

## **Werk**

**Titel:** Anschauliche Geometrie

**Autor:** Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

**Verlag:** Springer

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN379425343

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

**LOG Id:** LOG\_0013

**LOG Titel:** 3. Das bewegliche Stangenmodell des Hyperboloids.

**LOG Typ:** chapter

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

Fall  $\alpha < \beta$ , im zweiten Fall  $\alpha > \beta$ . Für die Ellipse  $k$  ist also  $v < 1$ , für die Hyperbel  $h$  dagegen  $v > 1$ .

Nun beweist unsere Betrachtung zunächst nur die Existenz der Leitlinie für bestimmte Ellipsen und Hyperbeln, während in der Behauptung umgekehrt die Zahl  $v$ , der Punkt  $F$  und die Gerade  $g$  vorgegeben sind und die zugehörige Kurve gesucht wird. Aber offenbar hängt die Gestalt der gesuchten Kurve nur von dem Wert der Zahl  $v$  ab, und andererseits können wir unsere Konstruktion so einrichten, daß die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , also auch die Zahl  $v$ , beliebige Werte annehmen. Daher sind durch diese Konstruktion alle gestaltlichen Möglichkeiten für die gesuchte Kurve erfaßt, und diese Kurve muß in der Tat stets ein Kegelschnitt sein.

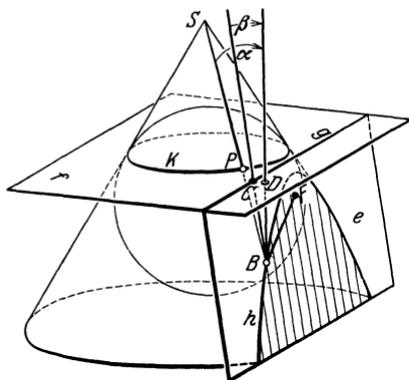


Abb. 38.

Die Parabel ist, wenn wir die Bezeichnungsweise beibehalten, durch  $\alpha = \beta$ , d. h.  $v = 1$  gekennzeichnet, so daß wir auf die ursprüngliche Definition zurückfallen. Schneidet dagegen  $e$  den Kegel in einem Kreis, so versagt die Konstruktion, weil dann (und nur dann) die Ebenen  $e$  und  $f$  keine Schnittgerade  $g$  besitzen, sondern parallel sind. Jeder von einem Kreis verschiedene eigentliche Kegelschnitt läßt sich als Schnitt

eines Kreiskegels auffassen und dann der angegebenen Konstruktion unterwerfen. Die Eigenschaft der Leitlinien kommt daher außer dem Kreis allen eigentlichen Kegelschnitten zu.

Übrigens beruhen die griechischen Namen der Kegelschnitte auf ihrer Beziehung zu den Leitlinien. Sie deuten an, daß  $v$  bei der Ellipse die Zahl 1 nicht erreicht ( $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\epsilon\upsilon\nu$ ), bei der Hyperbel übertrifft ( $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\upsilon\nu$ ) und bei der Parabel gerade erreicht ( $\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\upsilon\nu$ ).

### 3. Das bewegliche Stangenmodell des Hyperboloids.

Wir wollen (unter Voraussetzung einiger Kenntnisse aus der analytischen Geometrie des Raumes) die S. 15 ausgesprochene Behauptung beweisen, daß das Stangenmodell des einschaligen Hyperboloids beweglich ist. Wir zeigen gleichzeitig, daß das Gerüst ein System konfokaler einschaliger Hyperboloide durchlaufen kann.

$x_1, x_2, x_3$  bzw.  $y_1, y_2, y_3$  seien die cartesischen Raumkoordinaten der Punkte  $P$  bzw.  $Q$ . Wir betrachten die konfokalen Flächen zweiter Ordnung:

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} = \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1.$$

Wir denken uns einen solchen Wert  $\lambda$  gewählt, daß (1) ein einschaliges Hyperboloid bestimmt.  $P$  soll, wie durch (1) zum Ausdruck kommt, auf dieser Fläche liegen. Nun sei  $Q$  ein anderer Punkt derselben Fläche, der überdies mit  $P$  auf derselben in der Fläche verlaufenden Geraden liegt. Diese Forderung ist gleichbedeutend damit, daß die Gleichungen bestehen:

$$(2) \quad \sum_1^3 \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} = 1,$$

$$(3) \quad \sum_1^3 \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = 1.$$

Denn der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $PQ$  muß jedenfalls auf der Fläche liegen.  $M$  hat die Koordinaten  $\frac{1}{2}(x_i + y_i)$ . Es muß also gelten

$$\sum \frac{1}{4} \frac{(x_i + y_i)^2}{a_i - \lambda} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = 1.$$

Das ist mit (3) äquivalent. Umgekehrt liegt die Gerade  $PQ$  ganz auf der Fläche, wenn die Gerade mit der Fläche die drei Punkte  $P, Q, M$  gemein hat, wenn also (1), (2) und (3) gilt.

