Werk

Titel: Anschauliche Geometrie
Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan
Verlag: Springer
Ort: Berlin
Jahr: 1932
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN379425343
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

LOG Id: LOG_0006
LOG Titel: § 1. Ebene Kurven.
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Erstes Kapitel.

Die einfachsten Kurven und Flächen.

§ 1. Ebene Kurven.

Die einfachste Fläche ist die Ebene, die einfachsten Kurven sind die ebenen Kurven; unter ihnen die einfachste ist die Gerade. Die Gerade läßt sich definieren als kürzester Weg zwischen zwei Punkten, oder als Schnittkurve zweier Ebenen, oder als Rotationsachse.

Die nächst einfache Kurve ist der Kreis. Schon dieses Gebilde hat zu so vielen und tiefen Untersuchungen Anlaß gegeben, daß sie allein eine Vorlesung füllen würden. Wir definieren den Kreis als die Kurve, deren Punkte von einem gegebenen Punkt gleichen Abstand haben. Wir erzeugen den Kreis durch die bekannte Zirkel- oder Fadenkonstruktion. Sie ergibt anschaulich: Der Kreis ist eine geschlossene, in ihrem ganzen Verlauf konvexe Kurve; daher läßt sich durch jeden seiner Punkte eine bestimmte Gerade — die Tangente — legen, die nur diesen einen Punkt — den Berührungspunkt — mit dem Kreise gemein hat und die sonst in dessen Äußerem verläuft (Abb. 1). Der Radius MB nach dem Berührungspunkt B muß die kürzeste Verbindung des Kreismittelpunktes M mit der Tangente t sein. Denn deren Punkte liegen mit Ausnahme des Berührungspunktes im Äußeren des Kreises, sind also vom Mittelpunkt weiter entfernt als der Berührungspunkt. Hieraus folgt weiter, daß jener Radius auf der Tangente senkrecht steht. Zum Beweise spiegele ich den Mittelpunkt M an der Tangente t, d. h. ich fälle von M aus das Lot auf t und verlängere es um sich selbst bis M'; M' wird der Spiegelpunkt von M genannt. Da nun MB die kürzeste Verbindung zwischen M und t ist, so muß aus Symmetriegründen auch $M'B$ die kürzeste Verbindung zwischen M' und t sein. Folglich stellt der Streckenzug MBM' die kürzeste Verbindung zwischen M und M' dar, muß also bei B umgeknickt verlaufen, d. h. MB steht in der Tat auf t senkrecht.

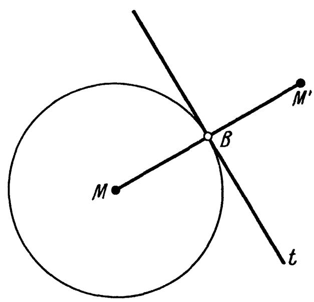

Abb. 1.

Es liegt nahe, eine Verallgemeinerung der Kreiskonstruktion zu betrachten. Bei der Fadenkonstruktion des Kreises habe ich nämlich um einen festen Punkt, den Kreismittelpunkt, einen geschlossenen Faden zu legen und beim Zeichnen straff zu ziehen; eine ähnliche Kurve werde ich erhalten, wenn ich den geschlossenen Faden um zwei feste Punkte lege. Die so entstehende Kurve heißt Ellipse, die beiden festen Punkte heißen deren Brennpunkte. Die Fadenkonstruktion kennzeichnet die Ellipse als die Kurve, deren Punkte konstante Abstandssumme von zwei gegebenen Punkten haben. Läßt man die beiden Punkte zusammenrücken, so erhält man den Kreis als Grenzfall der Ellipse. Allen erwähnten Eigenschaften des Kreises entsprechen einfache Eigenschaften der Ellipse. Sie ist geschlossen, überall konvex und besitzt in jedem Punkte eine Tangente, die mit Ausnahme des Berührungspunktes ganz im Äußeren der Ellipse verläuft. Den Radien des Kreises entsprechen bei der Ellipse die beiden Verbindungslinien eines Kurvenpunktes mit den Brennpunkten. Sie

