

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0014

LOG Titel: Zweites Kapitel. Reguläre Punktsysteme.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Unsere Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß der Abstand $P'Q' = r'$ gegenüber PQ unverändert geblieben ist; $r' = r$. Nun gilt für r' die zu (4) analoge Formel

$$(4') \quad r'^2 = \sum a_i \frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'}.$$

Aus (5) folgt

$$\frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'} = \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda} \quad (i = 1, 2, 3),$$

also wegen (4), (4') in der Tat $r = r'$.

Denken wir uns λ fest, λ' veränderlich, so gibt (5) die Bahnkurven der Punkte des Stangenmodells, wenn dieses, wie wir immer angenommen haben, unter Festhaltung der Symmetrieebenen deformiert wird. Diese Kurven sind, wie eine kurze Rechnung zeigt, die Schnittkurven der mit (1) konfokalen Ellipsoide und zweischaligen Hyperboloide.

Zweites Kapitel.

Reguläre Punktsysteme.

Wir wollen in diesem Kapitel die metrischen Eigenschaften des Raums unter einem neuen Gesichtspunkt betrachten. Während wir uns nämlich bisher mit Kurven und Flächen, also mit kontinuierlichen Gebilden beschäftigt haben, wenden wir uns nun zu Systemen, die aus getrennten Elementen aufgebaut sind. Solche Systeme treten auch in den übrigen Gebieten der Mathematik oft auf, besonders in der Zahlen- und Funktionentheorie und in der Krystallographie¹.

§ 5. Ebene Punktgitter.

Ein besonders einfaches Gebilde, das aus diskreten Teilen besteht, ist das ebene quadratische Punktgitter (Abb. 39). Um es zu erzeugen, markieren wir uns in einer Ebene die vier Ecken eines Quadrats vom Inhalt Eins, verschieben das Quadrat parallel einer Seite um die Seitenlänge und zeichnen die beiden neu hinzugekommenen Eckpunkte ebenfalls auf. Dieses Verfahren denken wir uns nach derselben und dann nach der entgegengesetzten Seite unbegrenzt fortgesetzt. So erhalten wir in der Ebene einen Streifen, der aus zwei Reihen äquidistanter Punkte besteht. Diesen Streifen verschieben wir senkrecht zu sich selbst um eine Quadratseitenlänge, markieren die neu hinzugekommenen Punkte und denken uns auch dies Verfahren nach beiden Seiten unbegrenzt oft

¹ Soweit die folgenden Abschnitte die Krystallographie streifen, ist die Bezeichnungsweise nicht immer der üblichen krystallographischen Terminologie angepaßt. Im Rahmen der einfachen geometrischen Betrachtung, auf die wir uns beschränken, sind oft andere Namen kürzer und eindringlicher.

wiederholt. Die Gesamtheit aller so markierten Punkte bildet das quadratische Punktgitter; man kann es auch definieren als die Menge aller Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in einem ebenen cartesischen Koordinatensystem.

In diesem Gitter kann ich natürlich aus vier Punkten auch andere Figuren bilden als Quadrate, z. B. Parallelogramme. Man erkennt nun leicht, daß sich das Gitter ebenso wie aus dem Quadrat aus jedem solchen Parallelogramm erzeugen läßt, wenn das Parallelogramm nur außer seinen Ecken keinen Gitterpunkt mehr in seinem Innern und auf dem Rande enthält (andernfalls

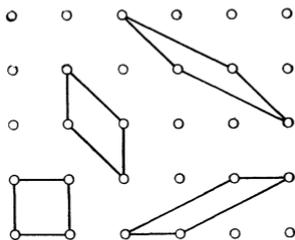


Abb. 39.

könnte ja das Verfahren nicht alle Gitterpunkte liefern). Die Betrachtung jedes solchen Parallelogramms zeigt nun, daß es gleichen Flächeninhalt hat wie das erzeugende Quadrat (vgl. Abb. 39); einen strengen Beweis dafür werden wir auf S. 30 kennenlernen.

Bereits dieses einfache Gitter hat Anlaß zu wichtigen mathematischen Untersuchungen gegeben, deren erste von GAUSS stammt. Er versuchte die Anzahl $f(r)$ der Gitterpunkte zu bestimmen, die auf einer Kreisscheibe vom Radius r liegen; dabei soll der Kreismittelpunkt ein Gitterpunkt sein und r eine ganze Zahl. GAUSS hat diese Anzahl für viele Werte von r empirisch bestimmt und fand z. B.:

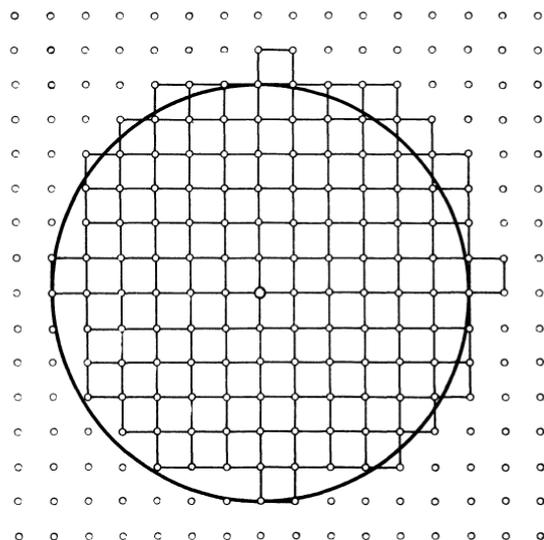


Abb. 40.

$r = 10$	$f(r) = 317,$
$r = 20$	1257,
$r = 30$	2821,
$r = 100$	31417,
$r = 200$	125629,
$r = 300$	282697.

