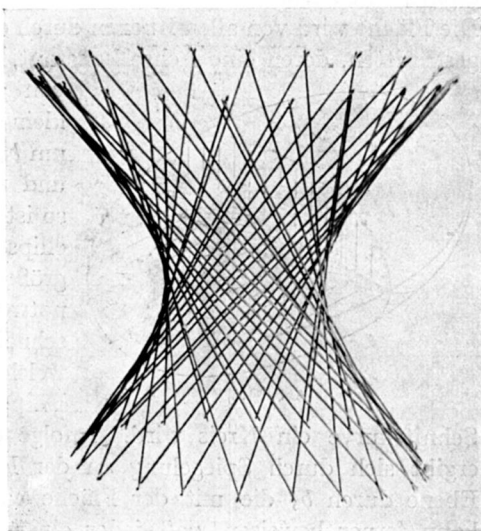


Abb. 23 b.

Im Grenzfall klappt das Gerüst in einer senkrecht aufgestellten Ebene zusammen, und die Stangen werden die Tangenten einer in dieser Ebene gelegenen Hyperbel. Die Ellipse in der horizontalen Ebene entartet in eine Doppelstrecke. Ebenso können wir auch die Ausgangslage des Modells in der umgekehrten Weise verändern, indem wir die Stangen immer mehr gegen die Horizontalebene neigen. Dabei wird die Einschnürung der Fläche immer schärfer ausgeprägt; im Grenzfall klappt das Gerüst in der horizontalen Symmetrieebene zusammen, und die Stangen umhüllen eine in dieser Ebene gelegene Ellipse. Die analytische Begründung für die Beweglichkeit des Stangenmodells wird in einem Anhang dieses Kapitels nachgeholt. — Beim hyperbolischen Paraboloid ist der Vorgang analog. Das Gerüst behält stets die Gestalt



eines Paraboloids und klappt in beiden Grenzfällen in eine Ebene zusammen, in der die Geraden eine Parabel umhüllen.

Die Flächen zweiter Ordnung lassen sich noch unter einem neuen Gesichtspunkt in zwei Arten einteilen. Drei von ihnen, nämlich der hyperbolische und der parabolische Zylinder und das hyperbolische Paraboloid, werden durch keine Ebene in einem Kreise geschnitten, da sich auf diesen Flächen jeder ebene Schnitt ins Unendliche erstreckt. Auf den übrigen sechs Flächen dagegen liegen stets unendlich viele Kreise. Hiermit hängt es auch zusammen, daß diese Flächen sich im Gegensatz zu den drei erstgenannten zu Rotationsflächen spezialisieren lassen. Die Betrachtung, durch die sich die Existenz der Kreisschnitte ergibt, soll am dreiachsigen Ellipsoid durchgeführt werden (Abb. 24). Die Fläche wird von allen Ebenen durch die mittlere Achse  $b$  in Ellipsen geschnitten, deren eine Achse konstant, nämlich gleich  $b$  ist; gehe ich

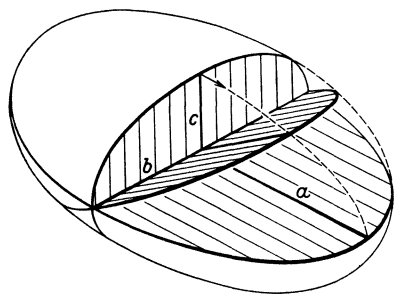


Abb. 24.

von der Ebene durch  $b$  und die kleine Achse  $c$  aus und drehe sie um  $b$ , bis sie in die Ebene durch  $b$  und die große Achse  $a$  übergeht, so ist die zweite Achse der Schnittellipse zuerst kleiner und zuletzt größer als  $b$ . Dazwischen muß es notwendig einmal eine Lage der schneidenden Ebene geben, für welche die beiden Achsen der Ellipse gleich lang sind, wo also die

Schnittkurve ein Kreis wird. Infolge der Symmetrie des Ellipsoids ergibt sich durch Spiegelung an der Ebene ( $b, c$ ) noch eine zweite Ebene durch  $b$ , die mit der Fläche einen Kreisschnitt bildet. Man kann ferner beweisen, daß jeder einem Kreisschnitt parallele ebene Schnitt des Ellipsoids wieder ein Kreisschnitt ist. Somit gibt es auf jedem Ellipsoid zwei Scharen paralleler Kreise (Abb. 25); beim Rotationsellipsoid fallen beide Scharen in eine zusammen.

Wie für das Ellipsoid läßt sich auch für die anderen Flächen zweiter Ordnung, die geschlossene ebene Schnitte besitzen, eine derartige Überlegung durchführen.

Für die beiden Scharen von Kreisschnitten gilt ein entsprechender Satz wie für die Geraden auf dem Hyperboloid. Werden alle Kreise in ihren Schnittpunkten so aneinander befestigt, daß sie, ohne gleiten zu können, umeinander drehbar sind, so erhält man kein starres, sondern ein bewegliches Gerüst (Abb. 25 a, b; Kreisscheiben aus Pappe, die in geeigneter Weise geschlitzt und ineinandergesteckt sind. Der Leser wird einsehen, daß dieses Modell nur unwesentlich in seiner Struktur von unserer Behauptung abweicht). Bei der Gestaltänderung des beweglichen Kreisschnittmodells entstehen andersgeartete Flächen-

scharen als bei den Stangenmodellen; die in den Symmetrieebenen liegenden Kegelschnitte durchlaufen im allgemeinen kein konfokales System. So läßt sich das bewegliche Kreisschnittmodell eines dreiaxigen Ellipsoides stets in Kugelgestalt bringen; in diesem Fall ist der Schnitt mit jeder Symmetrieebene ein Kreis, während in einer Schar konfokaler Ellipsen nie eine Ellipse in einen Kreis ausartet. Wie beim Stangenmodell reicht die Beweglichkeit auch beim Kreisschnittmodell so weit, daß man das Modell in eine Ebene zusammenklappen kann.

