Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0011

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343 von einem beliebigen Punkt der Fokalhyperbel an alle zu den gegebenen Fokalkurven konfokalen Ellipsoide, in deren Äußeren der Punkt liegt. Allgemein gilt der Satz, daß eine jede Fläche des konfokalen Systems, betrachtet von einem Punkt einer Fokalkurve aus, welcher nicht von der Fläche eingeschlossen wird, als Kreis erscheint, auf dessen Mittelpunkt man blickt, falls die Blickrichtung tangential zur Fokalkurve genommen wird. (Die Berührungspunkte der Umrißkegel mit der Fläche liegen aber im allgemeinen keineswegs auf einem Kreis, sondern können jeden beliebigen Kegelschnitt erfüllen, auch eine Hyperbel[1].)

Es liegt nahe, neben den Fokalkurven auch die anderen Kurven zu betrachten, in denen sich zwei ungleichartige Flächen eines konfokalen Systems treffen. Diese Kurven haben eine einfache differentialgeometrische Eigenschaft, auf die wir später eingehen werden (S. 166). Wir haben ferner in ihnen ein erstes Beispiel für Kurven, die nicht in einer Ebene liegen. Es ist leicht einzusehen, daß eine Durchdringungskurve zweier beliebiger und beliebig gelegener Flächen zweiter Ordnung von einer beliebigen Ebene nie in mehr als vier Punkten getroffen wird, falls die Kurve nicht einen ganzen Bogen mit der Ebene gemein hat. Die Ebene schneidet nämlich die Flächen in zwei Kegelschnitten; man kann nun analytisch leicht den auch anschaulich einleuchtenden Satz beweisen, daß zwei Kegelschnitte sich in höchstens vier Punkten treffen, falls sie nicht zusammenfallen oder eine ganze Gerade gemein haben (vgl. S. 143).

Mit dieser Schnittpunkteigenschaft hängt es zusammen, daß man die Kurve aus analytischen Gründen als Kurve vierter Ordnung bezeichnet (Die Kurven n-ter Ordnung haben die entsprechende Eigenschaft, daß sie mit jeder Ebene entweder höchstens n Punkte oder einen ganzen Kurvenbogen gemein haben). Es gibt aber auch Kurven vierter Ordnung, die man nicht als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung erhalten kann[2]. — Die Raumkurven höherer Ordnung lassen sich ohne analytische Hilfsmittel schwer erfassen und seien deshalb hier nicht näher untersucht.

Anhänge zum ersten Kapitel.

1. Fußpunktkonstruktionen der Kegelschnitte.

Eine Kurve K und ein Punkt F_1 seien gegeben (Abb. 32); ich fälle von F_1 aus die Lote auf alle Tangenten t von K. Dann beschreiben

[1] Eine weitere Eigenschaft des konfokalen Systems, die übrigens die soeben erwähnte als Grenzfall umfaßt, ist die folgende: Legt man von irgendeinem Raumpunkt P aus den Tangentialkegel an irgendeine Fläche des Systems, die P nicht umschließt, so werden die Symmetrieebenen dieses Kegels stets gebildet von den Tangentialebenen der drei durch P gehenden Flächen des Systems im Punkte P.

[2] Für die Schnittkurven zweier Flächen zweiter Ordnung läßt sich analytisch beweisen, daß noch unendlich viele weitere Flächen zweiter Ordnung durch sie hindurchgehen, darunter vier Kegel (von denen auch einige zusammenfallen oder zu Zylindern ausarten können).

die Fußpunkte dieser Lote eine zweite Kurve k, die man die Fußpunktkurve von K bezüglich F_1 nennt. Umgekehrt kann man K zurückgewinnen, wenn F_1 und k gegeben sind. Zu diesem Zweck hat man F_1 mit allen Punkten von k zu verbinden und auf den Verbindungslinien die Senkrechten t in den Punkten von k zu errichten. Die Geraden t umhüllen dann K. Diese zweite Konstruktion wollen wir eine Fußpunktkonstruktion nennen und sagen, daß K durch Fußpunktkonstruktion an k (bezüglich F_1) entsteht. Je nach der Wahl von F_1 können also durch Fußpunktkonstruktion an einer und derselben Kurve k sehr verschiedenartige Kurven K entstehen.

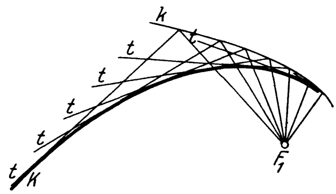

Abb. 32.

Wir zeigen: Die Fußpunktkonstruktion am Kreis und an der Geraden liefert stets Kegelschnitte. Liegt der Punkt F_1 innerhalb des Kreises vom Mittelpunkt M, so entsteht eine Ellipse, und F_1 ist der eine Brennpunkt; der zweite Brennpunkt F_2 ist der Spiegelpunkt von F_1 bezüglich M. Liegt F_1 außerhalb, so entsteht eine Hyperbel. Die Brennpunkte sind wieder F_1 und der Spiegelpunkt von F_1 bezüglich M. Nimmt man anstatt eines Kreises eine Gerade g, so entsteht eine Parabel. Der Brennpunkt ist F_1, die Leitlinie ist die Parallele h von g, die auf der anderen Seite von F_1 liegt und von g denselben Abstand wie F_1 hat.