Wir berechnen nun den Abstand  $PQ = r$ . Es ist

$$\begin{aligned} r^2 &= \sum_1^3 (x_i - y_i)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 - 2 \sum x_i y_i \\ &= \sum (a_i - \lambda) \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \sum (a_i - \lambda) \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \sum (a_i - \lambda) \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \\ &= \sum a_i \left[ \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \right] \\ &\quad - \lambda \left[ \sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \sum \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \sum \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \right]. \end{aligned}$$

Infolge der Gleichungen (1), (2), (3) verschwindet der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer. Wir erhalten also

$$(4) \quad r^2 = \sum a_i \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda}.$$

Nun sei  $\lambda'$  ein Wert, der in (1) für  $\lambda$  eingesetzt wieder ein einschaliges Hyperboloid ergibt. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die Vorzeichen von  $a_i - \lambda$  und  $a_i - \lambda'$  für jedes  $i$  einander gleich sind. Demnach bestimmen die Formeln

$$(5) \quad x'_i = x_i \sqrt{\frac{a_i - \lambda'}{a_i - \lambda}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

eine reelle affine Transformation. Offenbar verwandelt (5) die Fläche (1) in ein zu (1) konfokales einschaliges Hyperboloid, das (1') heißen möge. Sind  $P'(x'_i)$  und  $Q'(y'_i)$  die Bilder von  $P$  und  $Q$  vermöge (5), so liegt die Gerade  $P'Q'$  ganz in (1'), da sie das Bild von  $PQ$  ist.

Unsere Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß der Abstand  $P'Q' = r'$  gegenüber  $PQ$  unverändert geblieben ist;  $r' = r$ . Nun gilt für  $r'$  die zu (4) analoge Formel

$$(4') \quad r'^2 = \sum a_i \frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'}.$$

Aus (5) folgt

$$\frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'} = \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda} \quad (i = 1, 2, 3),$$

also wegen (4), (4') in der Tat  $r = r'$ .

Denken wir uns  $\lambda$  fest,  $\lambda'$  veränderlich, so gibt (5) die Bahnkurven der Punkte des Stangenmodells, wenn dieses, wie wir immer angenommen haben, unter Festhaltung der Symmetrieebenen deformiert wird. Diese Kurven sind, wie eine kurze Rechnung zeigt, die Schnittkurven der mit (1) konfokalen Ellipsoide und zweischaligen Hyperboloide.

## Zweites Kapitel.

# Reguläre Punktsysteme.

Wir wollen in diesem Kapitel die metrischen Eigenschaften des Raums unter einem neuen Gesichtspunkt betrachten. Während wir uns nämlich bisher mit Kurven und Flächen, also mit kontinuierlichen Gebilden beschäftigt haben, wenden wir uns nun zu Systemen, die aus getrennten Elementen aufgebaut sind. Solche Systeme treten auch in den übrigen Gebieten der Mathematik oft auf, besonders in der Zahlen- und Funktionentheorie und in der Krystallographie<sup>1</sup>.

## § 5. Ebene Punktgitter.

Ein besonders einfaches Gebilde, das aus diskreten Teilen besteht, ist das ebene quadratische Punktgitter (Abb. 39). Um es zu erzeugen, markieren wir uns in einer Ebene die vier Ecken eines Quadrats vom Inhalt Eins, verschieben das Quadrat parallel einer Seite um die Seitenlänge und zeichnen die beiden neu hinzugekommenen Eckpunkte ebenfalls auf. Dieses Verfahren denken wir uns nach derselben und dann nach der entgegengesetzten Seite unbegrenzt fortgesetzt. So erhalten wir in der Ebene einen Streifen, der aus zwei Reihen äquidistanter Punkte besteht. Diesen Streifen verschieben wir senkrecht zu sich selbst um eine Quadratseitenlänge, markieren die neu hinzugekommenen Punkte und denken uns auch dies Verfahren nach beiden Seiten unbegrenzt oft

<sup>1</sup> Soweit die folgenden Abschnitte die Krystallographie streifen, ist die Bezeichnungsweise nicht immer der üblichen krystallographischen Terminologie angepaßt. Im Rahmen der einfachen geometrischen Betrachtung, auf die wir uns beschränken, sind oft andere Namen kürzer und eindringlicher.