Aus der Betrachtung der Funktion $f(r)$ ergibt sich nämlich eine Methode zur Bestimmung des Wertes von π . Da jedes Grundquadrat den Inhalt Eins hat, ist $f(r)$ gleich dem Inhalt der Fläche F , die von allen den Quadraten bedeckt wird, deren linke untere Ecke auf der Kreisscheibe liegt (Abb. 40). $f(r)$ unterscheidet sich also vom Inhalt $r^2\pi$ der Kreisscheibe höchstens um den Flächeninhalt $A(r)$ derjenigen

(mitgerechneten oder fortgelassenen) Quadrate, die von der Peripherie geschnitten werden.

$$|f(r) - r^2\pi| \leq A(r),$$

$$\left| \frac{f(r)}{r^2} - \pi \right| \leq \frac{A(r)}{r^2}.$$

Um $A(r)$ abzuschätzen, genügt nun eine einfache Überlegung. Die Maximalentfernung zweier Punkte im Einheitsquadrat beträgt $\sqrt{2}$. Alle Quadrate, die von der Peripherie geschnitten werden, liegen also in einem Kreisring von der Breite $2\sqrt{2}$, dessen begrenzende Kreise die Radien $r + \sqrt{2}$ und $r - \sqrt{2}$ haben. Dieser Kreisring hat den Flächeninhalt

$$B(r) = [(r + \sqrt{2})^2 - (r - \sqrt{2})^2]\pi = 4\sqrt{2}\pi r.$$

Nun ist aber $A(r) < B(r)$, also

$$\left| \frac{f(r)}{r^2} - \pi \right| < \frac{4\sqrt{2}\pi}{r}.$$

Daraus ergibt sich durch Grenzübergang die Formel, die wir zum Ziel hatten:

$$(1) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \pi.$$

Wenn man die von GAUSS ermittelten Funktionswerte $f(r)$ in diese Gleichung einsetzt, ergibt sich folgende Annäherung an $\pi = 3,14159$:

$r = 10$	$\frac{f(r)}{r^2} = 3,17,$
20	3,1425,
30	3,134,
100	3,1417,
200	3,140725,
300	3,14107.

Eine Anwendung der Gleichung (1) besteht im Beweis der auf S. 29 ausgesprochenen Behauptung, daß jedes der Parallelogramme, durch die ich das quadratische Punktgitter erzeugen kann, den Flächeninhalt Eins besitzt. Ich weise nämlich jeden Gitterpunkt der Kreisscheibe in gleicher Weise einem solchen Parallelogramm als Eckpunkt zu und vergleiche die von diesen Parallelogrammen bedeckte Fläche F mit der Kreisscheibe. Wieder ist die Abweichung geringer als der Inhalt $B(r)$ eines Kreisrings mit den Radien $r + c$ und $r - c$, wo c die (von r unabhängige) Maximalentfernung zweier Punkte im Grundparallelogramm bedeutet. Ist dessen Inhalt a , so hat F den Inhalt $a \cdot f(r)$, und wir erhalten die Formel

$$|a f(r) - r^2\pi| < B(r) = 4rc\pi,$$

also

$$\left| \frac{af(r)}{r^2} - \pi \right| < \frac{4c\pi}{r},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \frac{\pi}{a}.$$

Wir haben aber oben gezeigt, daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \pi.$$

Hieraus¹ folgt die Behauptung $a = 1$.

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung allgemeiner „Einheitsgitter“ zu, d. h. Gittern, die von einem beliebigen Parallelogramm des Inhalts Eins auf dieselbe Art erzeugt werden wie das quadratische Gitter vom Quadrat. Wiederum können verschiedene Parallelogramme dasselbe Gitter erzeugen, sie müssen dann aber alle den Inhalt Eins haben, was man in gleicher Weise wie beim quadratischen Gitter beweist.

Für jedes solches Einheitsgitter ist der kleinste Abstand c zweier Gitterpunkte eine charakteristische Größe. Es gibt Einheitsgitter mit beliebig kleinem c , z. B. solche, die von einem Rechteck mit den Seiten c und $1/c$ erzeugt werden. Dagegen kann c offenbar nicht beliebig groß werden, weil das Gitter sonst kein Einheitsgitter sein könnte. Also hat c eine obere Grenze. Wir wollen sie bestimmen.

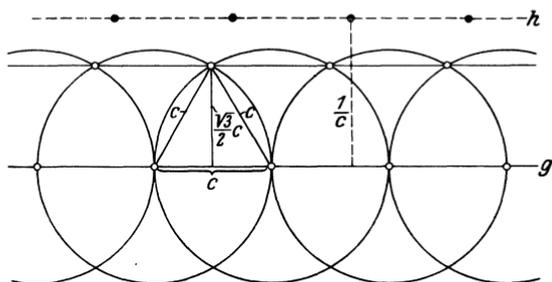


Abb. 41.