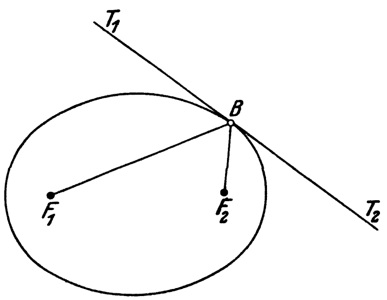

Abb. 2.

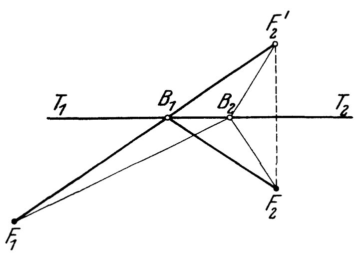

Abb. 3.

werden die Brennstrahlen des Ellipsenpunktes genannt. In Analogie zu der Tatsache, daß die Kreistangente auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht, bildet die Ellipsentangente gleiche Winkel mit den Brennstrahlen des Berührungspunktes. Meine Behauptung lautet in der Bezeichnungsweise von Abb. 2: $\sphericalangle F_1BT_1 = \sphericalangle F_2BT_2$. Zum Beweis (Abb. 3) spiegele ich F_2 an der Tangente und nenne den Spiegelpunkt F_2'. Nun ist die Gerade F_1F_2', welche die Tangente in B_1 treffen möge, der kürzeste Weg zwischen F_1 und F_2'. Also ist $F_1B_1F_2$ der kürzeste Weg zwischen F_1 und F_2, der die Tangente trifft; denn für jeden anderen Punkt B_2 ist $F_1B_2F_2 = F_1B_2F_2'$ länger als $F_1B_1F_2 = F_1B_1F_2'$. Andrerseits wird aber der kürzeste Weg zwischen F_1 und F_2, der die Tangente trifft, von den Brennstrahlen des Berührungspunktes B gebildet. Denn jeder andere Punkt der Tangente hat, da er im Ellipsenäußeren liegt, größere Entfernungssumme von den Brennpunkten als der Ellipsenpunkt B. B fällt also mit B_1 zusammen, und hieraus folgt die Behauptung. Denn F_2 und F_2' liegen zu der Geraden T_1T_2 symmetrisch, und $\sphericalangle F_1B_1T_1$ ist der Scheitelwinkel von $\sphericalangle F_2'B_1T_2$.

Diese Eigenschaft der Ellipsentangente erlaubt eine optische Anwendung, der die Namen Brennpunkt und Brennstrahl ihren Ursprung verdanken. Denkt man sich nämlich in einem Brennpunkt eine Lichtquelle angebracht und die Ellipse als spiegelnd, so wird das Licht im anderen Brennpunkt wieder vereinigt.

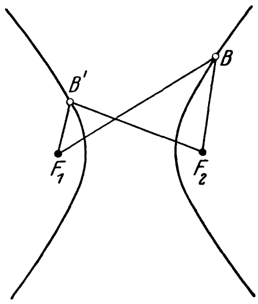

Abb. 4.

Nicht ganz so leicht ausführbar wie die Ellipsenkonstruktion, aber im Prinzip nicht schwieriger ist die Konstruktion einer Kurve, deren Punkte von zwei festen Punkten konstante Abstands*differenz* haben. Diese Kurve heißt Hyperbel, die festen Punkte heißen deren Brennpunkte. Es soll also (Abb. 4) für jeden Kurvenpunkt B oder B' die Beziehung $F_1B - F_2B = \text{const} = a$ oder $F_2B' - F_1B' = a$ gelten. Demnach besteht die Hyperbel aus zwei getrennten Ästen. Die Anschauung zeigt, daß die Hyperbel überall konvex ist und in jedem Punkt eine Tangente besitzt. Wir werden später (S. 8, Fußnote 2) beweisen, daß auch hier die Tangente keinen weiteren Punkt außer dem Berührungspunkt mit der Kurve gemein hat. In analoger Weise wie bei der Ellipse läßt sich zeigen, daß die Tangente den Winkel zwischen den Brennstrahlen des Berührungspunktes halbiert (vgl. Abb. 6).

