scharen als bei den Stangenmodellen; die in den Symmetrieebenen liegenden Kegelschnitte durchlaufen im allgemeinen kein konfokales System. So läßt sich das bewegliche Kreisschnittmodell eines dreiachsigen Ellipsoides stets in Kugelgestalt bringen; in diesem Fall ist der Schnitt mit jeder Symmetrieebene ein Kreis, während in einer Schar konfokaler Ellipsen nie eine Ellipse in einen Kreis ausartet. Wie beim Stangenmodell reicht die Beweglichkeit auch beim Kreisschnittmodell so weit, daß man das Modell in eine Ebene zusammenklappen kann.

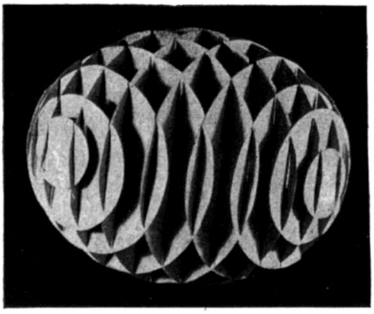

Abb. 25 a.

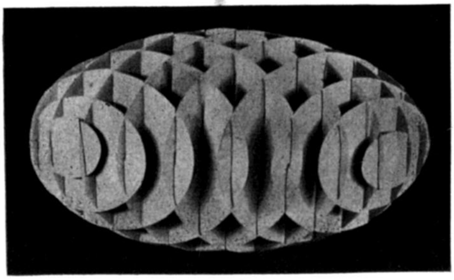

Abb. 25 b.

Die beiden Arten von Modellen sind trotz ihrer großen Verschiedenheit durch einen Übergangsfall miteinander verknüpft. Das bewegliche Stangenmodell des hyperbolischen Paraboloids läßt sich nämlich zugleich als Grenzfall eines Kreisschnittmodells auffassen, bei dem die Kreise unendlich großen Radius erhalten haben, d. h. zu Geraden geworden sind. Wenn man eine Schar von einschaligen Hyperboloiden hat, die einem hyperbolischen Paraboloid immer ähnlicher werden, so gehen sowohl die Kreise als auch die Geraden der Hyperboloide beide in das Geradensystem des Paraboloids über.

§ 4. Fadenkonstruktion des Ellipsoids und konfokale Flächen zweiter Ordnung.

Da die Flächen zweiter Ordnung im Raum eine analoge Rolle spielen wie die Kegelschnitte in der Ebene, so liegt die Frage nahe, ob man nicht die Fadenkonstruktion der Ellipse auf diese Flächen übertragen kann. Diese Frage wurde für das Ellipsoid im Jahre 1882 von Staude durch seine Fadenkonstruktion des Ellipsoids gelöst. Bei dieser Konstruktion (Abb. 26) geht man von einem festen Gerüst aus, das aus einer Ellipse und einer Hyperbel besteht. Die Ebene der Hyperbel steht senkrecht auf der Ebene der Ellipse und enthält deren große Achse. Die Hyperbel hat die Brennpunkte F_1F_2 der Ellipse zu Scheiteln und deren Scheitel S_1S_2 zu Brennpunkten; durch diese Angaben ist die Hyperbel eindeutig bestimmt.

Man befestigt nun an dem einen Scheitel der Ellipse, z. B. S_1, einen Faden, legt ihn zuerst von hinten um den nächstliegenden Ast der Hyperbel, dann von vorn über die Ellipse und befestigt das andere Ende des Fadens in F_2. Wird jetzt das zwischen der Ellipse und der Hyperbel befindliche Fadenstück in B straffgezogen, so erhält der Faden die Form des gebrochenen Streckenzuges S_1HBEF_2; dabei ist das Stück BHS_1 die kürzeste Linie, die von B über einen Punkt der Hyperbel nach S_1 läuft, und das Stück BEF_2 hat eine entsprechende Eigenschaft. *Läßt man nun den Punkt B seine Lage so verändern, daß der Faden immer gespannt bleibt, so wandert B auf einem Ellipsoid.* In der Anordnung von Abb. 26 durchläuft B im ganzen das vordere untere Viertel der Fläche; die übrigen Viertel ergeben sich je nach der Art, wie der Faden zwischen S_1 und F_2 um die Ellipse und die Hyperbel herumgeschlungen wird[1].

