oder um deren Mittelsenkrechte erfolgt, erhalte ich das zweischalige (Abb. 14) oder das einschalige Rotationshyperboloid (Abb. 15). Es besteht nun die überraschende Tatsache, daß auf dem einschaligen Rotationshyperboloid unendlich viele Geraden verlaufen. Man kann nämlich diese Fläche auch dadurch erzeugen, daß man eine Gerade um eine andere zu ihr windschiefe Gerade rotieren läßt (bisher hatten wir nur Rotationsflächen kennengelernt, deren Achse mit der erzeugenden Kurve in einer Ebene liegt). Der Beweis kann nur analytisch geführt werden. Man erkennt aber anschaulich, daß diese Konstruktion die Fläche auf zwei Weisen liefert; denn betrachtet man eine Gerade g' (Abb. 16), welche zur ursprünglichen Erzeugenden g symmetrisch in bezug auf eine Ebene durch die Achse a liegt, so muß die neue Gerade g' durch Rotation wieder dieselbe Fläche erzeugen wie g.

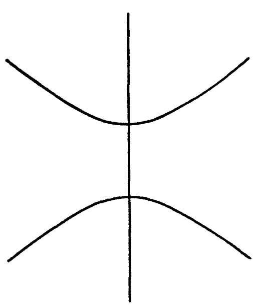
Abb. 14.

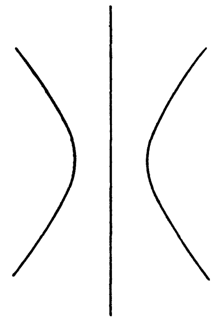
Abb. 15.

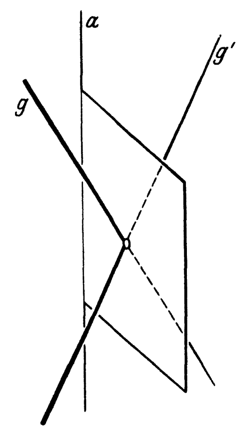

Abb. 16.

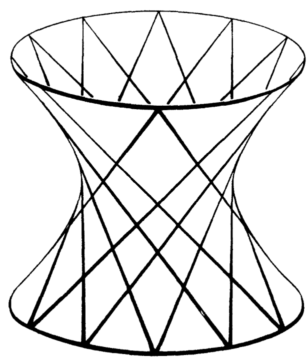
Abb. 17.

Demnach enthält das einschalige Rotationshyperboloid zwei Scharen von Geraden, von denen jede Schar für sich die Fläche ganz bedeckt, und welche so angeordnet sind, daß jede Gerade der einen Schar jede der anderen schneidet (bzw. ihr parallel ist), während zwei Geraden derselben Schar stets zueinander windschief verlaufen (Abb. 17).

§ 3. Die Flächen zweiter Ordnung.

Die Flächen, die durch Rotation der Kegelschnitte entstehen, sind besondere Typen einer größeren Klasse von Flächen, die aus analytischen Gründen Flächen zweiter Ordnung genannt werden; es sind die Flächen, deren Punkte in cartesischen Raumkoordinaten eine Gleichung zweiten Grades erfüllen. Wie sich daraus leicht analytisch ergibt, haben diese Flächen die Eigenschaft, von jeder Ebene in einer Kurve zweiter Ordnung, das heißt einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Kegelschnitt getroffen zu werden. Wenn ich ferner von irgendeinem Punkt aus an eine Fläche zweiter Ordnung alle Tangenten lege, so erhalte ich einen Kegel, der von jeder Ebene in einem Kegelschnitt getroffen wird. Der Kegel berührt überdies die Fläche in Punkten eines Kegelschnittes. Die Flächen zweiter Ordnung sind zugleich die einzigen, die eine dieser Eigenschaften haben[1]. Wir betrachten jetzt ihre verschiedenen Typen.

Aus dem Kreiszylinder entsteht durch Verallgemeinerung der elliptische Zylinder. Er wird durch eine Gerade beschrieben, die ich auf einer

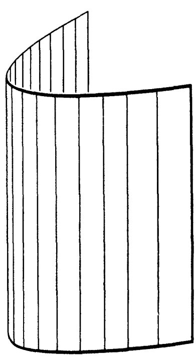

Abb. 18.

