

## **Werk**

**Titel:** Anschauliche Geometrie

**Autor:** Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

**Verlag:** Springer

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN379425343

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG\_0010

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

von einem beliebigen Punkt der Fokalhyperbel an alle zu den gegebenen Fokalkurven konfokalen Ellipsoide, in deren Äußeren der Punkt liegt. Allgemein gilt der Satz, daß eine jede Fläche des konfokalen Systems, betrachtet von einem Punkt einer Fokalkurve aus, welcher nicht von der Fläche eingeschlossen wird, als Kreis erscheint, auf dessen Mittelpunkt man blickt, falls die Blickrichtung tangential zur Fokalkurve genommen wird. (Die Berührungspunkte der Umrißkegel mit der Fläche liegen aber im allgemeinen keineswegs auf einem Kreis, sondern können jeden beliebigen Kegelschnitt erfüllen, auch eine Hyperbel<sup>1</sup>.)

Es liegt nahe, neben den Fokalkurven auch die anderen Kurven zu betrachten, in denen sich zwei ungleichartige Flächen eines konfokalen Systems treffen. Diese Kurven haben eine einfache differentialgeometrische Eigenschaft, auf die wir später eingehen werden (S. 166). Wir haben ferner in ihnen ein erstes Beispiel für Kurven, die nicht in einer Ebene liegen. Es ist leicht einzusehen, daß eine Durchdringungskurve zweier beliebiger und beliebig gelegener Flächen zweiter Ordnung von einer beliebigen Ebene nie in mehr als vier Punkten getroffen wird, falls die Kurve nicht einen ganzen Bogen mit der Ebene gemein hat. Die Ebene schneidet nämlich die Flächen in zwei Kegelschnitten; man kann nun analytisch leicht den auch anschaulich einleuchtenden Satz beweisen, daß zwei Kegelschnitte sich in höchstens vier Punkten treffen, falls sie nicht zusammenfallen oder eine ganze Gerade gemein haben (vgl. S. 143).

Mit dieser Schnittpunkteigenschaft hängt es zusammen, daß man die Kurve aus analytischen Gründen als Kurve vierter Ordnung bezeichnet (Die Kurven  $n$ -ter Ordnung haben die entsprechende Eigenschaft, daß sie mit jeder Ebene entweder höchstens  $n$  Punkte oder einen ganzen Kurvenbogen gemein haben). Es gibt aber auch Kurven vierter Ordnung, die man nicht als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung erhalten kann<sup>2</sup>. — Die Raumkurven höherer Ordnung lassen sich ohne analytische Hilfsmittel schwer erfassen und seien deshalb hier nicht näher untersucht.

## Anhänge zum ersten Kapitel.

### 1. Fußpunktkonstruktionen der Kegelschnitte.

Eine Kurve  $K$  und ein Punkt  $F_1$  seien gegeben (Abb. 32); ich fälle von  $F_1$  aus die Lote auf alle Tangenten  $t$  von  $K$ . Dann beschreiben

<sup>1</sup> Eine weitere Eigenschaft des konfokalen Systems, die übrigens die soeben erwähnte als Grenzfall umfaßt, ist die folgende: Legt man von irgendeinem Raumpunkt  $P$  aus den Tangentialkegel an irgendeine Fläche des Systems, die  $P$  nicht umschließt, so werden die Symmetrieebenen dieses Kegels stets gebildet von den Tangentialebenen der drei durch  $P$  gehenden Flächen des Systems im Punkte  $P$ .

<sup>2</sup> Für die Schnittkurven zweier Flächen zweiter Ordnung läßt sich analytisch beweisen, daß noch unendlich viele weitere Flächen zweiter Ordnung durch sie hindurchgehen, darunter vier Kegel (von denen auch einige zusammenfallen oder zu Zylindern ausarten können).