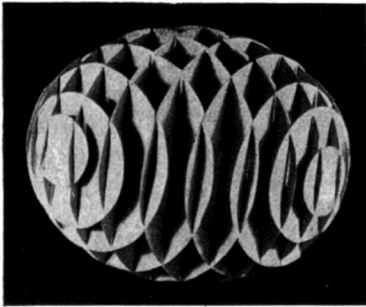


Abb. 25 a.

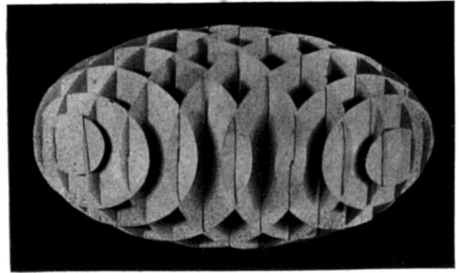


Abb. 25 b.

Die beiden Arten von Modellen sind trotz ihrer großen Verschiedenheit durch einen Übergangsfall miteinander verknüpft. Das bewegliche Stangenmodell des hyperbolischen Paraboloids läßt sich nämlich zugleich als Grenzfall eines Kreisschnittmodells auffassen, bei dem die Kreise unendlich großen Radius erhalten haben, d. h. zu Geraden geworden sind. Wenn man eine Schar von einschaligen Hyperboloiden hat, die einem hyperbolischen Paraboloid immer ähnlicher werden, so gehen sowohl die Kreise als auch die Geraden der Hyperboloide beide in das Geradensystem des Paraboloids über.

#### § 4. Fadenkonstruktion des Ellipsoids und konfokale Flächen zweiter Ordnung.

Da die Flächen zweiter Ordnung im Raum eine analoge Rolle spielen wie die Kegelschnitte in der Ebene, so liegt die Frage nahe, ob man nicht die Fadenkonstruktion der Ellipse auf diese Flächen übertragen kann. Diese Frage wurde für das Ellipsoid im Jahre 1882 von STAUDE durch seine Fadenkonstruktion des Ellipsoids gelöst. Bei dieser Konstruktion (Abb. 26) geht man von einem festen Gerüst aus, das aus einer Ellipse und einer Hyperbel besteht. Die Ebene der Hyperbel steht senkrecht auf der Ebene der Ellipse und enthält deren große Achse. Die Hyperbel hat die Brennpunkte  $F_1F_2$  der Ellipse zu Scheiteln und deren Scheitel  $S_1S_2$  zu Brennpunkten; durch diese Angaben ist die Hyperbel eindeutig bestimmt.

Man befestigt nun an dem einen Scheitel der Ellipse, z. B.  $S_1$ , einen Faden, legt ihn zuerst von hinten um den nächstliegenden Ast der Hyperbel, dann von vorn über die Ellipse und befestigt das andere

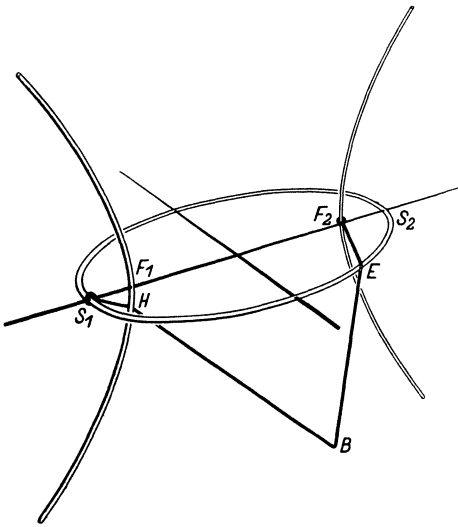


Abb. 26.

Ende des Fadens in  $F_2$ . Wird jetzt das zwischen der Ellipse und der Hyperbel befindliche Fadenstück in  $B$  straffgezogen, so erhält der Faden die Form des gebrochenen Streckenzuges  $S_1HBEF_2$ ; dabei ist das Stück  $BHS_1$  die kürzeste Linie, die von  $B$  über einen Punkt der Hyperbel nach  $S_1$  läuft, und das Stück  $BEF_2$  hat eine entsprechende Eigenschaft. *Läßt man nun den Punkt  $B$  seine Lage so verändern, daß der Faden immer gespannt bleibt, so wandert  $B$  auf einem Ellipsoid.* In der Anordnung von Abb. 26 durchläuft  $B$  im ganzen das vordere untere Viertel der Fläche; die übrigen

Viertel ergeben sich je nach der Art, wie der Faden zwischen  $S_1$  und  $F_2$  um die Ellipse und die Hyperbel herumgeschlungen wird<sup>1</sup>.

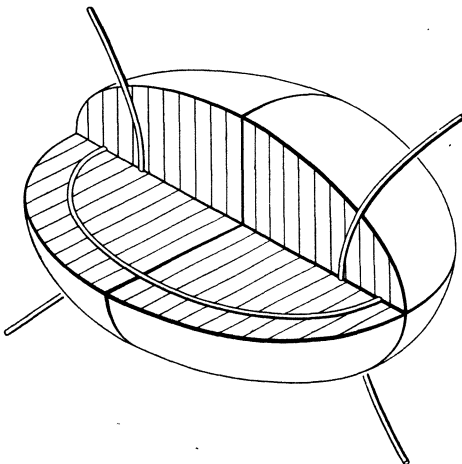


Abb. 27.

Das Gerüst der beiden Kegelschnitte spielt bei der Konstruktion des Ellipsoids eine analoge Rolle wie die Brennpunkte bei der Ellipse, man spricht von den Fokalkurven (Fokalellipse und Fokalhyperbel) des Ellipsoids. Allgemein sagt man von einer Fläche zweiter Ordnung, daß sie diese beiden Kegelschnitte zu Fokalkurven hat, wenn deren Ebenen Symmetrieebenen der Fläche sind und von der Fläche in Kegelschnitten durchsetzt werden, die mit den Fokalkurven konfokal liegen.