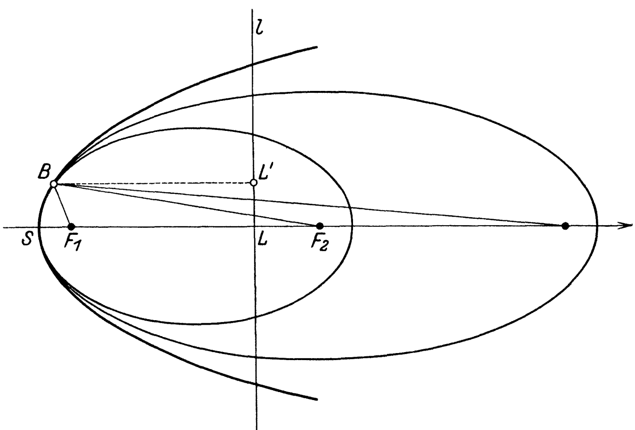

Abb. 5.

Aus der Ellipse kann man durch Grenzübergang eine weitere Kurve, die Parabel erzeugen (Abb. 5). Dazu halte ich den einen Brennpunkt, z. B. F_1, und den ihm nächstgelegenen Scheitel S der Ellipse fest (unter den Scheiteln der Ellipse versteht man die Schnittpunkte der Kurve mit der Verbindungslinie der Brennpunkte). Ich betrachte nun die Ellipsen, die entstehen, wenn der zweite Brennpunkt F_2 sich auf der Verlängerung von SF_1 immer weiter von F_1 entfernt; diese Ellipsen streben gegen eine Grenzkurve, und das ist eben die Parabel. Aus dem Grenzübergang können wir eine einfache Definition der Parabel herleiten. Solange mein Zeichenstift bei der Fadenkonstruktion der Ellipse in der Nähe von S bleibt (Abb. 5), ist der nach F_2 laufende Faden bei großer Entfernung von F_1 und F_2 ungefähr parallel SF_1. Errichtet man also in einem beliebigen Punkt L von F_1F_2 das Lot l auf F_1F_2, so gilt angenähert

$$F_1B + BF_2 = F_1B + BL' + LF_2 = \text{const}$$

(L' ist der Fußpunkt des Lotes von B auf l). Wenn ich nun für

$$\text{„const} - LF_2\text{“}$$

eine neue Konstante einführe (LF_2 ist ja für ein und dieselbe Kurve konstant), so erhalte ich:

$$F_1B + BL' = \text{const}.$$

Diese Beziehung gilt immer genauer, je größer die Entfernung F_1F_2 wird, und bei der Grenzkurve ist sie streng erfüllt. Somit ist die Parabel diejenige Kurve, deren Punkte konstante Entfernungssumme von einem festen Punkt und einer festen Geraden haben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Kurve, für deren Punkte der Abstand von einem festen Punkt gleich dem von einer festen Geraden ist. Wir erhalten diese Gerade, indem wir zu l die Parallele auf der anderen Seite von S im Abstand SF_1 ziehen; sie wird die Leitlinie der Parabel genannt.

Denkt man sich die Parabel spiegelnd, so reflektiert sie alle Lichtstrahlen, die parallel SF_1 einfallen, in den Punkt F_1; dies folgt ebenfalls aus dem Grenzübergang.