Sei in einem beliebigen Einheitsgitter ein Punktepaar mit dem kleinsten vorkommenden Abstand c herausgegriffen (Abb. 41). Legt man durch die beiden Punkte eine Gerade g , so müssen auf ihr nach Definition des Gitters immer weitere Gitterpunkte im Abstand c liegen; die zu g im Abstand $1/c$ gezogene Parallele h muß ebenfalls unendlich viele Gitterpunkte enthalten, dagegen muß der Streifen zwischen den Parallelen von Gitterpunkten frei sein, was beides daraus folgt, daß das Gitter ein Einheitsgitter sein soll. Um alle Gitterpunkte von g schlage ich nun Kreise mit dem Radius c . Sie überdecken in ihrer Gesamtheit einen Streifen, der von der übrigen Ebene durch Kreisbögen abgegrenzt wird. Jeder innere Punkt dieses Streifens ist von mindestens

¹ Bei diesem Beweis hätten wir statt der Kreisscheibe auch jedes andere Flächenstück verwenden können, dessen Rand sich durch einen im Verhältnis zum Gesamtflächeninhalt beliebig schmalen Flächenstreifen zudecken läßt.

einem Gitterpunkt um weniger als c entfernt, kann also nach Definition von c kein Gitterpunkt sein. Also ist $1/c$ größer oder gleich dem kürzesten Abstand der Grenzlinie des Streifens von g . Dieser Abstand ist offenbar die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite c ; also haben wir:

$$\frac{1}{c} \geq \frac{c}{2} \sqrt{3},$$

$$c \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Die Zahl $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ ist die gesuchte obere Grenze für c . Dieser Extremwert wird auch tatsächlich in einem Gitter erreicht, nämlich, wie aus Abb. 41 ersichtlich, in einem Gitter, dessen erzeugendes Parallelogramm sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

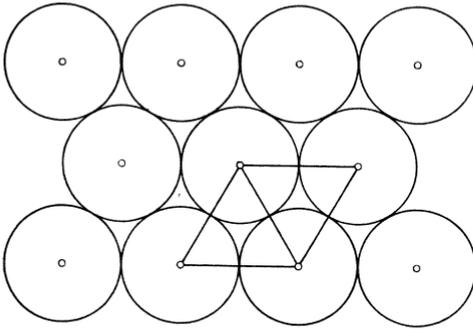


Abb. 42.

Durch Vergrößern oder Verkleinern können wir nun jedes beliebige Gitter aus einem Einheitsgitter erzeugen. Ist also a^2 der Inhalt eines Grundparallelogramms in einem Gitter und C der Minimalabstand zweier Gitterpunkte, so gilt:

$$C \leq a \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Wiederum steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn das Gitter aus gleichseitigen Dreiecken aufgebaut ist. Bei gegebenem Minimalabstand besitzt also dieses Gitter das kleinstmögliche Grundparallelogramm. Nun ist aber, wie wir schon S. 30 gesehen haben, der Flächeninhalt großer Flächen annähernd gleich der Anzahl der Gitterpunkte im Innern multipliziert mit dem Flächeninhalt des Grundparallelogramms. Unter allen Gittern gegebenen Minimalabstands enthält also innerhalb einer gegebenen großen Fläche das Gitter der gleichseitigen Dreiecke die meisten Punkte.

Schlägt man um alle Punkte eines Gitters Kreise mit dem halben Minimalabstand des Gitters als Radius, so erhält man ein System von Kreisen, die sich teilweise berühren, aber nie überdecken. Man bezeichnet ein derart konstruiertes System als eine gitterförmige Kreislagerung. Eine gitterförmige Kreislagerung nennen wir um so dichter, je mehr von den Kreisen in einem vorgeschriebenen (hinreichend großen) Gebiet Platz haben. Demnach liefert das Dreiecksgitter die dichteste Kreislagerung (Abb. 42).

Als Maß für die Dichte einer Kreislagerung wählen wir die Gesamtfläche der eingelagerten Kreise geteilt durch den Inhalt des gegebenen Gebiets. Bei hinreichend großen Gebieten nähert sich dieser Wert offenbar dem Quotienten aus dem Flächeninhalt eines einzelnen Kreises geteilt durch den Inhalt des Grundparallelogramms. Als Optimum der Dichte liefert das Dreiecksgitter den Wert

$$D = \frac{1}{2\sqrt{3}} \pi = 0,289 \pi.$$

§ 6. Ebene Punktgitter in der Zahlentheorie.

Bei vielen Problemen der Zahlentheorie spielen die Punktgitter eine Rolle. Wir wollen dafür einige Beispiele geben. Um Längen der Darstellung zu vermeiden, müssen wir allerdings in diesem Paragraphen etwas mehr mathematische Kenntnisse voraussetzen als sonst in diesem Buche.

1. Die LEIBNIZsche Reihe: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. Wie in § 5 bedeute $f(r)$ die Anzahl der Gitterpunkte des ebenen quadratischen Einheitsgitters innerhalb eines Kreises vom Radius r mit einem Gitterpunkt als Mittelpunkt. Wir wollen diesen Punkt zum Nullpunkt eines cartesischen Koordinatensystems machen, in dem die Gitterpunkte die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten werden. Dann ist $f(r)$ die Anzahl aller Paare von ganzen Zahlen x, y , für die $x^2 + y^2 \leq r^2$ gilt. Nun ist $x^2 + y^2$ stets eine ganze Zahl n . Ich erhalte also $f(r)$, wenn ich für alle ganzen Zahlen $n \leq r^2$ zusehe, auf wieviel Arten sie sich als Quadratsumme zweier ganzen Zahlen schreiben lassen, und wenn ich dann diese Anzahlen von Zerlegungsmöglichkeiten addiere. Nun gilt der zahlentheoretische Satz: Die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl n als Quadratsumme zweier ganzen Zahlen ist gleich dem vierfachen Überschuß der Anzahl der Teiler von n von der Form $4k + 1$ über die Anzahl der Teiler von der Form $4k + 3$. Dabei sind die Darstellungen wie $n = a^2 + b^2$, $n = b^2 + a^2$, $n = (-a)^2 + b^2$ usw. alle als verschieden zu rechnen, wie ja diesen Zerlegungen auch verschiedene Punkte unseres Gitters entsprechen. Jede Zerlegung führt also zu einem System von acht Zerlegungen (abgesehen von den Sonderfällen $a = \pm b$, $a = 0$, $b = 0$). Als Beispiel des Satzes betrachten wir die Zahl $n = 65$. Sie hat im ganzen die Teiler 1, 5, 13, 65. Alle diese Teiler haben die Form $4k + 1$, Teiler der Form $4k + 3$ treten nicht auf. Der betrachtete Überschuß ist also 4, und nach unserem Satz muß sich 65 auf 16 verschiedene Arten als Quadratsumme schreiben lassen (oder, was dasselbe ist, der Kreis um den Nullpunkt vom Radius $\sqrt{65}$ muß durch 16 Gitterpunkte hindurchgehen). In der Tat ist $65 = 1^2 + 8^2$ und $65 = 4^2 + 7^2$, und jede dieser Darstellungen ist achtmal zu zählen.