die Fußpunkte dieser Lote eine zweite Kurve  $k$ , die man die Fußpunkt-kurve von  $K$  bezüglich  $F_1$  nennt. Umgekehrt kann man  $K$  zurück-gewinnen, wenn  $F_1$  und  $k$  gegeben sind. Zu diesem Zweck hat man  $F_1$  mit allen Punkten von  $k$  zu verbinden und auf den Verbindungs-linien die Senkrechten  $t$  in den Punkten von  $k$  zu errichten. Die Geraden  $t$  umhüllen dann  $K$ . Diese zweite Kon- struktion wollen wir eine Fußpunkt-konstruktion nennen und sagen, daß  $K$  durch Fußpunkt-konstruktion an  $k$  (bezüglich  $F_1$ ) entsteht. Je nach der Wahl von  $F_1$  können also durch Fußpunkt-konstruktion an einer und derselben Kurve  $k$  sehr verschiedenartige Kurven  $K$  entstehen.

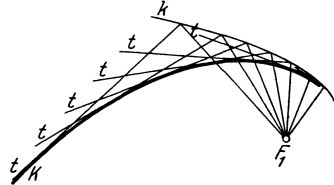


Abb. 32.

Wir zeigen: Die Fußpunkt-konstruktion am Kreis und an der Geraden liefert stets Kegelschnitte. Liegt der Punkt  $F_1$  innerhalb des Kreises vom Mittelpunkt  $M$ , so entsteht eine Ellipse, und  $F_1$  ist der eine Brenn-punkt; der zweite Brennpunkt  $F_2$  ist der Spiegelpunkt von  $F_1$  bezüglich  $M$ . Liegt  $F_1$  außerhalb, so entsteht eine Hyperbel. Die Brennpunkte sind wieder  $F_1$  und der Spiegelpunkt von  $F_1$  bezüglich  $M$ . Nimmt man anstatt eines Kreises eine Gerade  $g$ , so entsteht eine Parabel. Der Brennpunkt ist  $F_1$ , die Leitlinie ist die Par- allele  $h$  von  $g$ , die auf der anderen Seite von  $F_1$  liegt und von  $g$  denselben Abstand wie  $F_1$  hat.

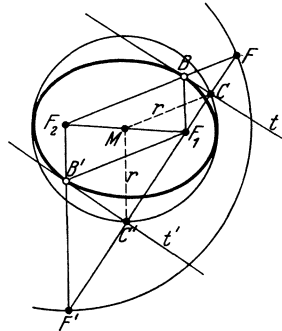


Abb. 33.

Um zunächst die Behauptung für die Ellipse zu beweisen, ziehe ich (Abb. 33) durch  $F_1$  eine beliebige Gerade, die den Kreis in  $C$  und  $C'$  treffen möge. Auf dieser Geraden bestimme ich die Punkte  $F$  und  $F'$ , so daß  $F_1C = CF$  und  $F_1C' = C'F'$ . Ferner er-riche ich auf der Geraden  $CC'$  in  $C$  und  $C'$  die Lote  $t$  und  $t'$ .  $F_2$  sei wie in der Be- hauptung so gelegt, daß  $M$  Mittelpunkt der Strecke  $F_1F_2$  ist.  $F_2F$  möge  $t$  in  $B$  schneiden, und  $F_2F'$  möge  $t'$  in  $B'$  schneiden. Dann ist  $F_1B = FB$ , also  $F_1B + BF_2 = FF_2$ . Da aber  $M$  und  $C$  die Mittelpunkte der Strecken  $F_1F_2$  und  $F_1F$  sind, so gilt  $FF_2 = 2CM$ . Wenn wir den Kreisradius mit  $r$  be- zeichnen, haben wir die Beziehung erhalten:  $BF_1 + BF_2 = 2r$ . Der Punkt  $B$  liegt also auf der Ellipse mit den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  und der großen Achse  $2r$ . Es bleibt nur noch zu zeigen, daß  $t$  diese Ellipse in  $B$  berührt. Dies folgt aus der auf S. 2 bewiesenen Winkeleigenschaft der Ellipsentangente. Nach unserer Konstruktion ist nämlich  $\sphericalangle CBF_1 = \sphericalangle CBF$ . — Für  $t'$  verläuft der Beweis ganz analog mit Hilfe der Punkte  $B'$ ,  $C'$  und  $F'$ .