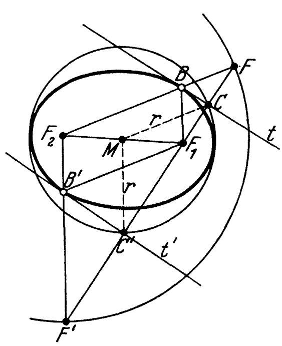

Abb. 33.

Um zunächst die Behauptung für die Ellipse zu beweisen, ziehe ich (Abb. 33) durch F_1 eine beliebige Gerade, die den Kreis in C und C' treffen möge. Auf dieser Geraden bestimme ich die Punkte F und F', so daß $F_1C = CF$ und $F_1C' = C'F'$. Ferner errichte ich auf der Geraden CC' in C und C' die Lote t und t'. F_2 sei wie in der Behauptung so gelegt, daß M Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 ist. F_2F möge t in B schneiden, und F_2F' möge t' in B' schneiden. Dann ist $F_1B = FB$, also $F_1B + BF_2 = FF_2$. Da aber M und C die Mittelpunkte der Strecken F_1F_2 und F_1F sind, so gilt $FF_2 = 2\,CM$. Wenn wir den Kreisradius mit r bezeichnen, haben wir die Beziehung erhalten: $BF_1 + BF_2 = 2\,r$. Der Punkt B liegt also auf der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der großen Achse $2\,r$. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß t diese Ellipse in B berührt. Dies folgt aus der auf S. 2 bewiesenen Winkeleigenschaft der Ellipsentangente. Nach unserer Konstruktion ist nämlich $\sphericalangle CBF_1 = \sphericalangle CBF$. — Für t' verläuft der Beweis ganz analog mit Hilfe der Punkte B', C' und F'.

Der Beweis für die Hyperbel folgt aus Abb. 34. Sie unterscheidet sich von Abb. 33 allein dadurch, daß F_1 außerhalb des Kreises angenommen ist. In diesem Fall durchlaufen B und B' die beiden verschiedenen Äste der Hyperbel. Es ist nämlich $FF_2 = 2r = BF_2 - BF_1$ und $F'F_2 = 2r = B'F_1 - B'F_2$.

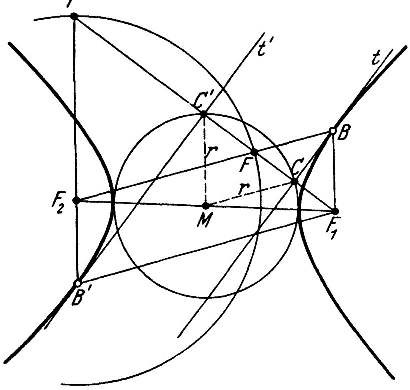

Abb. 34.

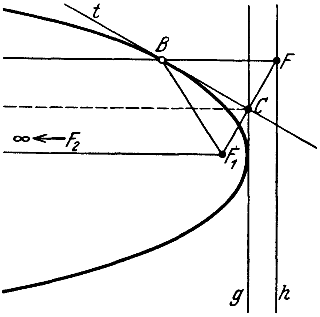

Abb. 35.

Für die Parabel ist der Beweis etwas abzuändern. Sind nämlich die Punkte C und F und die Gerade t analog dem Früheren konstruiert (Abb. 35), so hat man von F aus das Lot auf g zu fällen. B ist der Schnittpunkt dieses Lotes mit t. Dann ist $BF_1 = BF$. F durchläuft aber die Gerade h, die wie in der Behauptung konstruiert ist[1]. Also läuft B in der Tat auf einer Parabel mit F_1 als Brennpunkt und h als Leitlinie. Daß t die Parabel in B berührt, folgt wieder daraus, daß t den Winkel FBF_1 halbiert[2].

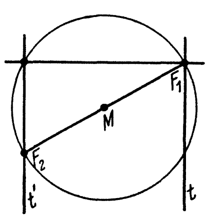

Abb. 36.

Läßt man den Punkt F_1 auf die Kreisperipherie fallen (Abb. 36), so drehen sich t und t' um die Punkte F_1 und F_2. Wir erhalten also ein Paar von Geradenbüscheln. Bekanntlich tritt dieser Ausartungsfall naturgemäß auf, wenn man die Kurven zweiter Ordnung als Tangentengebilde betrachtet.

2. Die Leitlinien der Kegelschnitte.

Im Text wurde die Parabel als der geometrische Ort aller Punkte definiert, für die der Abstand von einem festen Punkt F, dem Brennpunkt, gleich dem Abstand von einer festen Geraden g, der Leitlinie,

---

[1] Bei der Ellipsen- und Hyperbelkonstruktion durchläuft F einen um F_2 als Mittelpunkt geschlagenen Kreis, der doppelt so groß ist wie der ursprünglich gewählte und mit ihm F_1 zum Ähnlichkeitspunkt hat. Das folgt aus den Relationen $FF_2 = 2\,CM$ und $FF_1 = 2\,CF_1$.

[2] Natürlich läßt sich Abb. 35 aus Abb. 33 durch denselben Grenzübergang ableiten, durch den wir auf S. 3 die Parabel aus der Ellipse gewonnen haben.