Wir erhalten nach diesem Satz die Zahl $\frac{1}{4}(f(r) - 1)$, wenn wir für alle positiven ganzen Zahlen $n \leq r^2$ die Anzahl der Teiler von der Form $4k + 3$ von der Anzahl der Teiler von der Form $4k + 1$ abziehen und alle diese Differenzen addieren. Es ist aber viel einfacher, die Reihenfolge dieser Additionen und Subtraktionen zu ändern. Wir wollen zunächst die Gesamtanzahl aller Teiler $4k + 1$ aller Zahlen $n \leq r^2$ zusammenrechnen und davon die Gesamtanzahl der Teiler $4k + 3$ abziehen. Um die erste Anzahl zu bestimmen, schreiben wir die Zahlen der Form $4k + 1$ der Größe nach auf, also 1, 5, 9, 13, ... und lassen alle Zahlen fort, die r^2 übertreffen. Jede dieser Zahlen tritt als Teiler genau so oft auf, wie es Vielfache von ihr gibt, die r^2 nicht übertreffen. 1 ist also $[r^2]$ mal zu zählen, 5 dagegen $[r^2/5]$ mal, wenn wir mit $[a]$ allgemein die größte ganze Zahl bezeichnen, die a nicht übertrifft. Die gesuchte Gesamtanzahl der Teiler $4k + 1$ ist demnach $[r^2] + \left[\frac{r^2}{5}\right] + \left[\frac{r^2}{9}\right] + \left[\frac{r^2}{13}\right] + \dots$. Nach Definition des Symbols $[a]$ bricht diese Reihe von selbst ab, sobald in der eckigen Klammer der Nenner den Zähler übertrifft. Dieselbe Betrachtung kann man für die Teiler $4k + 3$ anstellen und erhält so für deren Gesamtanzahl die Reihe $\left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{7}\right] + \left[\frac{r^2}{11}\right] + \dots$. Wir haben diese zweite Summe von der ersten abzuziehen. Da beides endliche Summen sind, dürfen wir wieder die Reihenfolge beliebig umstellen, und das ist für den nachher vorzunehmenden Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ zweckmäßig. Wir wollen unser Resultat in der Form aufstellen:

$$\frac{1}{4}(f(r) - 1) = [r^2] - \left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{5}\right] - \left[\frac{r^2}{7}\right] + \left[\frac{r^2}{9}\right] - \left[\frac{r^2}{11}\right] + \dots$$

Um besser zu übersehen, wann die Reihe abbricht, wollen wir r als ungerade ganze Zahl voraussetzen; dann hat die Reihe $\frac{r^2 + 1}{2}$ Glieder. Die Summanden haben abwechselndes Vorzeichen und nehmen nicht zu. Wenn wir daher die Reihe schon beim Glied $\left[\frac{r^2}{r}\right] = [r] = r$ abbrechen, ist der Fehler höchstens gleich diesem letzten Glied r , wir können also diesen Fehler in der Form ϑr schreiben, wo ϑ ein echter Bruch ist. Wenn wir in den übriggebliebenen $\frac{1}{2}(r + 1)$ Gliedern die eckigen Klammern weglassen, machen wir in jedem Glied einen Fehler, der Eins nicht erreicht, im ganzen also wieder einen Fehler, den wir in der Form $\vartheta' r$ schreiben können, wo ϑ' ein echter Bruch ist. Wir haben demnach die Abschätzung

$$\frac{1}{4}(f(r) - 1) = r^2 - \frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{5} - \frac{r^2}{7} + \dots \pm r \pm \vartheta r \pm \vartheta' r,$$

oder wenn wir durch r^2 dividieren:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f(r)}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \pm \frac{1}{r} \pm \frac{\vartheta + \vartheta'}{r}.$$

Wenn wir nun r (durch alle ungeraden ganzen Zahlen) unbegrenzt wachsen lassen, so strebt $f(r)/r^2$ gegen π , wie in § 5 bewiesen. Damit haben wir die LEIBNIZSche Reihe abgeleitet:

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

2. Der kleinste Wert quadratischer Formen. Es sei

$$f(m, n) = am^2 + 2bmn + cn^2$$

eine quadratische Form mit reellen Koeffizienten a, b, c und der Determinante $D = ac - b^2 = 1$. Dann kann a nicht verschwinden. Wir wollen noch $a > 0$ voraussetzen. Dann ist bekanntlich $f(m, n)$ positiv definit, d. h. positiv für alle reellen Zahlenpaare m, n außer $m = n = 0$. Wir wollen zeigen: Es gibt zwei ganze Zahlen m, n , die nicht beide verschwinden und für die $f(m, n) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ausfällt, wie auch die Koeffizienten a, b, c , abgesehen von den Bedingungen $ac - b^2 = 1$ und $a > 0$, gewählt sein mögen.