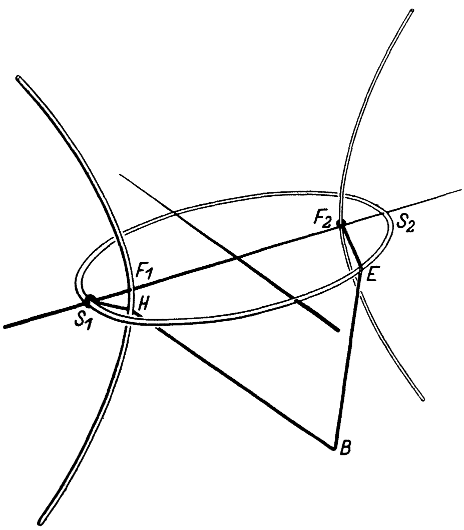

Abb. 26.

Das Gerüst der beiden Kegelschnitte spielt bei der Konstruktion des Ellipsoids eine analoge Rolle wie die Brennpunkte bei der Ellipse, man spricht von den Fokalkurven (Fokalellipse und Fokalhyperbel) des Ellipsoids. Allgemein sagt man von einer Fläche zweiter Ordnung, daß sie diese beiden Kegelschnitte zu Fokalkurven hat, wenn deren Ebenen Symmetrieebenen der Fläche sind und von der Fläche in Kegelschnitten durchsetzt werden, die mit den Fokalkurven konfokal liegen.

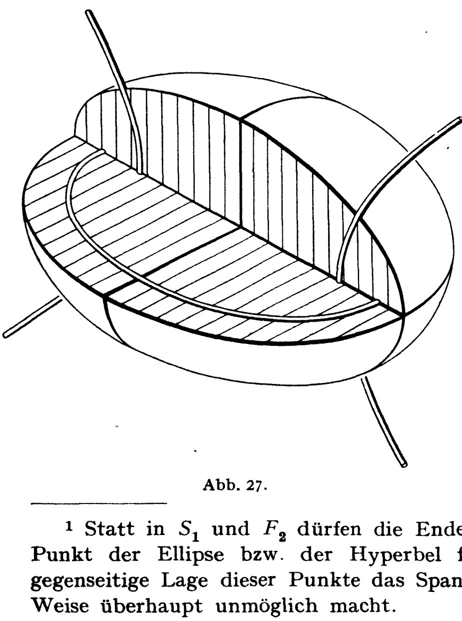
Abb. 27.

[1] Statt in S_1 und F_2 dürfen die Enden des Fadens auch in jedem anderen Punkt der Ellipse bzw. der Hyperbel festgemacht werden, außer wenn die gegenseitige Lage dieser Punkte das Spannen des Fadens in der beschriebenen Weise überhaupt unmöglich macht.

Da jeder dieser beiden Schnitte eine Ellipse oder Hyperbel sein muß, kommen vier Fälle in Betracht. Sind beide Schnitte Ellipsen, so haben wir ein Ellipsoid (Abb. 27); sind sie beide Hyperbeln, so ergibt sich ein zweischaliges Hyperboloid (Abb. 28). Wird die Ebene der Fokalhyperbel in einer Hyperbel, die Ebene der Fokalellipse in einer Ellipse geschnitten, so ist die Fläche ein einschaliges Hyperboloid (Abb. 29). Der vierte Fall — Ellipse in der Ebene der Fokalhyperbel und Hyperbel in der Ebene der Fokalellipse — scheidet aus. Denn die Ellipse und die Hyperbel müßten dann die Gerade F_1F_2 (Abb. 30) in vier verschiedenen Punkten $E_1E_2H_1H_2$ treffen, die Ebene der Fokalhyperbel hätte also mit der Fläche eine Ellipse und zwei nicht auf dieser gelegene Punkte H_1H_2 gemein, was der Definition der Fläche zweiter Ordnung widerspricht.