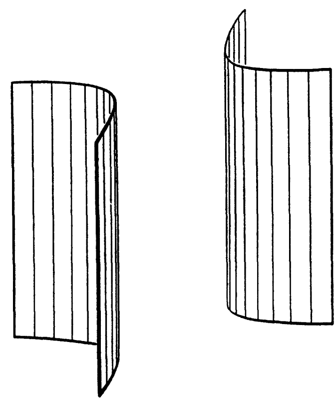

Abb. 19.

Ellipse senkrecht zur Kurvenebene wandern lasse. Auf dieselbe Weise ergeben sich aus der Parabel und Hyperbel der parabolische und der hyperbolische Zylinder (Abb. 18, 19).

Die entsprechende Verallgemeinerung des Kreiskegels ist der allgemeine Kegel zweiter Ordnung. Er besteht aus den Verbindungsgeraden eines beliebigen eigentlichen Kegelschnittes mit einem Punkt außerhalb der Kurvenebene. Es ist zu beachten, daß man hier nicht, wie bei den Zylindern, zu verschiedenen Flächentypen kommt, wenn man von einer Ellipse oder einer Parabel oder Hyperbel ausgeht; wie wir gesehen haben, kann eben eine veränderliche Ebene mit einem festen Kegel jeden der drei Kegelschnitte gemein haben, mit einem festen Zylinder dagegen nicht.

[1] Aus der zuerst genannten Eigenschaft folgt, daß eine Gerade, wenn sie nicht eine ganze Strecke lang in die Fläche fällt, höchstens zwei Punkte mit ihr gemein haben kann; doch gibt es außer den Flächen zweiter Ordnung noch viele andere Flächen, die dasselbe Verhalten den Geraden gegenüber zeigen, z. B. die Oberfläche eines Würfels.

Den Kegel und den elliptischen Zylinder kann ich aus den entsprechenden Rotationsflächen auch durch ein Deformationsverfahren erhalten, das man *Dilatation* nennt. Ich halte alle Punkte einer beliebigen durch die Rotationsachse der Fläche gehenden Ebene fest und denke mir alle übrigen Punkte des Raumes in derselben Richtung auf die feste Ebene zu oder von ihr weg bewegt, derart, daß die Abstände aller Punkte von der festen Ebene sich im selben Verhältnis ändern. Man kann beweisen, daß eine solche Transformation alle Kreise in Ellipsen (oder Kreise) verwandelt. Sie führt ferner Geraden wieder in Geraden über, Ebenen in Ebenen[1] und Kurven und Flächen zweiter Ordnung in ebensolche.

Durch Dilatation eines (verlängerten oder abgeplatteten) Rotationsellipsoids entsteht das allgemeinste Ellipsoid. Während die Rotationsellipsoide symmetrisch zu jeder Ebene durch die Achse liegen, besitzt das allgemeinste Ellipsoid nur drei Symmetrieebenen. Diese stehen aufeinander senkrecht; aus ihren drei Schnittgeraden schneidet die Fläche Strecken ungleicher Länge aus; man nennt sie die „große", „mittlere" und „kleine" Achse des Ellipsoids (Abb. 20). Aus dem dreiachsigen Ellipsoid erhält man das abgeplattete und das verlängerte Rotationsellipsoid zurück, indem man durch Dilatation große und mittlere bzw. mittlere und kleine Achse einander gleich macht.

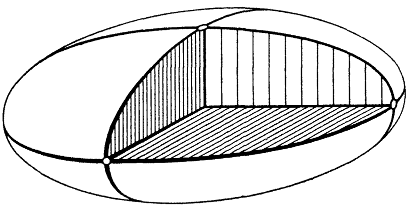

Abb. 20.

Die Form dreiachsiger Ellipsoide bemerkt man oft bei Steinen in der Meeresbrandung. Durch die abschleifende Arbeit des Wassers wird jeder beliebig geformte Stein allmählich immer mehr einem Ellipsoid ähnlich. Die mathematische Untersuchung dieser Erscheinung führt auf Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das ein- und zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid sind die allgemeinsten Flächen, die durch Dilatation der Rotationshyperboloide und des Rotationsparaboloids entstehen. Die beiden Hyperboloide besitzen drei Symmetrieebenen, das elliptische Paraboloid zwei.