Diese Behauptung erweist sich als Konsequenz unserer Betrachtung über den Minimalabstand von Gitterpunkten im Einheitsgitter. Wir formen $f(m, n)$ in der üblichen Weise um unter Benutzung der Gleichung $D = 1$:

$$f(m, n) = \left(\sqrt{a}m + \frac{b}{\sqrt{a}}n\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{a}}n\right)^2.$$

Nun betrachten wir in einem cartesischen ebenen Koordinatensystem die Punkte mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a}m + \frac{b}{\sqrt{a}}n, \\ y &= \sqrt{\frac{1}{a}}n, \end{aligned}$$

wobei m, n alle ganzen Zahlen durchlaufen. Nach einfachen Sätzen der analytischen Geometrie müssen diese Punkte ein Einheitsgitter bilden. Denn sie entstehen aus dem quadratischen Einheitsgitter $x = m, y = n$, wenn man die Ebene der affinen Transformation

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a}\xi + \frac{b}{\sqrt{a}}\eta, \\ y &= \sqrt{\frac{1}{a}}\eta \end{aligned}$$

von der Determinante Eins unterwirft. Nun wird aber $f(m, n) = x^2 + y^2$; $\sqrt{f(m, n)}$ stellt also, wenn m und n alle ganzen Zahlen durchlaufen, den Abstand des zugehörigen Gitterpunktes vom Nullpunkt dar. Nach dem zu Anfang erwähnten Satz gibt es einen Punkt P des Gitters, für den dieser Abstand nicht größer ausfällt als $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Für die zwei ganzen

Zahlen m, n , die zu P gehören, ist daher, wie wir es erreichen wollten,

$$f(m, n) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Man kann dieses Ergebnis auf das Problem anwenden, reelle Zahlen durch rationale zu approximieren. Es sei α eine beliebige reelle Zahl; wir betrachten dann die Form

$$f(m, n) = \left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon^2 n^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} m^2 - 2 \frac{\alpha}{\varepsilon^2} m n + \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right) n^2.$$

Diese Form hat die Determinante

$$D = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right) - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^4} = 1.$$

Dabei sei ε eine positive, sonst beliebige Zahl. Nach unserem Ergebnis gibt es stets zwei ganze Zahlen m, n , für die die Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon^2 n^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Also gelten erst recht die beiden Abschätzungen

$$\left|\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right| \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad |\varepsilon n| \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Daraus ergeben sich die Abschätzungen¹:

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|n|} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad |n| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Ist α nicht rational, so muß die linke Seite der ersten Ungleichung von Null verschieden sein. Wir müssen also notwendig unbegrenzt viele solche Zahlenpaare n, m erhalten, indem wir ε immer kleinere Werte erteilen; denn dann muß $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$ unbegrenzt abnehmen. Wir erhalten auf diese Weise eine Folge rationaler Zahlen m/n , die die Irrationalzahl α beliebig genau approximieren. Andererseits können wir ε mit Hilfe der zweiten Ungleichung eliminieren. Auf diese Weise ergibt sich

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Wir haben also eine Folge von approximierenden Brüchen, bei der die Güte der Approximation dem Quadrat des Nenners proportional bleibt; bei der also eine verhältnismäßig gute Annäherung mit verhältnismäßig kleinen Nennern erzielt wird.

¹ Division durch n ist bei hinreichend kleinem ε erlaubt, da die Ungleichung $|\alpha n - m| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ nicht bestehen könnte, wenn $n = 0$ wäre.

3. Der Satz von MINKOWSKI. Es ist MINKOWSKI gelungen, einen Satz über Punktgitter aufzustellen, der trotz seiner Einfachheit viele verschiedenartige Probleme der Zahlentheorie aufgeklärt hat, die mit anderen Methoden nicht bewältigt werden konnten. Der Deutlichkeit halber wollen wir hier den Satz nicht in voller Allgemeinheit aufstellen, sondern uns mit einem Spezialfall begnügen, der sich besonders leicht formulieren läßt und der trotzdem schon alles für die Methode Wesentliche enthält. Dieser Satz lautet:

Wenn man in ein beliebiges ebenes Einheitsgitter ein Quadrat von der Seitenlänge 2 legt, das einen Gitterpunkt zum Mittelpunkt hat, so liegt im Innern oder auf dem Rand dieses Quadrats sicher noch ein weiterer Gitterpunkt.

Zum Beweise denke ich mir in der Ebene des Gitters irgendein großes Gebiet abgegrenzt, z. B. Inneres und Rand eines Kreises von großem Radius r mit einem Gitterpunkt als Mittelpunkt. Um jeden in dieses Gebiet fallenden Gitterpunkt als Mittelpunkt lege ich ein Quadrat der Seitenlänge s (Abb. 43). Wir wollen nun fordern, daß diese Quadrate sich nirgends überdecken, wie groß r auch gewählt sei, und aus dieser Forderung eine Abschätzung für die Seitenlänge s gewinnen. Da nach unserer früheren Bezeichnungweise $f(r)$ Gitterpunkte im Gebiet liegen und die Quadrate sich nicht überdecken, so beträgt ihr Gesamtinhalt $s^2 f(r)$. Andererseits fallen diese Quadrate sicher ins Innere des konzentrischen Kreises von vergrößertem Radius $r + 2s$. Wir erhalten also die Abschätzung

$$s^2 f(r) \leq \pi (r + 2s)^2$$

oder

$$s^2 \leq \frac{\pi r^2}{f(r)} \left(1 + \frac{2s}{r}\right)^2.$$

Wenn wir nun s festhalten, aber r unbegrenzt wachsen lassen, so lehren unsere früheren Betrachtungen über $f(r)$, daß die rechte Seite der Ungleichung gegen Eins strebt. Wir erhalten also für s die Bedingung

$$s \leq 1.$$

Da es nur die beiden Möglichkeiten gibt, daß die Quadrate sich überdecken oder sich nicht überdecken, so folgt für jedes positive noch