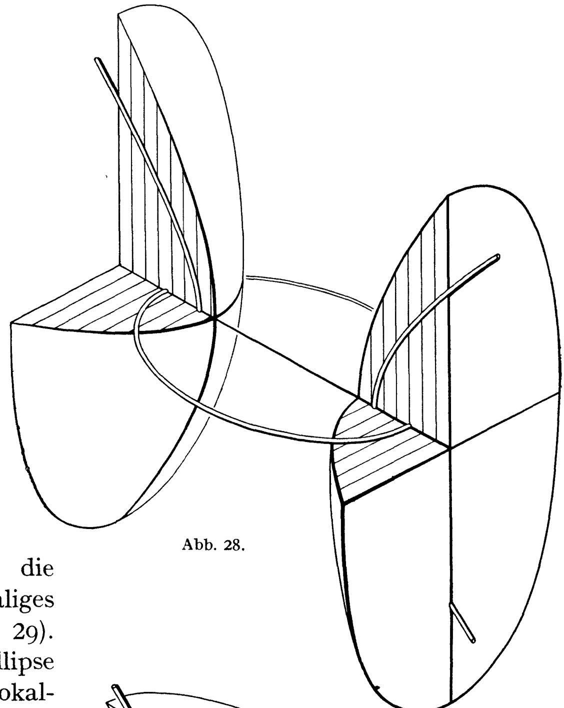

Abb. 28.

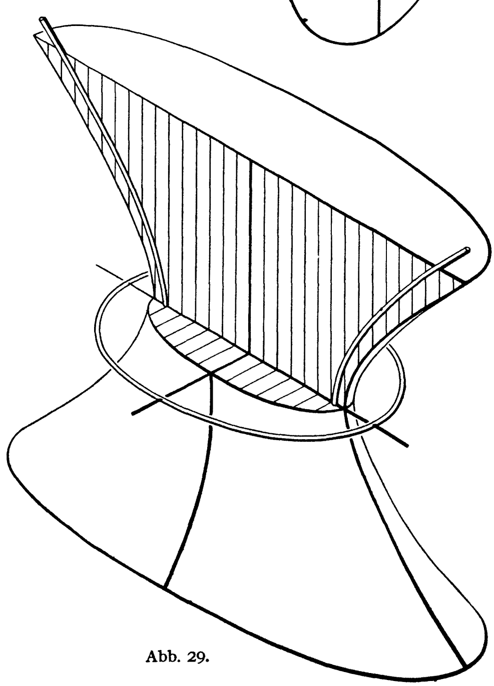

Abb. 29.

Führt man die Fadenkonstruktion des Ellipsoids mit Fäden verschiedener Länge bei festgehaltenen Fokalkurven durch, so erhält man eine Schar

„konfokaler“ Ellipsoide (d. h. mit gemeinsamen Fokalkurven), die in ihrer Gesamtheit den Raum einfach und lückenlos überdecken. Auch die Scharen der zweischaligen und der einschaligen Hyperboloide, die zu diesen Fokalkurven gehören, überdecken jede für sich den Raum einfach und lückenlos; durch jeden Raumpunkt geht also ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid hindurch (Abb. 31). Genau so nun, wie in der Ebene die konfokalen Kegelschnitte, durchschneiden sich im Raum die konfokalen Flächen zweiter Ordnung rechtwinklig, d. h. in jedem Raumpunkt stehen die Tangentialebenen der drei hindurchgehenden Flächen aufeinander senkrecht[1]. Solche dreifach orthogonalen Flächensysteme und vor allem die konfokalen Flächen zweiter Ordnung spielen bei zahlreichen mathematischen und physikalischen Betrachtungen eine Rolle; die Anwendung der „elliptischen Koordinaten“, zu denen man bei der analytischen Darstellung dieser Flächen geführt wird, erweist sich für die Behandlung vieler, auch astronomischer Probleme als zweckmäßig.

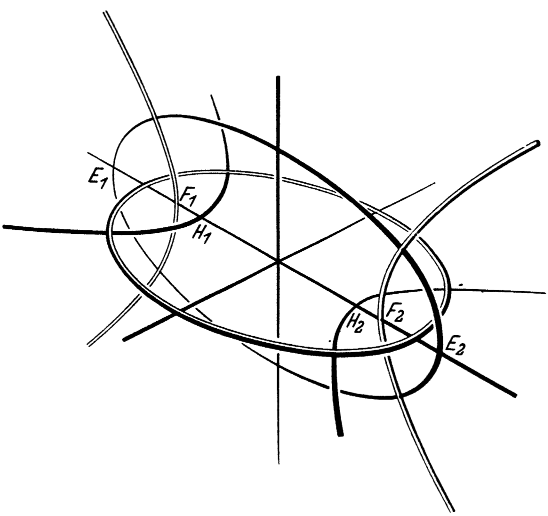

Abb. 30.