Der Beweis für die Hyperbel folgt aus Abb. 34. Sie unterscheidet sich von Abb. 33 allein dadurch, daß  $F_1$  außerhalb des Kreises angenommen ist. In diesem Fall durchlaufen  $B$  und  $B'$  die beiden verschiedenen Äste der Hyperbel. Es ist nämlich  $FF_2 = 2r = BF_2 - BF_1$  und  $F'F_2 = 2r = B'F_1 - B'F_2$ .

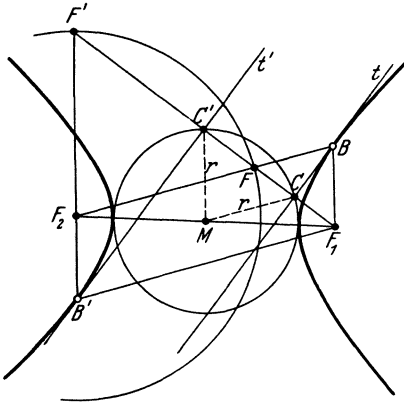


Abb. 34.

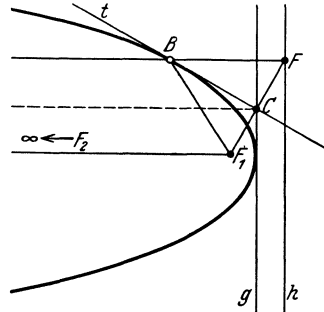


Abb. 35.

Für die Parabel ist der Beweis etwas abzuändern. Sind nämlich die Punkte  $C$  und  $F$  und die Gerade  $t$  analog dem Früheren konstruiert (Abb. 35), so hat man von  $F$  aus das Lot auf  $g$  zu fallen.  $B$  ist der Schnittpunkt dieses Lotes mit  $t$ . Dann ist  $BF_1 = BF$ .  $F$  durchläuft aber die Gerade  $h$ , die wie in der Behauptung konstruiert ist<sup>1</sup>. Also läuft  $B$  in der Tat auf einer Parabel mit  $F_1$  als Brennpunkt und  $h$  als Leitlinie. Daß  $t$  die Parabel in  $B$  berührt, folgt wieder daraus, daß  $t$  den Winkel  $BBF_1$  halbiert<sup>2</sup>.

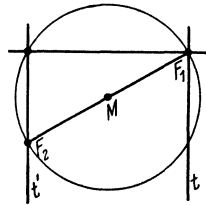


Abb. 36.

Läßt man den Punkt  $F_1$  auf die Kreisperipherie fallen (Abb. 36), so drehen sich  $t$  und  $t'$  um die Punkte  $F_1$  und  $F_2$ . Wir erhalten also ein Paar von Geradenbüscheln. Bekanntlich tritt dieser Ausartungsfall naturgemäß auf, wenn man die Kurven zweiter Ordnung als Tangentengebilde betrachtet.

### 2. Die Leitlinien der Kegelschnitte.

Im Text wurde die Parabel als der geometrische Ort aller Punkte definiert, für die der Abstand von einem festen Punkt  $F$ , dem Brennpunkt, gleich dem Abstand von einer festen Geraden  $g$ , der Leitlinie,

<sup>1</sup> Bei der Ellipsen- und Hyperbelkonstruktion durchläuft  $F$  einen um  $F_2$  als Mittelpunkt geschlagenen Kreis, der doppelt so groß ist wie der ursprünglich gewählte und mit ihm  $F_1$  zum Ähnlichkeitspunkt hat. Das folgt aus den Relationen  $FF_2 = 2 CM$  und  $FF_1 = 2 CF_1$ .

<sup>2</sup> Natürlich läßt sich Abb. 35 aus Abb. 33 durch denselben Grenzübergang ableiten, durch den wir auf S. 3 die Parabel aus der Ellipse gewonnen haben.

ausfällt. Eine ähnliche Definition läßt sich auch für die Ellipse und Hyperbel aufstellen. Wir suchen den geometrischen Ort aller Punkte, für die der Abstand von einem festen Punkt  $F$  zum Abstand von einer festen Geraden  $g$  in einem konstanten Verhältnis  $v$  steht. Im Falle  $v = 1$  erhalten wir die Parabel. Wir beweisen nun: Für  $v < 1$  ist die gesuchte Kurve eine Ellipse, für  $v > 1$  eine Hyperbel.  $F$  ist ein Brennpunkt des Kegelschnitts. Umgekehrt kann man zu jeder Ellipse und jeder Hyperbel zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  finden, so daß jeder Kurvenpunkt konstantes Abstandsverhältnis von  $F_1$  und  $g_1$  bzw. von  $F_2$  und  $g_2$  hat.