Da jede Dilatation Geraden in Geraden überführt, hat das allgemeine einschalige Hyperboloid mit der zugehörigen Rotationsfläche die Eigenschaft gemeinsam, daß auf ihm zwei Scharen von Geraden verlaufen. Sie sind wie die Geraden des einschaligen Rotationshyperboloids derart angeordnet, daß jede Gerade der einen Schar jede der anderen schneidet,

[1] Die Gestaltänderung, die die Figuren einer Ebene bei einer Dilatation erleiden, ist dieselbe wie bei einer Parallelprojektion dieser Ebene auf eine gegen sie geneigte Ebene.

während je zwei Geraden derselben Schar sich nicht treffen, sondern zueinander windschief sind. Ich kann daher das einschalige Hyperboloid folgendermaßen konstruieren: Ich greife aus der einen Schar drei beliebige Geraden heraus (Abb. 21). Da sie zueinander windschief liegen, kann ich durch jeden Punkt P der einen Geraden eine und nur eine Gerade p legen, welche die beiden anderen Geraden trifft, nämlich die Schnittgerade der Ebenen, die durch P und die zweite Gerade bzw. durch P und die dritte Gerade gehen. p hat mit dem Hyperboloid drei Punkte gemein, muß also ganz in ihm verlaufen, da das Hyperboloid als Fläche zweiter Ordnung von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. Lasse ich nun P die ganze erste Gerade durchlaufen, so durchläuft die zugehörige Gerade p alle Geraden derjenigen Schar auf der Fläche, zu der die erste Gerade nicht gehört; greife ich dann aus dieser Schar wieder drei beliebige Geraden heraus, so erhalte ich aus diesen in derselben Weise die andere Schar, darunter natürlich die drei Ausgangsgeraden. Die Konstruktion ergibt, daß alle Geraden derselben Schar zueinander windschief liegen; denn hätten p und p' (Abb. 21) einen Schnittpunkt Q, so lägen die Ausgangsgeraden in der Ebene $PP'Q$, während sie nach Voraussetzung windschief sind.

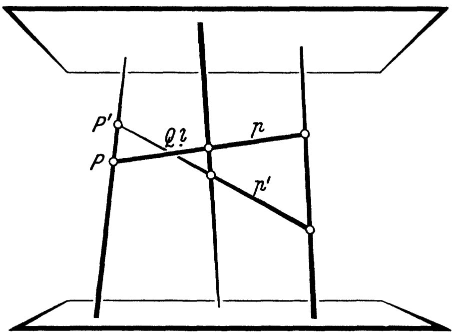

Abb. 21.

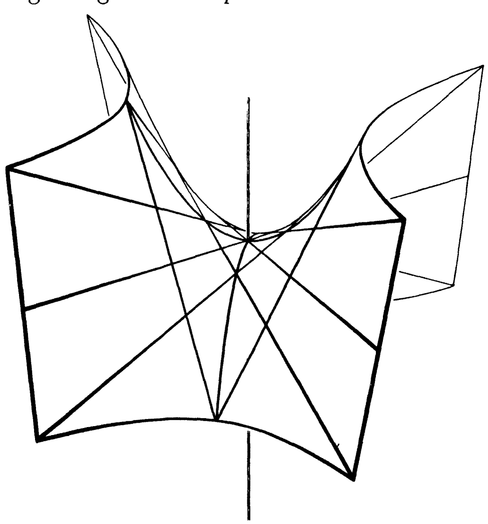
Abb. 22.

Drei windschiefe Geraden bestimmen auf diese Weise stets ein einschaliges Hyperboloid, außer in dem Fall, daß sie einer und derselben Ebene parallel sind (ohne selbst parallel zu sein). In diesem Fall bestimmen sie eine neue Fläche zweiten Grades, die nicht zu einer Rotationsfläche spezialisiert werden kann; sie wird hyperbolisches Paraboloid genannt. Die Fläche hat ungefähr die Gestalt eines Sattels (Abb. 22).