Einen Überblick über den Aufbau eines Systems von konfokalen Flächen zweiter Ordnung kann man gewinnen, wenn man die verschiedenen Flächen in einer bestimmten Reihenfolge durchläuft. Ich gehe von den sehr großen Ellipsoiden der Schar aus, die ungefähr die Gestalt einer Kugel besitzen. Nun lasse ich die große Achse allmählich immer kürzer werden; dabei werden die Ellipsoide immer flacher und einer Kugel unähnlicher, da sie in den drei Achsenrichtungen verschieden stark zusammengedrückt werden. So erhalte ich schließlich als Grenzfall des Ellipsoids das Innere der Fokalellipse, doppelt überdeckt. Von hier aus gehe ich sprungweise zum Äußeren der Ellipse über, welches ebenfalls als doppelt überdeckt vorzustellen ist und den Grenzfall eines flachen einschaligen Hyperboloids bildet. Durchlaufe ich von diesem Grenzfall ausgehend die Schar der Hyperboloide in der Weise, daß ich immer steilere Flächen nehme, so komme ich der Ebene der Fokal-

[1] Die Punkte der Fokalkurven spielen eine Ausnahmerolle; in ihnen werden zwei von den drei Ebenen unbestimmt. Vgl. den folgenden Absatz.

hyperbel von beiden Seiten her immer näher, und die Gürtelellipsen, die ebenfalls ein konfokales System durchlaufen, werden immer schmaler. Wenn die Gürtelellipse schließlich unendlich schmal, d. h. zur Doppelstrecke geworden ist, so schrumpft das einschalige Hyperboloid auf den doppelt bedeckten ebenen Streifen zwischen den Zweigen der Fokalhyperbel zusammen[1]. Jetzt gehe ich nochmals unstetig auf die andere Seite der Fokalhyperbel über, die ich mir wieder als doppelt überdeckt vorzustellen habe. Dies ist der Grenzfall eines flachen zweischaligen Hyperboloids. Lasse ich nun die beiden Schalen des Hyperboloids sich allmählich aufblähen, so nähern sie sich beide immer mehr von beiden Seiten her derjenigen Ebene, die im Mittelpunkt der Fokalkurven auf deren Ebenen senkrecht steht. In der Grenzlage erhalte ich also diese Ebene doppelt überdeckt. Hiermit ist das System der konfokalen Flächen vollständig durchlaufen, und unsere Betrachtung zeigt, in welcher Weise jede Schar für sich den Raum einfach und lückenlos durchzieht.

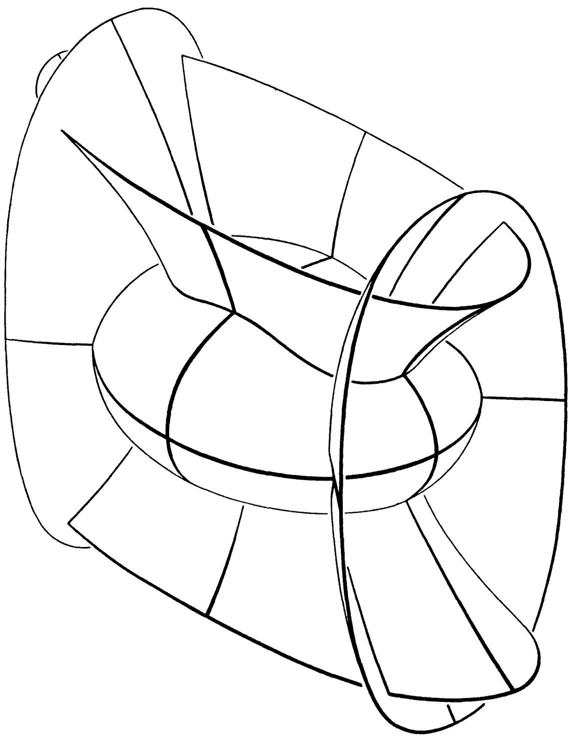

Abb. 31.