Zum Beweis gehen wir von Abb. 37 aus. Ein Kreiskegel schneidet eine Ebene  $e$  in einer Ellipse  $k$ , für die wir die Behauptung prüfen wollen. Wie in Abb. 10 ist eine Kugel zu Hilfe genommen, die den Kegel in einem Kreis  $K$  und die Ebene in einem Punkt  $F$  berührt;  $F$  ist also ein Brennpunkt von  $k$ . Ferner sei  $f$  die Ebene von  $K$  und  $g$  die Schnittgerade von  $e$  und  $f$ . Von einem beliebigen Ellipsenpunkt  $B$  aus fallen wir das Lot  $BC$  auf  $g$  und das Lot  $BD$  auf  $f$ . Sodann verbinden wir  $B$  mit  $F$  und der Kegelspitze  $S$ ;  $BS$  möge  $K$  im Punkt  $P$  treffen. Zur Abkürzung setzen wir  $\sphericalangle DBP = \alpha$  und  $\sphericalangle DBC = \beta$ . Dann ist  $BC = \frac{BD}{\cos \beta}$  und  $BP = \frac{BD}{\cos \alpha}$ . Ferner ist  $BF = BP$ , da beide Strecken Tangenten an dieselbe Kugel vom selben Punkt  $B$  aus sind. Also ist

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BP}{BC} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Nun sind aber die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  von der Wahl von  $B$  unabhängig, denn  $\alpha$  ist gleich dem halben Öffnungswinkel des Kegels, und  $\beta$  ist gleich dem Neigungswinkel der Ebene  $e$  zur Achse des Kegels. Setzen wir also  $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = v$ , so haben wir für die Ellipse  $k$  die Behauptung bestätigt und für die Leitlinie  $g$  zugleich eine räumliche Konstruktion angegeben.

Falls  $e$  den Kegel nicht in einer Ellipse, sondern in einer Hyperbel  $h$  schneidet (Abb. 38), verläuft der Beweis genau so. Nur ist im ersten

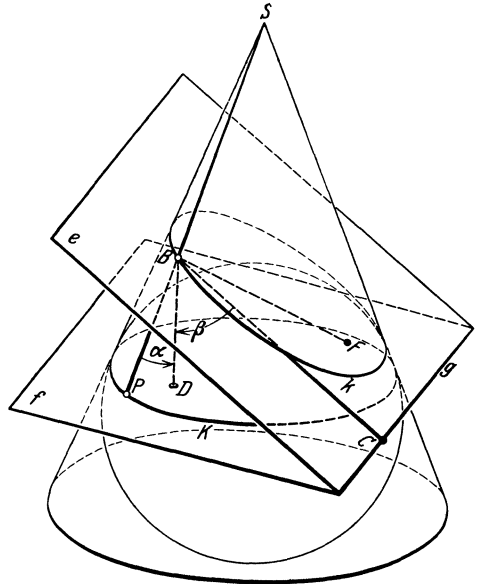


Abb. 37.

Fall  $\alpha < \beta$ , im zweiten Fall  $\alpha > \beta$ . Für die Ellipse  $k$  ist also  $v < 1$ , für die Hyperbel  $h$  dagegen  $v > 1$ .

Nun beweist unsere Betrachtung zunächst nur die Existenz der Leitlinie für bestimmte Ellipsen und Hyperbeln, während in der Behauptung umgekehrt die Zahl  $v$ , der Punkt  $F$  und die Gerade  $g$  vorgegeben sind und die zugehörige Kurve gesucht wird. Aber offenbar hängt die Gestalt der gesuchten Kurve nur von dem Wert der Zahl  $v$  ab, und andererseits können wir unsere Konstruktion so einrichten, daß die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , also auch die Zahl  $v$ , beliebige Werte annehmen. Daher sind durch diese Konstruktion alle gestaltlichen Möglichkeiten für die gesuchte Kurve erfaßt, und diese Kurve muß in der Tat stets ein Kegelschnitt sein.