<sup>1</sup> Statt in  $S_1$  und  $F_2$  dürfen die Enden des Fadens auch in jedem anderen Punkt der Ellipse bzw. der Hyperbel festgemacht werden, außer wenn die gegenseitige Lage dieser Punkte das Spannen des Fadens in der beschriebenen Weise überhaupt unmöglich macht.

Da jeder dieser beiden Schnitte eine Ellipse oder Hyperbel sein muß, kommen vier Fälle in Betracht. Sind beide Schnitte Ellipsen, so haben wir ein Ellipsoid (Abb. 27); sind sie beide Hyperbeln, so ergibt sich ein zweischaliges Hyperboloid (Abb. 28). Wird die Ebene der Fokalhyperbel in einer Hyperbel, die Ebene der Fokalellipse in einer Ellipse geschnitten, so ist die Fläche ein einschaliges Hyperboloid (Abb. 29). Der vierte Fall — Ellipse in der Ebene der Fokalhyperbel und Hyperbel in der Ebene der Fokalellipse — scheidet aus. Denn die Ellipse und die Hyperbel müßten dann die Gerade  $F_1F_2$  (Abb. 30) in vier verschiedenen Punkten  $E_1E_2H_1H_2$  treffen, die Ebene der Fokalhyperbel hätte also mit der Fläche eine Ellipse und zwei nicht auf dieser gelegene Punkte  $H_1H_2$  gemein, was der Definition der Fläche zweiter Ordnung widerspricht.

Führt man die Fadenkonstruktion des Ellipsoids mit Fäden verschiedener Länge bei festgehaltenen Fokalkurven durch, so erhält man eine Schar

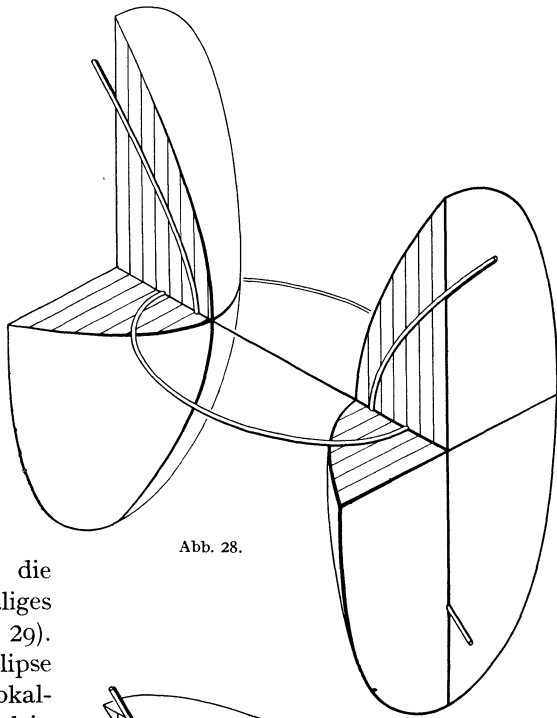


Abb. 28.

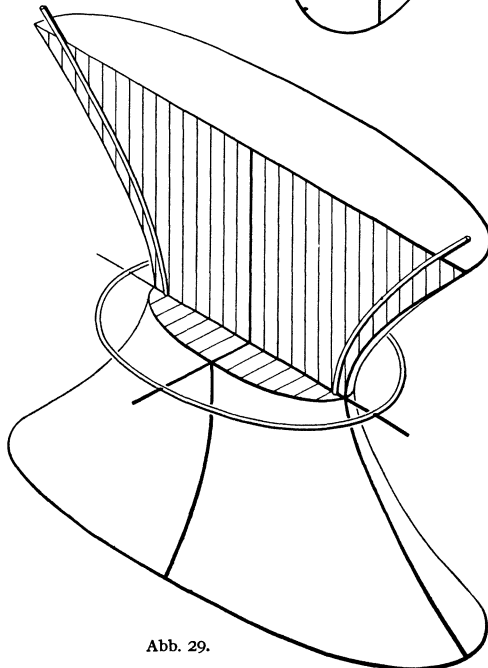


Abb. 29.

„konfokaler“ Ellipsoide (d. h. mit gemeinsamen Fokalkurven), die in ihrer Gesamtheit den Raum einfach und lückenlos überdecken. Auch die Scharen der zweischaligen und der einschaligen Hyperboloide, die zu diesen Fokalkurven gehören, überdecken jede für sich den Raum einfach und lückenlos; durch jeden Raumpunkt geht also ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid hindurch (Abb. 31). Genau so nun, wie in der Ebene die konfokalen Kegelschnitte, durchschneiden sich im Raum die konfokalen Flächen zweiter Ordnung rechtwinklig, d. h. in jedem Raumpunkt stehen die Tangentialebenen der drei hindurchgehenden Flächen aufeinander senkrecht<sup>1</sup>. Solche dreifach orthogonalen Flächensysteme und vor allem die konfokalen

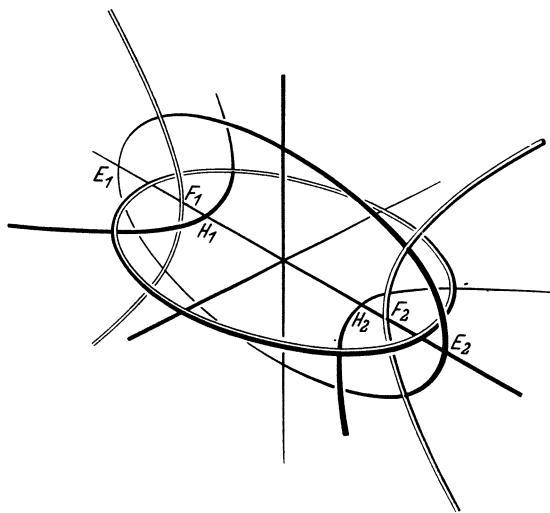


Abb. 30.