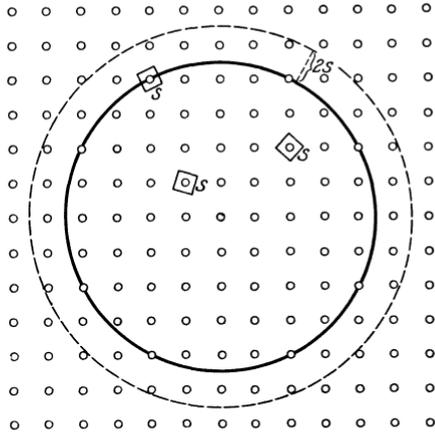


Abb. 43.

so kleine ε , daß stets Überdeckungen auftreten müssen, wenn ich von Quadraten der Seitenlänge $1 + \varepsilon$ ausgehe. Dabei kann ich die Quadrate noch beliebig um ihre Mittelpunkte drehen, da über ihre gegenseitige Stellung nichts vorausgesetzt war. Ich will sie nun alle parallel orientiert denken. Greifen wir dann zwei sich überdeckende Quadrate a, b mit den Mittelpunkten A und B heraus (die nach unserer Voraussetzung Gitterpunkte sind), so muß auch der Mittelpunkt M der Strecke AB ins Innere beider Quadrate fallen (Abb. 44).

Zur Abkürzung wollen wir einmal alle Punkte, die wie M die Verbindungsstrecke zweier Gitterpunkte halbieren, als „Halbierungspunkte“ des Gitters bezeichnen. Dann können wir schließen: Jedes Quadrat a der Seitenlänge $1 + \varepsilon$, das einen Gitterpunkt zum Mittelpunkt hat, muß einen Halbierungspunkt in seinem Innern enthalten. Denn wenn wir um alle übrigen Gitterpunkte weitere Quadrate legen, die mit a gleichorientiert und kongruent sind, so müssen Überdeckungen auftreten, und da in dieser Figur alle Quadrate gleichberechtigt sind, muß auch a selbst von einem anderen Quadrat b teilweise überdeckt werden, also einen wie in Abb. 44 konstruierten Halbierungspunkt M enthalten. Nun läßt sich der Beweis leicht indirekt zu Ende führen. Könnte ich um einen Gitterpunkt A als Mittelpunkt ein Quadrat der Seitenlänge 2 legen, das im Innern und auf dem Rand keinen weiteren Gitterpunkt enthielte, so könnte ich dieses Quadrat parallel und konzentrisch zu sich selbst etwas vergrößern, so daß auch das größere Quadrat a' der Seitenlänge $2(1 + \varepsilon)$ keinen Gitterpunkt im Innern enthielte. Wenn ich andererseits dieses Quadrat wieder parallel und konzentrisch zu sich selbst auf die Hälfte verkleinere, erhalte ich ein Quadrat a der Seitenlänge $1 + \varepsilon$ mit dem Gitterpunkt A als Mittelpunkt, und dieses muß nach dem soeben Bewiesenen einen Halbierungspunkt M enthalten. Das ist ein Widerspruch. Denn verlängere ich AM um sich selbst bis B , so muß B ein Gitterpunkt sein, und aus der gegenseitigen Lage von a und a' würde folgen, daß dieser Gitterpunkt im Innern von a' läge (Abb. 45).

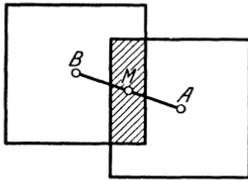
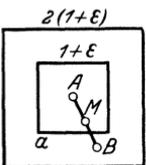


Abb. 44.

Wenn ich andererseits dieses Quadrat wieder parallel und konzentrisch zu sich selbst auf die Hälfte verkleinere, erhalte ich ein Quadrat a der Seitenlänge $1 + \varepsilon$ mit dem Gitterpunkt A als Mittelpunkt, und dieses muß nach dem soeben Bewiesenen einen Halbierungspunkt M enthalten. Das ist ein Widerspruch. Denn verlängere ich AM um sich selbst bis B , so muß B ein Gitterpunkt sein, und aus der gegenseitigen Lage von a und a' würde folgen, daß dieser Gitterpunkt im Innern von a' läge (Abb. 45).



a'

Abb. 45.