Sie besitzt zwei zueinander senkrechte Symmetrieebenen, von denen sie in Parabeln geschnitten wird. Wie die drei Ausgangsgeraden sind sämtliche Geraden beider Scharen je einer festen Ebene parallel. Die Anschauung zeigt, daß diese Fläche von keiner Ebene in einer Ellipse geschnitten werden kann, da sich jeder ebene Schnitt ins Unendliche erstrecken muß. Aus diesem Grunde ist es unmöglich, das hyperbolische Paraboloid durch Dilatation einer Rotationsfläche herzustellen; denn auf jeder Rotationsfläche liegen Kreise, und diese würden bei der Dilatation in Ellipsen übergehen.

Wir haben hier ein neues Prinzip der Erzeugung von Flächen kennengelernt: Man legt für eine bewegliche Gerade irgendeine Führung im

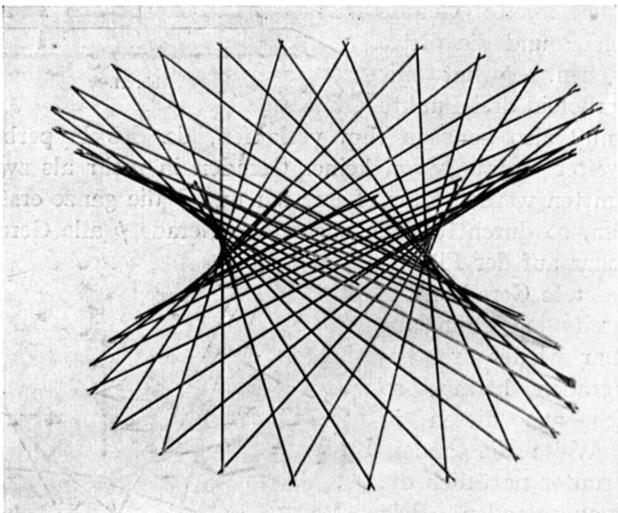

Abb. 23 a.

Raum fest und läßt sie über diese Führung hinwandern. Eine so erzeugte Fläche nennt man eine *Regelfläche*. Unter den neun Flächen zweiter Ordnung gibt es also sechs Regelflächen, nämlich die drei Zylinder, den Kegel, das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid; die beiden letztgenannten Flächen haben eine Sonderstellung, es sind nämlich die einzigen Regelflächen außer der Ebene, bei denen mehr als eine Gerade durch jeden Flächenpunkt hindurchgeht.

Die drei übrigen Flächen zweiter Ordnung — Ellipsoid, elliptisches Paraboloid und zweischaliges Hyperboloid — können schon deshalb keine Geraden enthalten, weil sie sich nicht ohne Unterbrechung in zwei entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche erstrecken.

Über die beiden Scharen von Geraden, die auf dem einschaligen Hyperboloid und auf dem hyperbolischen Paraboloid verlaufen, läßt sich ein überraschender Satz ableiten. Denken wir uns die Geraden der Fläche aus starrem Material und in jedem Schnittpunkt so aneinander befestigt, daß sie sich um die Schnittpunkte drehen, aber nicht aneinander gleiten können. Man sollte denken, daß die Geraden infolge dieser Befestigung ein starres Gerüst ergeben müßten. Tatsächlich ist aber das Gerüst beweglich (Abb. 23 a, b). Um die hierbei auftretende Gestaltänderung des Hyperboloids überblicken zu können, denken wir uns diejenige Symmetrieebene, die die Fläche in einer Ellipse trifft, horizontal festgehalten und suchen die Deformation des Gerüsts so auszuführen, daß diese Ebene stets Symmetrieebene bleibt. Da das Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid die einzigen Flächen sind, auf der durch jeden Punkt zwei in der Fläche enthaltene Geraden laufen, so muß das Stangenmodell des Hyperboloids bei der Deformation entweder stets ein Hyperboloid bleiben, oder ein hyperbolisches Paraboloid werden; es läßt sich zeigen, daß der letzte Fall nicht eintreten kann. Wir können nun versuchen, die Geraden des Gerüsts immer steiler gegen die Symmetrieebene aufzurichten. Dann erhalten wir immer stärker abgeplattete Flächen. Die Ellipse in der Symmetrieebene durchläuft das in § 1 geschilderte System konfokaler Ellipsen, die immer schmäler werden. Im Grenzfall klappt das Gerüst in einer senkrecht aufgestellten Ebene zusammen, und die Stangen werden die Tangenten einer in dieser Ebene gelegenen Hyperbel. Die Ellipse in der horizontalen Ebene entartet in eine Doppelstrecke. Ebenso können wir auch die Ausgangslage des Modells in der umgekehrten Weise verändern, indem wir die Stangen immer mehr gegen die Horizontalebene neigen. Dabei wird die Einschnürung der Fläche immer schärfer ausgeprägt; im Grenzfall klappt das Gerüst in der horizontalen Symmetrieebene zusammen, und die Stangen umhüllen eine in dieser Ebene gelegene Ellipse. Die analytische Begründung für die Beweglichkeit des Stangenmodells wird in einem Anhang dieses Kapitels nachgeholt. — Beim hyperbolischen Paraboloid ist der Vorgang analog. Das Gerüst behält stets die Gestalt