Flächen zweiter Ordnung spielen bei zahlreichen mathematischen und physikalischen Betrachtungen eine Rolle; die Anwendung der „elliptischen Koordinaten“, zu denen man bei der analytischen Darstellung dieser Flächen geführt wird, erweist sich für die Behandlung vieler, auch astronomischer Probleme als zweckmäßig.

Einen Überblick über den Aufbau eines Systems von konfokalen

Flächen zweiter Ordnung kann man gewinnen, wenn man die verschiedenen Flächen in einer bestimmten Reihenfolge durchläuft. Ich gehe von den sehr großen Ellipsoiden der Schar aus, die ungefähr die Gestalt einer Kugel besitzen. Nun lasse ich die große Achse allmählich immer kürzer werden; dabei werden die Ellipsoide immer flacher und einer Kugel unähnlicher, da sie in den drei Achsenrichtungen verschieden stark zusammengedrückt werden. So erhalte ich schließlich als Grenzfall des Ellipsoids das Innere der Fokalellipse, doppelt überdeckt. Von hier aus gehe ich sprunghaft zum Äußeren der Ellipse über, welches ebenfalls als doppelt überdeckt vorzustellen ist und den Grenzfall eines flachen einschaligen Hyperboloids bildet. Durchlaufe ich von diesem Grenzfall ausgehend die Schar der Hyperboloide in der Weise, daß ich immer steilere Flächen nehme, so komme ich der Ebene der Fokal-

<sup>1</sup> Die Punkte der Fokalkurven spielen eine Ausnahmestelle; in ihnen werden zwei von den drei Ebenen unbestimmt. Vgl. den folgenden Absatz.

hyperbel von beiden Seiten her immer näher, und die Gürtellipsen, die ebenfalls ein konfokales System durchlaufen, werden immer schmaler. Wenn die Gürtellellipse schließlich unendlich schmal, d. h. zur Doppelstrecke geworden ist, so schrumpft das einschalige Hyperboloid auf den doppelt bedeckten ebenen Streifen zwischen den Zweigen der Fokalhyperbel zusammen<sup>1</sup>. Jetzt gehe ich nochmals unstetig auf die andere Seite der Fokalhyperbel über, die ich mir wieder als doppelt überdeckt vorzustellen habe. Dies ist der Grenzfall eines flachen zweischaligen Hyperboloids.

Lasse ich nun die beiden Schalen des Hyperboloids sich allmählich aufblähen, so nähern sie sich beide immer mehr von beiden Seiten her derjenigen Ebene, die im Mittelpunkt der Fokalkurven auf deren Ebenen senkrecht steht. In der Grenzlage erhalte ich also diese Ebene doppelt überdeckt. Hiermit ist das System der konfokalen Flächen vollständig durchlaufen, und unsere Betrachtung zeigt, in welcher Weise jede Schar für sich den Raum einfach und lückenlos durchzieht.

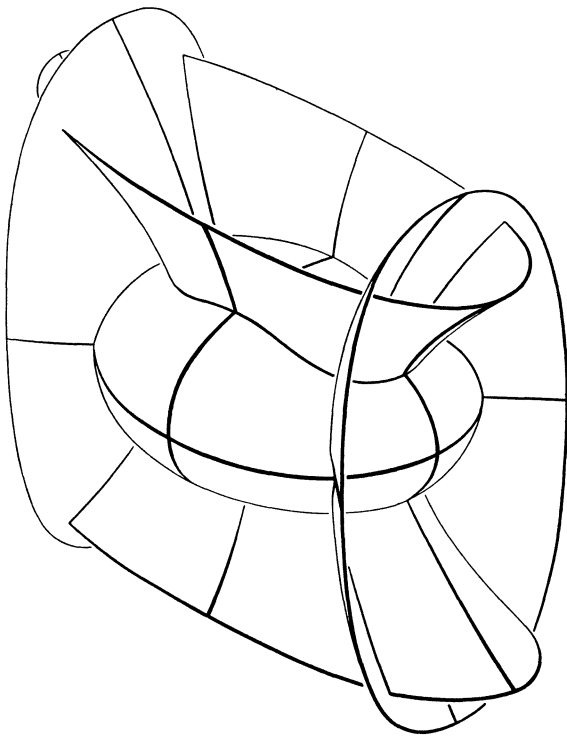


Abb. 31.

Die Beziehung der Fokalkurven zueinander und zu den zugehörigen Flächen zweiter Ordnung läßt sich noch durch eine weitere Eigenschaft kennzeichnen. Wenn ich von irgendeinem Punkt der Fokalhyperbel in Richtung seiner Tangente die Fokalellipse betrachte, so erscheint diese als ein Kreis, auf dessen Mittelpunkt ich blicke; die Fokalhyperbel ist also der geometrische Ort für die Spitzen der Kreiskegel, welche ich durch die Ellipse legen kann, und die Rotationsachse jedes solchen Kegels ist die Tangente der Fokalhyperbel in der Kegelspitze. Ebenfalls Kreiskegel, und zwar mit der gleichen Achse, sind die Tangentialkegel

<sup>1</sup> Das früher erwähnte bewegliche Stangenmodell durchläuft gerade dieses System von Hyperboloiden vollständig, einschließlich der ebenen Grenzlagen.

von einem beliebigen Punkt der Fokalhyperbel an alle zu den gegebenen Fokalkurven konfokalen Ellipsoide, in deren Äußeren der Punkt liegt. Allgemein gilt der Satz, daß eine jede Fläche des konfokalen Systems, betrachtet von einem Punkt einer Fokalkurve aus, welcher nicht von der Fläche eingeschlossen wird, als Kreis erscheint, auf dessen Mittelpunkt man blickt, falls die Blickrichtung tangential zur Fokalkurve genommen wird. (Die Berührungspunkte der Umrißkegel mit der Fläche liegen aber im allgemeinen keineswegs auf einem Kreis, sondern können jeden beliebigen Kegelschnitt erfüllen, auch eine Hyperbel<sup>1</sup>.)