Die Beziehung der Fokalkurven zueinander und zu den zugehörigen Flächen zweiter Ordnung läßt sich noch durch eine weitere Eigenschaft kennzeichnen. Wenn ich von irgendeinem Punkt der Fokalhyperbel in Richtung seiner Tangente die Fokalellipse betrachte, so erscheint diese als ein Kreis, auf dessen Mittelpunkt ich blicke; die Fokalhyperbel ist also der geometrische Ort für die Spitzen der Kreiskegel, welche ich durch die Ellipse legen kann, und die Rotationsachse jedes solchen Kegels ist die Tangente der Fokalhyperbel in der Kegelspitze. Ebenfalls Kreiskegel, und zwar mit der gleichen Achse, sind die Tangentialkegel

[1] Das früher erwähnte bewegliche Stangenmodell durchläuft gerade dieses System von Hyperboloiden vollständig, einschließlich der ebenen Grenzlagen.

von einem beliebigen Punkt der Fokalhyperbel an alle zu den gegebenen Fokalkurven konfokalen Ellipsoide, in deren Äußeren der Punkt liegt. Allgemein gilt der Satz, daß eine jede Fläche des konfokalen Systems, betrachtet von einem Punkt einer Fokalkurve aus, welcher nicht von der Fläche eingeschlossen wird, als Kreis erscheint, auf dessen Mittelpunkt man blickt, falls die Blickrichtung tangential zur Fokalkurve genommen wird. (Die Berührungspunkte der Umrißkegel mit der Fläche liegen aber im allgemeinen keineswegs auf einem Kreis, sondern können jeden beliebigen Kegelschnitt erfüllen, auch eine Hyperbel[1].)

Es liegt nahe, neben den Fokalkurven auch die anderen Kurven zu betrachten, in denen sich zwei ungleichartige Flächen eines konfokalen Systems treffen. Diese Kurven haben eine einfache differentialgeometrische Eigenschaft, auf die wir später eingehen werden (S. 166). Wir haben ferner in ihnen ein erstes Beispiel für Kurven, die nicht in einer Ebene liegen. Es ist leicht einzusehen, daß eine Durchdringungskurve zweier beliebiger und beliebig gelegener Flächen zweiter Ordnung von einer beliebigen Ebene nie in mehr als vier Punkten getroffen wird, falls die Kurve nicht einen ganzen Bogen mit der Ebene gemein hat. Die Ebene schneidet nämlich die Flächen in zwei Kegelschnitten; man kann nun analytisch leicht den auch anschaulich einleuchtenden Satz beweisen, daß zwei Kegelschnitte sich in höchstens vier Punkten treffen, falls sie nicht zusammenfallen oder eine ganze Gerade gemein haben (vgl. S. 143).

Mit dieser Schnittpunkteigenschaft hängt es zusammen, daß man die Kurve aus analytischen Gründen als Kurve vierter Ordnung bezeichnet (Die Kurven n-ter Ordnung haben die entsprechende Eigenschaft, daß sie mit jeder Ebene entweder höchstens n Punkte oder einen ganzen Kurvenbogen gemein haben). Es gibt aber auch Kurven vierter Ordnung, die man nicht als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung erhalten kann[2]. — Die Raumkurven höherer Ordnung lassen sich ohne analytische Hilfsmittel schwer erfassen und seien deshalb hier nicht näher untersucht.

Anhänge zum ersten Kapitel.

1. Fußpunktkonstruktionen der Kegelschnitte.

Eine Kurve K und ein Punkt F_1 seien gegeben (Abb. 32); ich fälle von F_1 aus die Lote auf alle Tangenten t von K. Dann beschreiben

[1] Eine weitere Eigenschaft des konfokalen Systems, die übrigens die soeben erwähnte als Grenzfall umfaßt, ist die folgende: Legt man von irgendeinem Raumpunkt P aus den Tangentialkegel an irgendeine Fläche des Systems, die P nicht umschließt, so werden die Symmetrieebenen dieses Kegels stets gebildet von den Tangentialebenen der drei durch P gehenden Flächen des Systems im Punkte P.

[2] Für die Schnittkurven zweier Flächen zweiter Ordnung läßt sich analytisch beweisen, daß noch unendlich viele weitere Flächen zweiter Ordnung durch sie hindurchgehen, darunter vier Kegel (von denen auch einige zusammenfallen oder zu Zylindern ausarten können).