Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0007

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

Kreis, sei ein offener Faden geschlungen. Ich betrachte die Kurve, die der Endpunkt des Fadens beschreibt, wenn ich den Faden straff angespannt vom Kreis abwickele (Abb. 8). Die so erhaltene „Kreisevolvente“ läuft in immer weiteren Windungen um den Kreis herum, ist also eine Spirale. Die Konstruktion ergibt anschaulich, daß die Kurve auf einer der beiden Kreistangenten senkrecht steht, die ich vom betrachteten Kurvenpunkt aus an den Kreis legen kann. Auch alle anderen Umläufe der Evolvente schneiden diese Tangente rechtwinklig; und zwar ist das zwischen zwei Umläufen liegende Tangentenstück von fester Länge, nämlich gleich dem Umfang des erzeugenden Kreises.

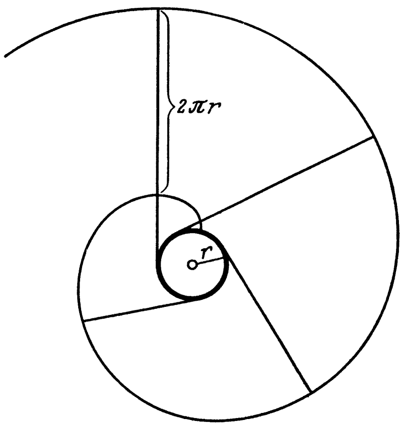

Abb. 8.

Ich kann nun noch beliebig viele weitere Evolventen desselben Kreises zeichnen, indem ich an einem anderen Peripheriepunkt mit der Abwickelung des Fadens beginne; die Gesamtheit dieser Evolventen kann aber auch durch Rotation um den Kreismittelpunkt aus einer von ihnen erzeugt werden. Die Schar der Evolventen bedeckt die Ebene mit Ausnahme des Kreisinneren einfach und lückenlos. Sie ist orthogonal zur Schar der in einem bestimmten Umlaufsinn gezogenen Kreishalbtangenten.

Auch bei einer beliebig vorgegebenen Schar gerader Linien besteht die Orthogonalschar stets aus Evolventen. Ihre erzeugende Kurve ist diejenige, die (wie in unserm Beispiel der Kreis) von den gegebenen Geraden eingehüllt wird. Wir kommen darauf in der Differentialgeometrie (S. 158) und in der Kinematik (S. 243, 244) zurück.

§ 2. Zylinder, Kegel, Kegelschnitte und deren Rotationsflächen.

Die einfachste krumme Fläche, den Kreiszylinder, kann ich aus den einfachsten Kurven — Kreis und Gerade — dadurch erzeugen, daß ich eine auf der Kreisebene senkrechte Gerade längs der Kreisperipherie verschiebe. Ferner erhalte ich den Kreiszylinder, wenn ich eine Gerade um eine zu ihr parallele Gerade als Achse rotieren lasse. Der Kreiszylinder ist also eine *Rotationsfläche*. Die Rotationsflächen sind eine wichtige Gattung von Flächen, die uns im praktischen Leben in jedem Glas, jeder Flasche usw. entgegentreten. Sie sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß man sie durch Rotation einer ebenen Kurve um eine in der Kurvenebene liegende Achse erzeugen kann.

Eine zur Achse senkrechte Ebene schneidet den Kreiszylinder in einem Kreis. Eine zur Achse schräge Ebene ergibt, wie die Anschauung lehrt, eine ellipsenähnliche Schnittkurve. Ich beweise nun, daß diese Kurve tatsächlich eine Ellipse ist. Ich nehme eine Kugel, die gerade in den Zylinder hineinpaßt, und verschiebe sie, bis sie die Schnittebene berührt (Abb. 9). Genau so verfahre ich mit einer zweiten Kugel auf der anderen Seite der Schnittebene. Die Kugeln berühren den Zylinder in zwei Kreisen und die Ebene in zwei Punkten F_1 und F_2. Einen beliebigen Punkt B der Schnittkurve verbinde ich nun mit F_1 und F_2 und betrachte die Zylindergerade durch B, die die beiden Berührungskreise der Kugeln in P_1 und P_2 schneiden möge. BF_1 und BP_1 sind nun Tangenten an eine und dieselbe Kugel durch einen festen Punkt B. Alle solche Tangenten sind gleich lang, wie aus der allseitigen Rotationssymmetrie der Kugel ersichtlich. Also ist $BF_1 = BP_1$. Ebenso folgt $BF_2 = BP_2$. Daher ist