Es liegt nahe, neben den Fokalkurven auch die anderen Kurven zu betrachten, in denen sich zwei ungleichartige Flächen eines konfokalen Systems treffen. Diese Kurven haben eine einfache differentialgeometrische Eigenschaft, auf die wir später eingehen werden (S. 166). Wir haben ferner in ihnen ein erstes Beispiel für Kurven, die nicht in einer Ebene liegen. Es ist leicht einzusehen, daß eine Durchdringungskurve zweier beliebiger und beliebig gelegener Flächen zweiter Ordnung von einer beliebigen Ebene nie in mehr als vier Punkten getroffen wird, falls die Kurve nicht einen ganzen Bogen mit der Ebene gemein hat. Die Ebene schneidet nämlich die Flächen in zwei Kegelschnitten; man kann nun analytisch leicht den auch anschaulich einleuchtenden Satz beweisen, daß zwei Kegelschnitte sich in höchstens vier Punkten treffen, falls sie nicht zusammenfallen oder eine ganze Gerade gemein haben (vgl. S. 143).

Mit dieser Schnittpunkteigenschaft hängt es zusammen, daß man die Kurve aus analytischen Gründen als Kurve vierter Ordnung bezeichnet (Die Kurven  $n$ -ter Ordnung haben die entsprechende Eigenschaft, daß sie mit jeder Ebene entweder höchstens  $n$  Punkte oder einen ganzen Kurvenbogen gemein haben). Es gibt aber auch Kurven vierter Ordnung, die man nicht als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung erhalten kann<sup>2</sup>. — Die Raumkurven höherer Ordnung lassen sich ohne analytische Hilfsmittel schwer erfassen und seien deshalb hier nicht näher untersucht.

## Anhänge zum ersten Kapitel.

### 1. Fußpunktkonstruktionen der Kegelschnitte.

Eine Kurve  $K$  und ein Punkt  $F_1$  seien gegeben (Abb. 32); ich fälle von  $F_1$  aus die Lote auf alle Tangenten  $t$  von  $K$ . Dann beschreiben

<sup>1</sup> Eine weitere Eigenschaft des konfokalen Systems, die übrigens die soeben erwähnte als Grenzfall umfaßt, ist die folgende: Legt man von irgendeinem Raumpunkt  $P$  aus den Tangentialkegel an irgendeine Fläche des Systems, die  $P$  nicht umschließt, so werden die Symmetrieebenen dieses Kegels stets gebildet von den Tangentialebenen der drei durch  $P$  gehenden Flächen des Systems im Punkte  $P$ .

<sup>2</sup> Für die Schnittkurven zweier Flächen zweiter Ordnung läßt sich analytisch beweisen, daß noch unendlich viele weitere Flächen zweiter Ordnung durch sie hindurchgehen, darunter vier Kegel (von denen auch einige zusammenfallen oder zu Zylindern ausarten können).

die Fußpunkte dieser Lote eine zweite Kurve  $k$ , die man die Fußpunkt-kurve von  $K$  bezüglich  $F_1$  nennt. Umgekehrt kann man  $K$  zurückgewinnen, wenn  $F_1$  und  $k$  gegeben sind. Zu diesem Zweck hat man  $F_1$  mit allen Punkten von  $k$  zu verbinden und auf den Verbindungslinien die Senkrechten  $t$  in den Punkten von  $k$  zu errichten. Die Geraden  $t$  umhüllen dann  $K$ . Diese zweite Konstruktion wollen wir eine Fußpunkt-konstruktion nennen und sagen, daß  $K$  durch Fußpunkt-konstruktion an  $k$  (bezüglich  $F_1$ ) entsteht. Je nach der Wahl von  $F_1$  können also durch Fußpunkt-konstruktion an einer und derselben Kurve  $k$  sehr verschiedenartige Kurven  $K$  entstehen.

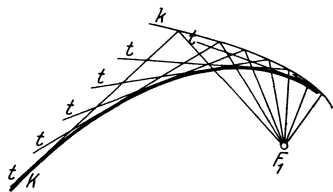


Abb. 32.

Wir zeigen: Die Fußpunkt-konstruktion am Kreis und an der Geraden liefert stets Kegelschnitte. Liegt der Punkt  $F_1$  innerhalb des Kreises vom Mittelpunkt  $M$ , so entsteht eine Ellipse, und  $F_1$  ist der eine Brennpunkt; der zweite Brennpunkt  $F_2$  ist der Spiegelpunkt von  $F_1$  bezüglich  $M$ . Liegt  $F_1$  außerhalb, so entsteht eine Hyperbel. Die Brennpunkte sind wieder  $F_1$  und der Spiegelpunkt von  $F_1$  bezüglich  $M$ . Nimmt man anstatt eines Kreises eine Gerade  $g$ , so entsteht eine Parabel. Der Brennpunkt ist  $F_1$ , die Leitlinie ist die Parallele  $h$  von  $g$ , die auf der anderen Seite von  $F_1$  liegt und von  $g$  denselben Abstand wie  $F_1$  hat.