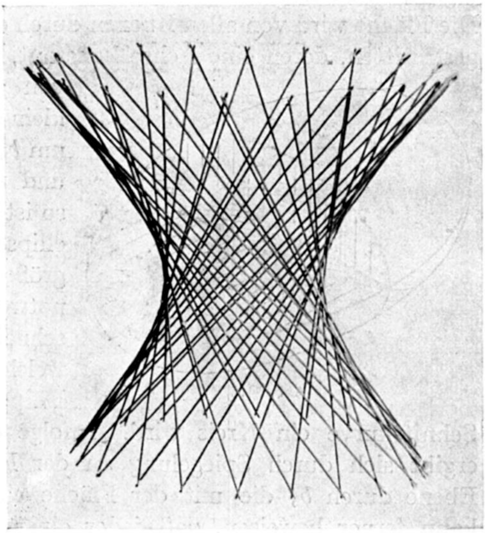

Abb. 23 b.

eines Paraboloids und klappt in beiden Grenzfällen in eine Ebene zusammen, in der die Geraden eine Parabel umhüllen.

Die Flächen zweiter Ordnung lassen sich noch unter einem neuen Gesichtspunkt in zwei Arten einteilen. Drei von ihnen, nämlich der hyperbolische und der parabolische Zylinder und das hyperbolische Paraboloid, werden durch keine Ebene in einem Kreise geschnitten, da sich auf diesen Flächen jeder ebene Schnitt ins Unendliche erstreckt. Auf den übrigen sechs Flächen dagegen liegen stets unendlich viele Kreise. Hiermit hängt es auch zusammen, daß diese Flächen sich im Gegensatz zu den drei erstgenannten zu Rotationsflächen spezialisieren lassen. Die Betrachtung, durch die sich die Existenz der Kreisschnitte ergibt, soll am dreiachsigen Ellipsoid durchgeführt werden (Abb. 24). Die Fläche wird von allen Ebenen durch die mittlere Achse b in Ellipsen geschnitten, deren eine Achse konstant, nämlich gleich b ist; gehe ich von der Ebene durch b und die kleine Achse c aus und drehe sie um b, bis sie in die Ebene durch b und die große Achse a übergeht, so ist die zweite Achse der Schnittellipse zuerst kleiner und zuletzt größer als b. Dazwischen muß es notwendig einmal eine Lage der schneidenden Ebene geben, für welche die beiden Achsen der Ellipse gleich lang sind, wo also die Schnittkurve ein Kreis wird. Infolge der Symmetrie des Ellipsoids ergibt sich durch Spiegelung an der Ebene (b, c) noch eine zweite Ebene durch b, die mit der Fläche einen Kreisschnitt bildet. Man kann ferner beweisen, daß jeder einem Kreisschnitt parallele ebene Schnitt des Ellipsoids wieder ein Kreisschnitt ist. Somit gibt es auf jedem Ellipsoid zwei Scharen paralleler Kreise (Abb. 25); beim Rotationsellipsoid fallen beide Scharen in eine zusammen.

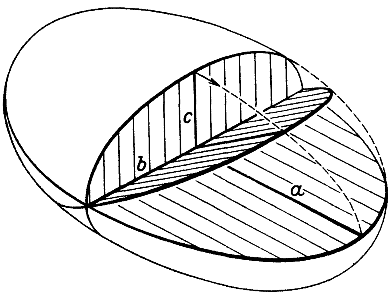

Abb. 24.