$$BF_1 + BF_2 = BP_1 + BP_2 = P_1P_2.$$

Die Entfernung P_1P_2 ist aber unabhängig von der Wahl des Kurvenpunktes B wegen der Rotationssymmetrie der Figur. Alle Punkte der Schnittkurve haben also von F_1 und F_2 dieselbe Entfernungssumme, das heißt, die Schnittkurve ist eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2.

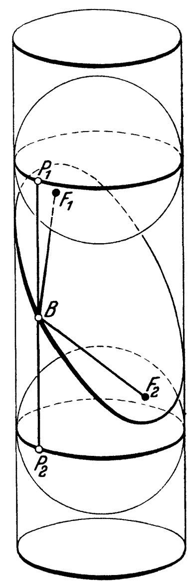

Abb. 9.

Wir können diese Tatsache auch als Satz der Projektionslehre formulieren: Der Schatten eines Kreises auf einer zur Kreisebene geneigten Ebene ist eine Ellipse, wenn die Lichtstrahlen senkrecht zur Kreisebene einfallen.

Nächst dem Kreiszylinder ist die einfachste Rotationsfläche der Kreiskegel. Er entsteht durch Rotation einer Geraden um eine sie schneidende Achse. Einen Kreiskegel bilden daher auch alle Tangenten von einem festen Punkt an eine feste Kugel oder die Projektionsstrahlen durch einen Kreis von einem Punkt der Kreisachse aus.

Eine zur Kegelachse senkrechte Ebene schneidet den Kegel in einem Kreis; wenn ich die Ebene etwas neige, ergibt sich als Schnittkurve eine Ellipse. Der Beweis dafür wird genau wie beim Kreiszylinder mittels zweier berührenden Hilfskugeln geführt.

Neige ich die Schnittebene immer weiter gegen die Achse, so wird die Ellipse immer langgestreckter. Ist die Schnittebene schließlich einer Kegelerzeugenden parallel, so kann die Schnittkurve nicht mehr im Endlichen geschlossen sein. Ein dem früheren entsprechender Grenzübergang lehrt, daß dann die Schnittkurve eine Parabel ist.

Neige ich jetzt die Schnittebene noch stärker, so trifft sie auch den anderen, bisher nicht getroffenen Teil des Kegels; die Schnittkurve hat das Aussehen einer Hyperbel (Abb. 10). Um zu beweisen, daß sie wirklich eine Hyperbel ist, legt man in die beiden Teile des Kegels die Kugeln, die sowohl den Kegel als auch die Schnittebene berühren. (Die Kugeln liegen diesmal auf derselben Seite der Schnittebene, während sie im Fall der Ellipse zu verschiedenen Seiten liegen.) Der Beweis verläuft nun entsprechend wie S. 7. Es ist (Abb. 10)

$$BF_1 = BP_1, \quad BF_2 = BP_2,$$

$$BF_1 - BF_2 = BP_1 - BP_2$$
$$= P_1 P_2 = \text{const.}$$

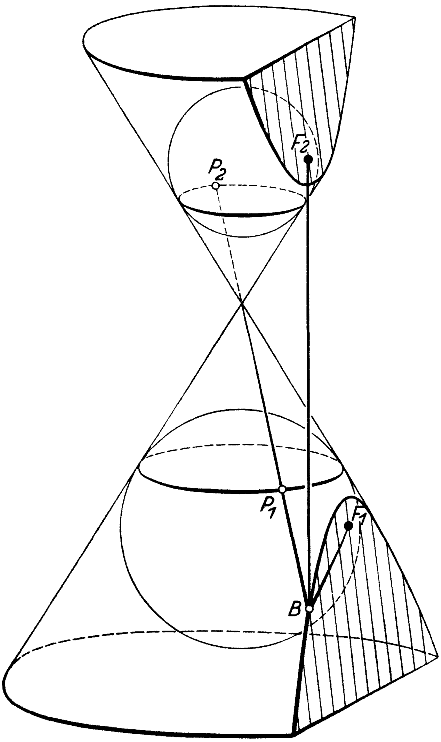

Abb. 10.