Um zunächst die Behauptung für die Ellipse zu beweisen, ziehe ich (Abb. 33) durch  $F_1$  eine beliebige Gerade, die den Kreis in  $C$  und  $C'$  treffen möge. Auf dieser Geraden bestimme ich die Punkte  $F$  und  $F'$ , so daß  $F_1C = CF$  und  $F_1C' = C'F'$ . Ferner errichte ich auf der Geraden  $CC'$  in  $C$  und  $C'$  die Lote  $t$  und  $t'$ .  $F_2$  sei wie in der Behauptung so gelegt, daß  $M$  Mittelpunkt der Strecke  $F_1F_2$  ist.  $F_2F$  möge  $t$  in  $B$  schneiden, und  $F_2F'$  möge  $t'$  in  $B'$  schneiden. Dann ist  $F_1B = FB$ , also  $F_1B + BF_2 = FF_2$ . Da aber  $M$  und  $C$  die Mittelpunkte der Strecken  $F_1F_2$  und  $F_1F$  sind, so gilt  $FF_2 = 2CM$ . Wenn wir den Kreisradius mit  $r$  bezeichnen, haben wir die Beziehung erhalten:  $BF_1 + BF_2 = 2r$ . Der Punkt  $B$  liegt also auf der Ellipse mit den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  und der großen Achse  $2r$ . Es bleibt nur noch zu zeigen, daß  $t$  diese Ellipse in  $B$  berührt. Dies folgt aus der auf S. 2 bewiesenen Winkeleigenschaft der Ellipsentangente. Nach unserer Konstruktion ist nämlich  $\sphericalangle CBF_1 = \sphericalangle CBF$ . — Für  $t'$  verläuft der Beweis ganz analog mit Hilfe der Punkte  $B'$ ,  $C'$  und  $F'$ .

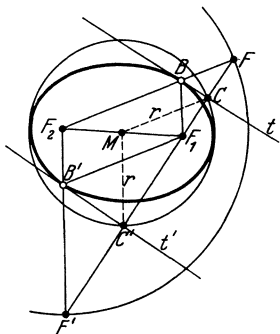


Abb. 33.



Der Beweis für die Hyperbel folgt aus Abb. 34. Sie unterscheidet sich von Abb. 33 allein dadurch, daß  $F_1$  außerhalb des Kreises angenommen ist. In diesem Fall durchlaufen  $B$  und  $B'$  die beiden verschiedenen Äste der Hyperbel. Es ist nämlich  $FF_2 = 2r = BF_2 - BF_1$  und  $F'F_2 = 2r = B'F_1 - B'F_2$ .

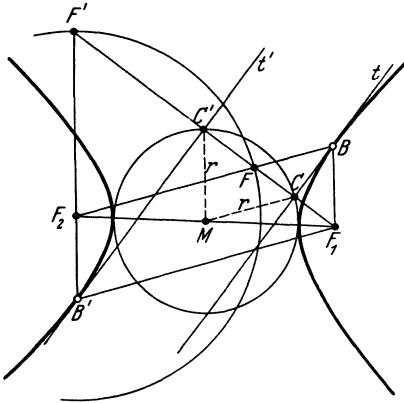


Abb. 34.

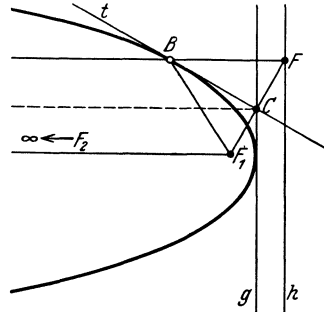


Abb. 35.

Für die Parabel ist der Beweis etwas abzuändern. Sind nämlich die Punkte  $C$  und  $F$  und die Gerade  $t$  analog dem Früheren konstruiert (Abb. 35), so hat man von  $F$  aus das Lot auf  $g$  zu fallen.  $B$  ist der Schnittpunkt dieses Lotes mit  $t$ . Dann ist  $BF_1 = BF$ .  $F$  durchläuft aber die Gerade  $h$ , die wie in der Behauptung konstruiert ist<sup>1</sup>. Also läuft  $B$  in der Tat auf einer Parabel mit  $F_1$  als Brennpunkt und  $h$  als Leitlinie. Daß  $t$  die Parabel in  $B$  berührt, folgt wieder daraus, daß  $t$  den Winkel  $BBF_1$  halbiert<sup>2</sup>.

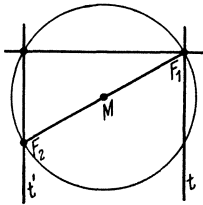


Abb. 36.

Läßt man den Punkt  $F_1$  auf die Kreisperipherie fallen (Abb. 36), so drehen sich  $t$  und  $t'$  um die Punkte  $F_1$  und  $F_2$ . Wir erhalten also ein Paar von Geradenbüscheln. Bekanntlich tritt dieser Ausartungsfall naturgemäß auf, wenn man die Kurven zweiter Ordnung als Tangengebilde betrachtet.

### 2. Die Leitlinien der Kegelschnitte.

Im Text wurde die Parabel als der geometrische Ort aller Punkte definiert, für die der Abstand von einem festen Punkt  $F$ , dem Brennpunkt, gleich dem Abstand von einer festen Geraden  $g$ , der Leitlinie,

<sup>1</sup> Bei der Ellipsen- und Hyperbelkonstruktion durchläuft  $F$  einen um  $F_2$  als Mittelpunkt geschlagenen Kreis, der doppelt so groß ist wie der ursprünglich gewählte und mit ihm  $F_1$  zum Ähnlichkeitspunkt hat. Das folgt aus den Relationen  $FF_2 = 2 CM$  und  $FF_1 = 2 CF_1$ .

<sup>2</sup> Natürlich läßt sich Abb. 35 aus Abb. 33 durch denselben Grenzübergang ableiten, durch den wir auf S. 3 die Parabel aus der Ellipse gewonnen haben.

ausfällt. Eine ähnliche Definition läßt sich auch für die Ellipse und Hyperbel aufstellen. Wir suchen den geometrischen Ort aller Punkte, für die der Abstand von einem festen Punkt  $F$  zum Abstand von einer festen Geraden  $g$  in einem konstanten Verhältnis  $v$  steht. Im Falle  $v = 1$  erhalten wir die Parabel. Wir beweisen nun: Für  $v < 1$  ist die gesuchte Kurve eine Ellipse, für  $v > 1$  eine Hyperbel.  $F$  ist ein Brennpunkt des Kegelschnitts. Umgekehrt kann man zu jeder Ellipse und jeder Hyperbel zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  finden, so daß jeder Kurvenpunkt konstantes Abstandsverhältnis von  $F_1$  und  $g_1$  bzw. von  $F_2$  und  $g_2$  hat.