Wie für das Ellipsoid läßt sich auch für die anderen Flächen zweiter Ordnung, die geschlossene ebene Schnitte besitzen, eine derartige Überlegung durchführen.

Für die beiden Scharen von Kreisschnitten gilt ein entsprechender Satz wie für die Geraden auf dem Hyperboloid. Werden alle Kreise in ihren Schnittpunkten so aneinander befestigt, daß sie, ohne gleiten zu können, umeinander drehbar sind, so erhält man kein starres, sondern ein bewegliches Gerüst (Abb. 25 a, b; Kreisscheiben aus Pappe, die in geeigneter Weise geschlitzt und ineinandergesteckt sind. Der Leser wird einsehen, daß dieses Modell nur unwesentlich in seiner Struktur von unserer Behauptung abweicht). Bei der Gestaltänderung des beweglichen Kreisschnittmodells entstehen andersgeartete Flächen-scharen als bei den Stangenmodellen; die in den Symmetrieebenen liegenden Kegelschnitte durchlaufen im allgemeinen kein konfokales System. So läßt sich das bewegliche Kreisschnittmodell eines dreiachsigen Ellipsoides stets in Kugelgestalt bringen; in diesem Fall ist der Schnitt mit jeder Symmetrieebene ein Kreis, während in einer Schar konfokaler Ellipsen nie eine Ellipse in einen Kreis ausartet. Wie beim Stangenmodell reicht die Beweglichkeit auch beim Kreisschnittmodell so weit, daß man das Modell in eine Ebene zusammenklappen kann.

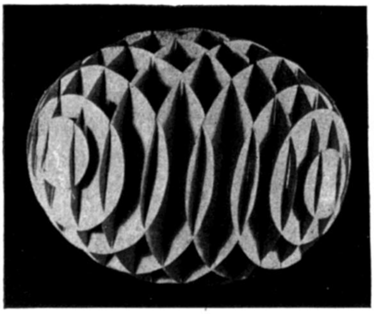

Abb. 25 a.

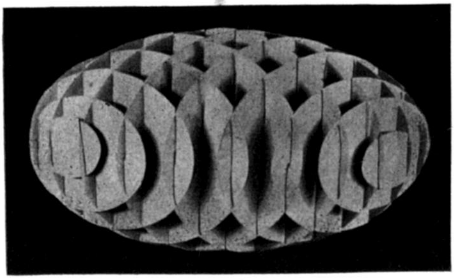

Abb. 25 b.

Die beiden Arten von Modellen sind trotz ihrer großen Verschiedenheit durch einen Übergangsfall miteinander verknüpft. Das bewegliche Stangenmodell des hyperbolischen Paraboloids läßt sich nämlich zugleich als Grenzfall eines Kreisschnittmodells auffassen, bei dem die Kreise unendlich großen Radius erhalten haben, d. h. zu Geraden geworden sind. Wenn man eine Schar von einschaligen Hyperboloiden hat, die einem hyperbolischen Paraboloid immer ähnlicher werden, so gehen sowohl die Kreise als auch die Geraden der Hyperboloide beide in das Geradensystem des Paraboloids über.

§ 4. Fadenkonstruktion des Ellipsoids und konfokale Flächen zweiter Ordnung.

Da die Flächen zweiter Ordnung im Raum eine analoge Rolle spielen wie die Kegelschnitte in der Ebene, so liegt die Frage nahe, ob man nicht die Fadenkonstruktion der Ellipse auf diese Flächen übertragen kann. Diese Frage wurde für das Ellipsoid im Jahre 1882 von STAUDE durch seine Fadenkonstruktion des Ellipsoids gelöst. Bei dieser Konstruktion (Abb. 26) geht man von einem festen Gerüst aus, das aus einer Ellipse und einer Hyperbel besteht. Die Ebene der Hyperbel steht senkrecht auf der Ebene der Ellipse und enthält deren große Achse. Die Hyperbel hat die Brennpunkte F_1F_2 der Ellipse zu Scheiteln und deren Scheitel S_1S_2 zu Brennpunkten; durch diese Angaben ist die Hyperbel eindeutig bestimmt.