Wir haben also gefunden, daß jeder Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, die nicht durch die Spitze des Kegels geht, entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel ist[1]. Diese Kurven haben demnach eine innere Verwandtschaft und werden deshalb unter dem Namen *Kegelschnitte* zusammengefaßt[2]. Zu den drei erwähnten „eigentlichen" Kegelschnitten sind als „uneigentliche" noch deren Grenzfälle hinzuzunehmen, die man erhält, wenn man die Schnittebene durch die Kegelspitze legt oder den Kegel zum Zylinder ausarten läßt. Als entartete Kegelschnitte lassen sich also auffassen: der Punkt, eine „doppeltgezählte" Gerade, zwei sich schneidende Geraden, zwei parallele Geraden und die leere Ebene. Die Kegelschnitte werden auch als *Kurven zweiter Ordnung* bezeichnet. Dieser Name ist ihnen deswegen gegeben worden, weil sie in cartesischen Koordinaten durch Gleichungen

[1] Der Kreis ist als ein Grenzfall der Ellipse aufzufassen (vgl. S. 2).

[2] Der Schatten eines Kreises auf einer beliebigen Ebene ist also ein Kegelschnitt, falls die Lichtquelle sich in einem beliebigen Punkt der Kreisachse befindet. Daß dabei auch Hyperbeln auftreten, kann man an dem Lichtkegel einer Autolampe erkennen; diese beleuchtet in der Fahrtebene das Innere eines Hyperbelzweiges. Da jede Hyperbeltangente als Schatten einer Kreistangente aufgefaßt werden kann, hat die Hyperbeltangente nur den Berührungspunkt mit der Hyperbel gemein, wie S. 3 behauptet war.

zweiten Grades dargestellt werden, eine Eigenschaft, die sich nicht unmittelbar anschaulich formulieren läßt. Sie hat allerdings die anschauliche Folge, daß die Kegelschnitte von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden; es gibt aber noch viele andere Kurven mit dieser Eigenschaft. In den Anhängen dieses Kapitels sollen zwei weitere geometrische Erscheinungen dargestellt werden, die ebenso wie die Brennpunktskonstruktion für alle nicht ausgearteten Kegelschnitte kennzeichnend sind: Die Fußpunktkonstruktionen und die Eigenschaften der Leitlinien.

Nachdem wir durch Rotation einer Geraden den Zylinder und den Kegel erzeugt haben, liegt es nahe, die Rotationsflächen zu betrachten, die durch Rotation eines Kegelschnittes entstehen. Ich werde dabei die Rotationsachse so wählen, daß der Kegelschnitt zu ihr symmetrisch liegt; dann gehen nämlich die zu beiden Seiten der Achse liegenden Kurventeile nach einer halben Umdrehung ineinander über, so daß ich nur eine einzige Fläche erhalte, während sonst ein komplizierteres Gebilde entstände.

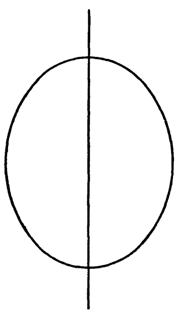

Abb. 11.

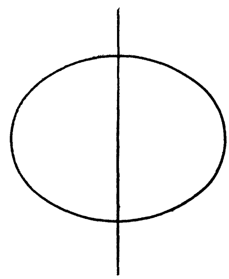

Abb. 12.

Da die Ellipse zwei Symmetrieachsen besitzt, führt sie zu zwei verschiedenen Rotationsflächen; je nachdem die Ellipse um die größere oder die kleinere Achse rotiert, erhalte ich ein verlängertes (Abb. 11) oder ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (Abb. 12). Für die letzte Fläche ist die Erde ein geläufiges Beispiel, für die erste näherungsweise das Hühnerei.