Zum Beweis gehen wir von Abb. 37 aus. Ein Kreiskegel schneidet eine Ebene  $e$  in einer Ellipse  $k$ , für die wir die Behauptung prüfen wollen. Wie in Abb. 10 ist eine Kugel zu Hilfe genommen, die den Kegel in einem Kreis  $K$  und die Ebene in einem Punkt  $F$  berührt;  $F$  ist also ein Brennpunkt von  $k$ . Ferner sei  $f$  die Ebene von  $K$  und  $g$  die Schnittgerade von  $e$  und  $f$ . Von einem beliebigen Ellipsenpunkt  $B$  aus fallen wir das Lot  $BC$  auf  $g$  und das Lot  $BD$  auf  $f$ . Sodann verbinden wir  $B$  mit  $F$  und der Kegelspitze  $S$ ;  $BS$  möge  $K$  im Punkt  $P$  treffen. Zur Abkürzung setzen wir  $\sphericalangle DBP = \alpha$  und  $\sphericalangle DBC = \beta$ . Dann ist  $BC = \frac{BD}{\cos \beta}$  und  $BP = \frac{BD}{\cos \alpha}$ . Ferner ist  $BF = BP$ , da beide Strecken Tangenten an dieselbe Kugel vom selben Punkt  $B$  aus sind. Also ist

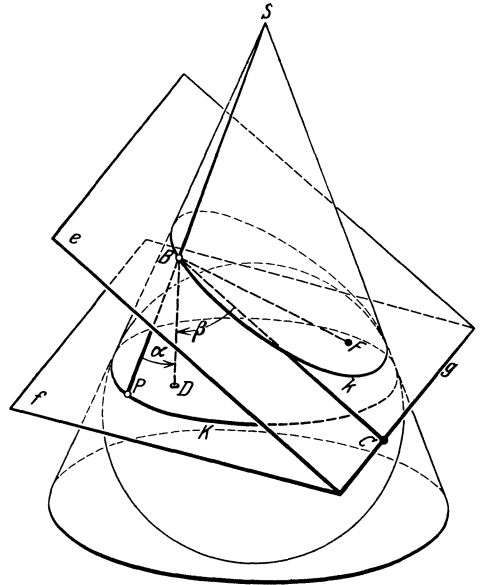


Abb. 37.

$\frac{BF}{BC} = \frac{BP}{BC} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ .

Nun sind aber die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  von der Wahl von  $B$  unabhängig, denn  $\alpha$  ist gleich dem halben Öffnungswinkel des Kegels, und  $\beta$  ist gleich dem Neigungswinkel der Ebene  $e$  zur Achse des Kegels. Setzen wir also  $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = v$ , so haben wir für die Ellipse  $k$  die Behauptung bestätigt und für die Leitlinie  $g$  zugleich eine räumliche Konstruktion angegeben.

Falls  $e$  den Kegel nicht in einer Ellipse, sondern in einer Hyperbel  $h$  schneidet (Abb. 38), verläuft der Beweis genau so. Nur ist im ersten

Fall  $\alpha < \beta$ , im zweiten Fall  $\alpha > \beta$ . Für die Ellipse  $k$  ist also  $v < 1$ , für die Hyperbel  $h$  dagegen  $v > 1$ .

Nun beweist unsere Betrachtung zunächst nur die Existenz der Leitlinie für bestimmte Ellipsen und Hyperbeln, während in der Behauptung umgekehrt die Zahl  $v$ , der Punkt  $F$  und die Gerade  $g$  vorgegeben sind und die zugehörige Kurve gesucht wird. Aber offenbar hängt die Gestalt der gesuchten Kurve nur von dem Wert der Zahl  $v$  ab, und andererseits können wir unsere Konstruktion so einrichten, daß die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , also auch die Zahl  $v$ , beliebige Werte annehmen. Daher sind durch diese Konstruktion alle gestaltlichen Möglichkeiten für die gesuchte Kurve erfaßt, und diese Kurve muß in der Tat stets ein Kegelschnitt sein.

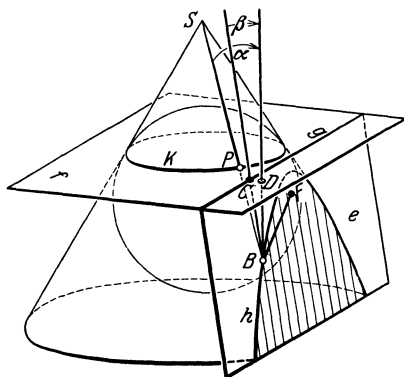


Abb. 38.

Die Parabel ist, wenn wir die Bezeichnungsweise beibehalten, durch  $\alpha = \beta$ , d. h.  $v = 1$  gekennzeichnet, so daß wir auf die ursprüngliche Definition zurückfallen. Schneidet dagegen  $e$  den Kegel in einem Kreis, so versagt die Konstruktion, weil dann (und nur dann) die Ebenen  $e$  und  $f$  keine Schnittgerade  $g$  besitzen, sondern parallel sind. Jeder von einem Kreis verschiedene eigentliche Kegelschnitt läßt sich als Schnitt

eines Kreiskegels auffassen und dann der angegebenen Konstruktion unterwerfen. Die Eigenschaft der Leitlinien kommt daher außer dem Kreis allen eigentlichen Kegelschnitten zu.

Übrigens beruhen die griechischen Namen der Kegelschnitte auf ihrer Beziehung zu den Leitlinien. Sie deuten an, daß  $v$  bei der Ellipse die Zahl 1 nicht erreicht (*ἐλλείπειν*), bei der Hyperbel übertrifft (*ὑπερβάλλειν*) und bei der Parabel gerade erreicht (*παράβαλλειν*).