Wir haben die „Schar“ aller Ellipsen betrachtet, die einen Scheitel und den nächstgelegenen Brennpunkt gemein haben. Nunmehr wollen wir die Schar aller Ellipsen betrachten, die beide Brennpunkte gemein haben. Diese Schar „konfokaler“ Ellipsen (focus heißt Brennpunkt) bedeckt die Ebene „einfach und lückenlos“, das heißt, durch jeden Punkt der Ebene geht genau eine Kurve der Schar; denn jeder Punkt besitzt eine bestimmte Entfernungssumme von den beiden Brennpunkten, liegt also auf der Ellipse, die zu diesem Wert der Summe gehört[1].

Wir nehmen nun noch die Schar aller Hyperbeln hinzu, die ebenfalls die beiden vorgegebenen Punkte zu Brennpunkten haben. Auch diese Schar bedeckt die Ebene einfach und lückenlos[2], so daß durch jeden

[1] Die Strecke zwischen den Brennpunkten ist eine (ausgeartete) Ellipse. Man erhält sie, wenn man als Wert der Entfernungssumme den Abstand der Brennpunkte wählt.

[2] Die Gerade durch die Brennpunkte mit Ausnahme ihrer Verbindungsstrecke ist eine ausgeartete Hyperbel, ebenso die Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke der Brennpunkte; bei ihr hat die Entfernungsdifferenz den konstanten Wert Null.

Punkt der Ebene genau zwei Kurven des Systems konfokaler Ellipsen und Hyperbeln hindurchgehen (Abb. 6). In jedem vorgegebenen Punkt (außer in den Brennpunkten) halbieren die Tangenten der hindurchgehenden Hyperbel und Ellipse Winkel und Nebenwinkel der Brennstrahlen des Punktes, stehen also aufeinander senkrecht.

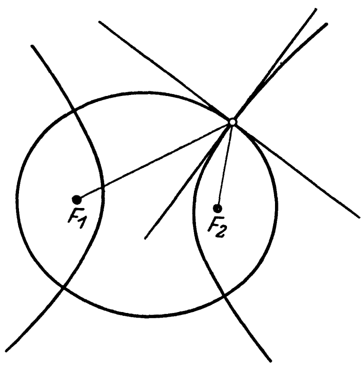

Abb. 6.

Die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln bilden daher zwei „zueinander orthogonale Kurvenscharen" (zwei Scharen heißen orthogonal, wenn jede Kurve der einen Schar jede der anderen senkrecht schneidet; als Winkel zweier Kurven definiert man den Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkt). Um eine Übersicht über dieses Kurvensystem zu gewinnen (Abb. 7), beginnen wir mit der Mittelsenkrechten von $F_1 F_2$ und durchlaufen dann zunächst die Schar der Hyperbeln. Diese werden immer flacher und gehen schließlich in die beiderseitige Verlängerung von F_1F_2 über. Damit ist die Ebene vollständig ausgefüllt. Wir springen nun auf die Strecke F_1F_2 selbst über, an die sich die zunächst sehr langgestreckten Ellipsen anschließen, die allmählich immer kreisähnlicher werden und sich gleichzeitig unbegrenzt vergrößern. Damit ist die Ebene zum zweiten Male ausgefüllt.

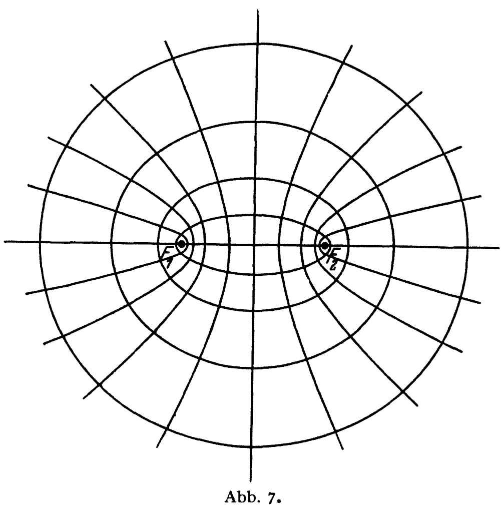

Abb. 7.