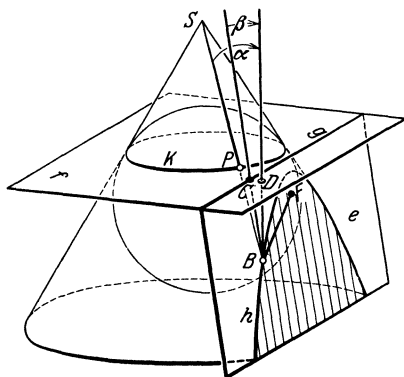


Abb. 38.

Die Parabel ist, wenn wir die Bezeichnungsweise beibehalten, durch  $\alpha = \beta$ , d. h.  $v = 1$  gekennzeichnet, so daß wir auf die ursprüngliche Definition zurückfallen. Schneidet dagegen  $e$  den Kegel in einem Kreis, so versagt die Konstruktion, weil dann (und nur dann) die Ebenen  $e$  und  $f$  keine Schnittgerade  $g$  besitzen, sondern parallel sind. Jeder von einem Kreis verschiedene eigentliche Kegelschnitt läßt sich als Schnitt

eines Kreiskegels auffassen und dann der angegebenen Konstruktion unterwerfen. Die Eigenschaft der Leitlinien kommt daher außer dem Kreis allen eigentlichen Kegelschnitten zu.

Übrigens beruhen die griechischen Namen der Kegelschnitte auf ihrer Beziehung zu den Leitlinien. Sie deuten an, daß  $v$  bei der Ellipse die Zahl 1 nicht erreicht ( $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\epsilon\upsilon\nu$ ), bei der Hyperbel übertrifft ( $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\upsilon\nu$ ) und bei der Parabel gerade erreicht ( $\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\upsilon\nu$ ).

### 3. Das bewegliche Stangenmodell des Hyperboloids.

Wir wollen (unter Voraussetzung einiger Kenntnisse aus der analytischen Geometrie des Raumes) die S. 15 ausgesprochene Behauptung beweisen, daß das Stangenmodell des einschaligen Hyperboloids beweglich ist. Wir zeigen gleichzeitig, daß das Gerüst ein System konfokaler einschaliger Hyperboloide durchlaufen kann.

$x_1, x_2, x_3$  bzw.  $y_1, y_2, y_3$  seien die cartesischen Raumkoordinaten der Punkte  $P$  bzw.  $Q$ . Wir betrachten die konfokalen Flächen zweiter Ordnung:

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} = \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1.$$

Wir denken uns einen solchen Wert  $\lambda$  gewählt, daß (1) ein einschaliges Hyperboloid bestimmt.  $P$  soll, wie durch (1) zum Ausdruck kommt, auf dieser Fläche liegen. Nun sei  $Q$  ein anderer Punkt derselben Fläche, der überdies mit  $P$  auf derselben in der Fläche verlaufenden Geraden liegt. Diese Forderung ist gleichbedeutend damit, daß die Gleichungen bestehen:

$$(2) \quad \sum_1^3 \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} = 1,$$

$$(3) \quad \sum_1^3 \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = 1.$$

Denn der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $PQ$  muß jedenfalls auf der Fläche liegen.  $M$  hat die Koordinaten  $\frac{1}{2}(x_i + y_i)$ . Es muß also gelten

$$\sum \frac{1}{4} \frac{(x_i + y_i)^2}{a_i - \lambda} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = 1.$$

Das ist mit (3) äquivalent. Umgekehrt liegt die Gerade  $PQ$  ganz auf der Fläche, wenn die Gerade mit der Fläche die drei Punkte  $P, Q, M$  gemein hat, wenn also (1), (2) und (3) gilt.