### 3. Das bewegliche Stangenmodell des Hyperboloids.

Wir wollen (unter Voraussetzung einiger Kenntnisse aus der analytischen Geometrie des Raumes) die S. 15 ausgesprochene Behauptung beweisen, daß das Stangenmodell des einschaligen Hyperboloids beweglich ist. Wir zeigen gleichzeitig, daß das Gerüst ein System konfokaler einschaliger Hyperboloide durchlaufen kann.

$x_1, x_2, x_3$  bzw.  $y_1, y_2, y_3$  seien die cartesischen Raumkoordinaten der Punkte  $P$  bzw.  $Q$ . Wir betrachten die konfokalen Flächen zweiter Ordnung:

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} = \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1.$$

Wir denken uns einen solchen Wert  $\lambda$  gewählt, daß (1) ein einschaliges Hyperboloid bestimmt.  $P$  soll, wie durch (1) zum Ausdruck kommt, auf dieser Fläche liegen. Nun sei  $Q$  ein anderer Punkt derselben Fläche, der überdies mit  $P$  auf derselben in der Fläche verlaufenden Geraden liegt. Diese Forderung ist gleichbedeutend damit, daß die Gleichungen bestehen:

$$(2) \quad \sum_1^3 \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} = 1,$$

$$(3) \quad \sum_1^3 \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = 1.$$

Denn der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $PQ$  muß jedenfalls auf der Fläche liegen.  $M$  hat die Koordinaten  $\frac{1}{2}(x_i + y_i)$ . Es muß also gelten

$$\sum \frac{1}{4} \frac{(x_i + y_i)^2}{a_i - \lambda} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = 1.$$

Das ist mit (3) äquivalent. Umgekehrt liegt die Gerade  $PQ$  ganz auf der Fläche, wenn die Gerade mit der Fläche die drei Punkte  $P, Q, M$  gemein hat, wenn also (1), (2) und (3) gilt.

Wir berechnen nun den Abstand  $PQ = r$ . Es ist

$$\begin{aligned} r^2 &= \sum_1^3 (x_i - y_i)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 - 2 \sum x_i y_i \\ &= \sum (a_i - \lambda) \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \sum (a_i - \lambda) \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \sum (a_i - \lambda) \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \\ &= \sum a_i \left[ \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \right] \\ &\quad - \lambda \left[ \sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \sum \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \sum \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \right]. \end{aligned}$$

Infolge der Gleichungen (1), (2), (3) verschwindet der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer. Wir erhalten also

$$(4) \quad r^2 = \sum a_i \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda}.$$

Nun sei  $\lambda'$  ein Wert, der in (1) für  $\lambda$  eingesetzt wieder ein einschaliges Hyperboloid ergibt. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die Vorzeichen von  $a_i - \lambda$  und  $a_i - \lambda'$  für jedes  $i$  einander gleich sind. Demnach bestimmen die Formeln

$$(5) \quad x'_i = x_i \sqrt{\frac{a_i - \lambda'}{a_i - \lambda}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

eine reelle affine Transformation. Offenbar verwandelt (5) die Fläche (1) in ein zu (1) konfokales einschaliges Hyperboloid, das (1') heißen möge. Sind  $P'(x'_i)$  und  $Q'(y'_i)$  die Bilder von  $P$  und  $Q$  vermöge (5), so liegt die Gerade  $P'Q'$  ganz in (1'), da sie das Bild von  $PQ$  ist.

Unsere Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß der Abstand  $P'Q' = r'$  gegenüber  $PQ$  unverändert geblieben ist;  $r' = r$ . Nun gilt für  $r'$  die zu (4) analoge Formel

$$(4') \quad r'^2 = \sum a_i \frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'}.$$

Aus (5) folgt

$$\frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'} = \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda} \quad (i = 1, 2, 3),$$

also wegen (4), (4') in der Tat  $r = r'$ .

Denken wir uns  $\lambda$  fest,  $\lambda'$  veränderlich, so gibt (5) die Bahnkurven der Punkte des Stangenmodells, wenn dieses, wie wir immer angenommen haben, unter Festhaltung der Symmetrieebenen deformiert wird. Diese Kurven sind, wie eine kurze Rechnung zeigt, die Schnittkurven der mit (1) konfokalen Ellipsoide und zweischaligen Hyperboloide.

## Zweites Kapitel.

# Reguläre Punktsysteme.

Wir wollen in diesem Kapitel die metrischen Eigenschaften des Raums unter einem neuen Gesichtspunkt betrachten. Während wir uns nämlich bisher mit Kurven und Flächen, also mit kontinuierlichen Gebilden beschäftigt haben, wenden wir uns nun zu Systemen, die aus getrennten Elementen aufgebaut sind. Solche Systeme treten auch in den übrigen Gebieten der Mathematik oft auf, besonders in der Zahlen- und Funktionentheorie und in der Krystallographie<sup>1</sup>.

## § 5. Ebene Punktgitter.

Ein besonders einfaches Gebilde, das aus diskreten Teilen besteht, ist das ebene quadratische Punktgitter (Abb. 39). Um es zu erzeugen, markieren wir uns in einer Ebene die vier Ecken eines Quadrats vom Inhalt Eins, verschieben das Quadrat parallel einer Seite um die Seitenlänge und zeichnen die beiden neu hinzugekommenen Eckpunkte ebenfalls auf. Dieses Verfahren denken wir uns nach derselben und dann nach der entgegengesetzten Seite unbegrenzt fortgesetzt. So erhalten wir in der Ebene einen Streifen, der aus zwei Reihen äquidistanter Punkte besteht. Diesen Streifen verschieben wir senkrecht zu sich selbst um eine Quadratseitenlänge, markieren die neu hinzugekommenen Punkte und denken uns auch dies Verfahren nach beiden Seiten unbegrenzt oft

<sup>1</sup> Soweit die folgenden Abschnitte die Krystallographie streifen, ist die Bezeichnungsweise nicht immer der üblichen krystallographischen Terminologie angepaßt. Im Rahmen der einfachen geometrischen Betrachtung, auf die wir uns beschränken, sind oft andere Namen kürzer und eindringlicher.