Eine besonders wirksame Anwendung findet der MINKOWSKISCHE Satz bei dem schon im vorigen Abschnitt erwähnten Problem, reelle Zahlen durch rationale zu approximieren. Wir können ganz ähnlich vorgehen wie im vorigen Abschnitt, werden aber ein etwas schärferes Resultat erhalten. Mit Hilfe der gegebenen reellen Irrationalzahl α konstruieren wir das Gitter, dessen Punkte in einem cartesischen System die Koordinaten

$$x = \frac{\alpha n - m}{\varepsilon}, \quad y = \varepsilon n$$

haben, wobei m, n alle ganzen Zahlen durchlaufen und ε eine positive, sonst beliebige Zahl ist. Wie oben erkennt man, daß dieses Gitter ein Einheitsgitter ist; in Abb. 46 ist ein erzeugendes Parallelogramm des Gitters gezeichnet unter der Annahme $0 < \alpha < 1$. Legen wir um den Nullpunkt als Mittelpunkt ein achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge 2, so muß dieses nach dem MINKOWSKISCHEN Satz noch einen weiteren Gitterpunkt enthalten. Dieser ist durch zwei bestimmte Zahlen m, n gekennzeichnet, die nicht beide verschwinden. Andererseits sind die Koordinaten der Punkte im Innern und auf dem Rand des Quadrats durch die Ungleichungen $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ bestimmt. Die Zahlen m, n erfüllen also die Ungleichungen

$$\frac{|\alpha n - m|}{\varepsilon} \leq 1, \quad |\varepsilon n| \leq 1$$

oder

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|n|}, \quad |n| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

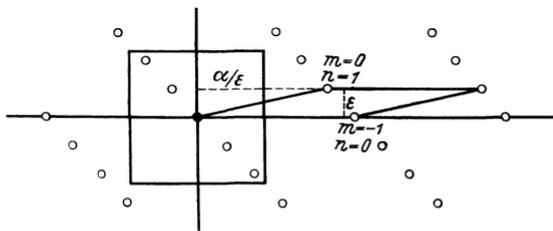


Abb. 46.

Dies gibt wieder eine Folge von Brüchen m/n , die α beliebig genau approximieren. Elimination von ε liefert

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Der MINKOWSKISCHE Satz beweist also die Existenz einer Folge von Brüchen, die α noch besser annähern, als sich für die im vorigen Abschnitt konstruierte Folge beweisen ließ. Denn dort hatten wir nur die Approximationen

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{n^2}$$

erhalten, die schwächer sind, weil $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ ist.

Natürlich lassen sich die in diesem Paragraphen angegebenen Methoden nicht nur in der Ebene, sondern auch in Räumen von beliebig vielen Dimensionen anwenden, wodurch sich viel allgemeinere zahlentheoretische Resultate gewinnen lassen.

§ 7. Punktgitter in drei und mehr Dimensionen.

Ein räumliches Punktgitter entsteht, wenn ich auf ein Parallelepipiped nach drei Dimensionen hin dasselbe Verfahren anwende, durch das das ebene Punktgitter aus einem Parallelogramm erzeugt wird. Auch im Raum können Parallelepipede verschiedener Gestalt dasselbe Gitter erzeugen, müssen dann aber den gleichen Rauminhalt haben. Alle diese Parallelepipede müssen ferner acht Punkte des Gitters zu Ecken haben und in ihrem Innern von Gitterpunkten frei

sein. Wir sprechen von einem Einheitsgitter, wenn ein erzeugendes Parallelepiped den Inhalt Eins hat.

Aus demselben Grund wie in der Ebene gibt es auch bei den räumlichen Einheitsgittern keine positive untere Grenze für den Minimalabstand zweier Gitterpunkte, wohl aber eine obere Grenze dieser Größe. Ihre Bestimmung wird auf dieselbe Weise wie bei den ebenen Punktgittern durchgeführt und soll deshalb übergangen werden. Die Rolle, die dabei in der Ebene das gleichseitige Dreieck spielt, übernimmt im Raum das reguläre Tetraeder. Während aber in der Ebene das erzeugende Parallelogramm sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, besteht das entsprechende Parallelepiped im Raum, das reguläre Rhomboëder, aus zwei regulären Tetraedern und einem regulären Oktaeder (vgl. Abb. 49, S. 43)¹. Der Inhalt dieses Parallelepipeds ist $c^3/\sqrt{2}$, wobei c die Kantenlänge des Tetraeders bedeutet. Jener Inhalt soll aber Eins sein. Aus der Beziehung $\frac{c^3}{\sqrt{2}} = 1$ folgt $c = \sqrt[6]{2}$. Im räumlichen Einheitsgitter muß also im Abstand $\sqrt[6]{2}$ von jedem Gitterpunkt immer noch mindestens ein zweiter Gitterpunkt liegen.

Analog wie in der Ebene löst unser Ergebnis gleichzeitig das Problem der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung. Sie wird verwirklicht, wenn die Mittelpunkte das Rhomboëdergitter bilden. Wenn die Kugeln den Radius 1 haben, ist die Tetraederkantenlänge gleich 2, der Grundbereich hat also das Volumen

$$\frac{2^3}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Ein Raumgebiet vom Volumen J enthält demnach angenähert $\frac{J}{4\sqrt{2}}$ Gitterpunkte, also ebensoviel Einheitskugeln der angegebenen Lagerung; wie in der Ebene gilt diese Beziehung um so genauer, je größer J ist.

Wir wollen diese Kugellagerung näher beschreiben. Denken wir uns zunächst eine ebene Schicht von Einheitskugeln, so daß die Mittelpunkte das Gitter der dichtesten ebenen Kreislagerung bilden. Offenbar erhalten wir dann die dichteste ebene Kugellagerung. Wir nehmen nun eine zweite ebensolche Schicht und suchen sie so auf die erste zu legen, daß beide Schichten zwischen zwei parallelen Ebenen von möglichst kleinem Abstand Platz haben. Zu diesem Zweck müssen die Kugeln der zweiten Schicht gerade in die Einsenkungen der ersten Schicht gelegt werden. Dabei reicht aber der Platz nicht zur Ausfüllung jeder Einsenkung, sondern es muß immer abwechselnd eine übersprungen

¹ In der Ebene führt die dichteste Kreislagerung auf eine lückenlose Bedeckung der Ebene durch kongruente gleichseitige Dreiecke. Man sollte glauben, daß das analoge räumliche Problem zu einem Aufbau des Raumes aus kongruenten regulären Tetraedern führt. Es läßt sich aber beweisen, daß der Raum überhaupt nicht aus kongruenten regulären Tetraedern aufgebaut werden kann.

werden (vgl. Abb. 42, S. 32). Soll jetzt eine dritte Schicht in derselben Weise auf die ersten beiden gelegt werden, so ist die gegenseitige Lage der drei Schichten durch diese Vorschrift noch nicht eindeutig bestimmt.