Der Übergangsfall zwischen den beiden Rotationsellipsoiden entsteht, wenn man den Längenunterschied zwischen den Achsen der Ellipse immer kleiner werden läßt. Dann wird aus der Ellipse ein Kreis, und man erhält die Kugel. Da der Kreis zu jedem seiner Durchmesser symmetrisch liegt, läßt sich die Kugel auf unendlich viele Arten durch Rotation erzeugen. Durch diese Eigenschaft ist die Kugel gekennzeichnet. Sie ist die einzige Fläche, die auf mehr als eine Art durch Rotation erzeugt werden kann.

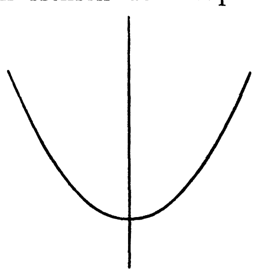

Abb. 13.

Die Parabel hat nur eine einzige Symmetrieachse und führt daher zu einer einzigen Rotationsfläche, dem Rotationsparaboloid (Abb. 13).

Die Hyperbel dagegen führt zu zwei verschiedenen Rotationsflächen. Je nachdem die Rotation um die Verbindungslinie der Brennpunkte oder um deren Mittelsenkrechte erfolgt, erhalte ich das zweischalige (Abb. 14) oder das einschalige Rotationshyperboloid (Abb. 15). Es besteht nun die überraschende Tatsache, daß auf dem einschaligen Rotationshyperboloid unendlich viele Geraden verlaufen. Man kann nämlich diese Fläche auch dadurch erzeugen, daß man eine Gerade um eine andere zu ihr windschiefe Gerade rotieren läßt (bisher hatten wir nur Rotationsflächen kennengelernt, deren Achse mit der erzeugenden Kurve in einer Ebene liegt). Der Beweis kann nur analytisch geführt werden. Man erkennt aber anschaulich, daß diese Konstruktion die Fläche auf zwei Weisen liefert; denn betrachtet man eine Gerade g' (Abb. 16), welche zur ursprünglichen Erzeugenden g symmetrisch in bezug auf eine Ebene durch die Achse a liegt, so muß die neue Gerade g' durch Rotation wieder dieselbe Fläche erzeugen wie g.

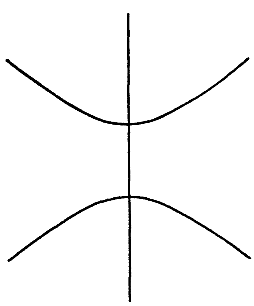

Abb. 14.

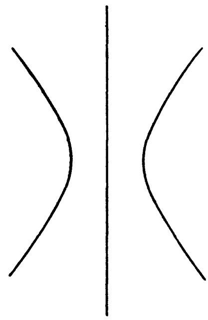

Abb. 15.

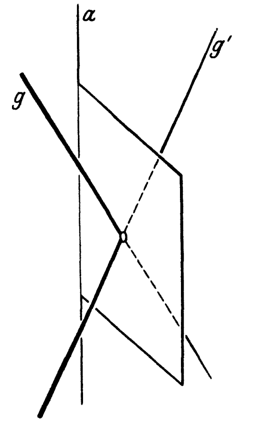

Abb. 16.

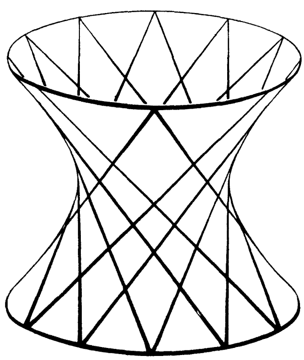

Abb. 17.

Demnach enthält das einschalige Rotationshyperboloid zwei Scharen von Geraden, von denen jede Schar für sich die Fläche ganz bedeckt, und welche so angeordnet sind, daß jede Gerade der einen Schar jede der anderen schneidet (bzw. ihr parallel ist), während zwei Geraden derselben Schar stets zueinander windschief verlaufen (Abb. 17).

§ 3. Die Flächen zweiter Ordnung.

Die Flächen, die durch Rotation der Kegelschnitte entstehen, sind besondere Typen einer größeren Klasse von Flächen, die aus analy-