Wir berechnen nun den Abstand  $PQ = r$ . Es ist

$$\begin{aligned} r^2 &= \sum_1^3 (x_i - y_i)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 - 2 \sum x_i y_i \\ &= \sum (a_i - \lambda) \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \sum (a_i - \lambda) \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \sum (a_i - \lambda) \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \\ &= \sum a_i \left[ \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \right] \\ &\quad - \lambda \left[ \sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \sum \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \sum \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \right]. \end{aligned}$$

Infolge der Gleichungen (1), (2), (3) verschwindet der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer. Wir erhalten also

$$(4) \quad r^2 = \sum a_i \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda}.$$

Nun sei  $\lambda'$  ein Wert, der in (1) für  $\lambda$  eingesetzt wieder ein einschaliges Hyperboloid ergibt. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die Vorzeichen von  $a_i - \lambda$  und  $a_i - \lambda'$  für jedes  $i$  einander gleich sind. Demnach bestimmen die Formeln

$$(5) \quad x'_i = x_i \sqrt{\frac{a_i - \lambda'}{a_i - \lambda}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

eine reelle affine Transformation. Offenbar verwandelt (5) die Fläche (1) in ein zu (1) konfokales einschaliges Hyperboloid, das (1') heißen möge. Sind  $P'(x'_i)$  und  $Q'(y'_i)$  die Bilder von  $P$  und  $Q$  vermöge (5), so liegt die Gerade  $P'Q'$  ganz in (1'), da sie das Bild von  $PQ$  ist.

Unsere Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß der Abstand  $P'Q' = r'$  gegenüber  $PQ$  unverändert geblieben ist;  $r' = r$ . Nun gilt für  $r'$  die zu (4) analoge Formel

$$(4') \quad r'^2 = \sum a_i \frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'}.$$

Aus (5) folgt

$$\frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'} = \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda} \quad (i = 1, 2, 3),$$

also wegen (4), (4') in der Tat  $r = r'$ .

Denken wir uns  $\lambda$  fest,  $\lambda'$  veränderlich, so gibt (5) die Bahnkurven der Punkte des Stangenmodells, wenn dieses, wie wir immer angenommen haben, unter Festhaltung der Symmetrieebenen deformiert wird. Diese Kurven sind, wie eine kurze Rechnung zeigt, die Schnittkurven der mit (1) konfokalen Ellipsoide und zweischaligen Hyperboloide.

## Zweites Kapitel.

# Reguläre Punktsysteme.

Wir wollen in diesem Kapitel die metrischen Eigenschaften des Raums unter einem neuen Gesichtspunkt betrachten. Während wir uns nämlich bisher mit Kurven und Flächen, also mit kontinuierlichen Gebilden beschäftigt haben, wenden wir uns nun zu Systemen, die aus getrennten Elementen aufgebaut sind. Solche Systeme treten auch in den übrigen Gebieten der Mathematik oft auf, besonders in der Zahlen- und Funktionentheorie und in der Krystallographie<sup>1</sup>.

## § 5. Ebene Punktgitter.

Ein besonders einfaches Gebilde, das aus diskreten Teilen besteht, ist das ebene quadratische Punktgitter (Abb. 39). Um es zu erzeugen, markieren wir uns in einer Ebene die vier Ecken eines Quadrats vom Inhalt Eins, verschieben das Quadrat parallel einer Seite um die Seitenlänge und zeichnen die beiden neu hinzugekommenen Eckpunkte ebenfalls auf. Dieses Verfahren denken wir uns nach derselben und dann nach der entgegengesetzten Seite unbegrenzt fortgesetzt. So erhalten wir in der Ebene einen Streifen, der aus zwei Reihen äquidistanter Punkte besteht. Diesen Streifen verschieben wir senkrecht zu sich selbst um eine Quadratseitenlänge, markieren die neu hinzugekommenen Punkte und denken uns auch dies Verfahren nach beiden Seiten unbegrenzt oft

<sup>1</sup> Soweit die folgenden Abschnitte die Krystallographie streifen, ist die Bezeichnungsweise nicht immer der üblichen krystallographischen Terminologie angepaßt. Im Rahmen der einfachen geometrischen Betrachtung, auf die wir uns beschränken, sind oft andere Namen kürzer und eindringlicher.