Ein anderes besonders einfaches Beispiel orthogonaler Kurvenscharen sind die konzentrischen Kreise und die Geraden durch den gemeinsamen Mittelpunkt. Man erhält diese Figur aus der vorigen durch Grenzübergang, indem man die Brennpunkte zusammenrücken läßt. Dabei gehen die Ellipsen in Kreise und die Hyperbeln in Geradenpaare über.

Die Niveaulinien und die Linien größter Steigung auf einer Landkarte sind ebenfalls orthogonale Scharen.

Schließlich sei noch eine andere Fadenkonstruktion erwähnt, die zu orthogonalen Scharen führt. Um eine konvexe Kurve, etwa um einen

Kreis, sei ein offener Faden geschlungen. Ich betrachte die Kurve, die der Endpunkt des Fadens beschreibt, wenn ich den Faden straff angespannt vom Kreis abwickele (Abb. 8). Die so erhaltene „Kreisevolvente" läuft in immer weiteren Windungen um den Kreis herum, ist also eine Spirale. Die Konstruktion ergibt anschaulich, daß die Kurve auf einer der beiden Kreistangenten senkrecht steht, die ich vom betrachteten Kurvenpunkt aus an den Kreis legen kann. Auch alle anderen Umläufe der Evolvente schneiden diese Tangente rechtwinklig; und zwar ist das zwischen zwei Umläufen liegende Tangentenstück von fester Länge, nämlich gleich dem Umfang des erzeugenden Kreises.

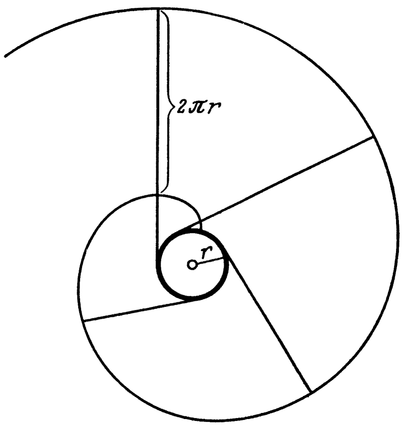

Abb. 8.

Ich kann nun noch beliebig viele weitere Evolventen desselben Kreises zeichnen, indem ich an einem anderen Peripheriepunkt mit der Abwickelung des Fadens beginne; die Gesamtheit dieser Evolventen kann aber auch durch Rotation um den Kreismittelpunkt aus einer von ihnen erzeugt werden. Die Schar der Evolventen bedeckt die Ebene mit Ausnahme des Kreisinneren einfach und lückenlos. Sie ist orthogonal zur Schar der in einem bestimmten Umlaufsinn gezogenen Kreishalbtangenten.

Auch bei einer beliebig vorgegebenen Schar gerader Linien besteht die Orthogonalschar stets aus Evolventen. Ihre erzeugende Kurve ist diejenige, die (wie in unserm Beispiel der Kreis) von den gegebenen Geraden eingehüllt wird. Wir kommen darauf in der Differentialgeometrie (S. 158) und in der Kinematik (S. 243, 244) zurück.

§ 2. Zylinder, Kegel, Kegelschnitte und deren Rotationsflächen.

Die einfachste krumme Fläche, den Kreiszylinder, kann ich aus den einfachsten Kurven — Kreis und Gerade — dadurch erzeugen, daß ich eine auf der Kreisebene senkrechte Gerade längs der Kreisperipherie verschiebe. Ferner erhalte ich den Kreiszylinder, wenn ich eine Gerade um eine zu ihr parallele Gerade als Achse rotieren lasse. Der Kreiszylinder ist also eine *Rotationsfläche*. Die Rotationsflächen sind eine wichtige Gattung von Flächen, die uns im praktischen Leben in jedem Glas, jeder Flasche usw. entgegentreten. Sie sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß man sie durch Rotation einer ebenen Kurve um eine in der Kurvenebene liegende Achse erzeugen kann.