Einerseits können wir die dritte Schicht so in die Einsenkungen der zweiten legen, daß die erste und dritte Schicht symmetrisch zur zweiten liegen (Abb. 47 a). Andererseits können wir die dritte Schicht aber auch in die Einsenkungen legen, die bei der erstgenannten Anordnung frei geblieben waren (Abb. 47 b, c); dann wird die erste Schicht in die zweite durch dieselbe Verschiebung übergeführt wie die zweite in die dritte. In diesem Fall liefert die fortgesetzte Wiederholung derselben Verschiebung nach beiden Seiten hin die Kugellagerung des Rhomboëdrgitters. Während also in der Ebene das Optimum der Dichte nur von einer einzigen Kreislagerung erreicht wird, führt dasselbe Problem im Raum auf zwei ganz verschiedene Kugelanordnungen¹. Die Mittelpunkte der Kugeln brauchen überhaupt keine über den ganzen Raum hin regelmäßige Figur zu bilden, da man ja von Schicht zu Schicht willkürlich zwischen beiden Möglichkeiten wechseln kann. Eine Eigenschaft ist aber für alle beschriebenen Anordnungen kennzeichnend: Jede Kugel wird von genau zwölf anderen Kugeln berührt, nämlich von sechs Kugeln derselben Schicht und von je drei der darüber- und darunterliegenden Schicht.

Die Frage der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung ist auch noch im vier- und fünfdimensionalen Raum untersucht worden. Merkwürdigerweise zeigt es sich, daß das Punktgitter, das in höheren Dimensionen dem Dreiecks- bzw. Rhomboëdrgitter entspricht, nicht mehr die dichteste Kugellagerung liefert. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

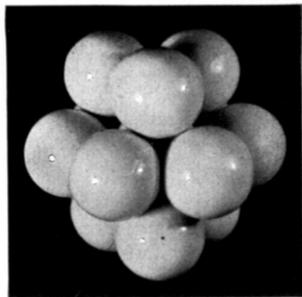


Abb. 47 a.

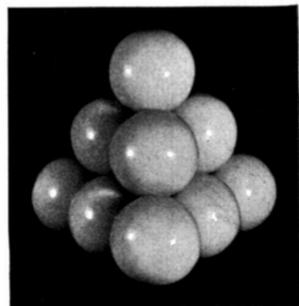


Abb. 47 b.

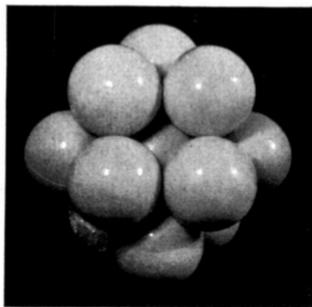


Abb. 47 c.

¹ In der Natur kommen beide Lagerungen wirklich vor. Der erste Fall tritt bei den hexagonalen Krystallen vom Magnesiumtyp ein, der zweite bei den kubisch flächenzentrierten Krystallen Vgl. § 8.

	Kürzester Punktabstand c	Dichtigkeit der Kugellagerung
Ebene	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,075$	$0,289\pi = 0,907$
Gewöhnlicher Raum . . .	$\sqrt[6]{2} = 1,122$	$\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = 0,740$
Vierdimensionaler Raum .	$\sqrt[4]{2} = 1,189$	$\frac{\pi^2}{16} = 0,617$
Fünfdimensionaler Raum .	$\sqrt[10]{2} = 1,074$	$\frac{\sqrt{2}}{60}\pi^2 = 0,465$

(Das Volumen der Kugel vom Radius Eins beträgt im vierdimensionalen Raum $\pi^2/2$ und im fünfdimensionalen Raum $8\pi^2/15$).

Nun sind noch zahlreiche weitere regelmäßige Kugellagerungen von Interesse, deren Dichte hinter dem Optimum zurückbleibt. Als Beispiel sei die kubische Kugellagerung genannt, bei der die Mittelpunkte der Einheitskugeln dasjenige Gitter bilden, das von einem Würfel der Kantenlänge 2 erzeugt wird. Dabei wird jede Kugel von genau sechs Nachbarkugeln berührt; es ist also zu erwarten, daß die Dichte dieser Lagerung bedeutend hinter der Dichte des Rhomboëdergitters zurückbleibt, bei der jede Kugel von zwölf weiteren berührt wird. Um das zu beweisen, bringen wir das Würfelgitter in eine solche Lage, daß je ein Würfel gerade eine Kugel umschließt. Der Würfel der Kantenlänge 2 hat den Inhalt 8, also liegen in einem großen Raumstück vom Inhalt $8x$ asymptotisch stets x Kugeln. Da nun die Einheitskugel das Volumen $\frac{4}{3}\pi$ besitzt, so beträgt die Dichte der kubischen Lagerung

$$D = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{6} = 0,524.$$

Weiter liegt es nahe, im Gegensatz zur dichtesten Lagerung umgekehrt nach der dünnsten im Raum möglichen regelmäßigen Kugellagerung zu fragen, bei der die Kugeln gerade noch festliegen. Hierbei muß jede Kugel von mindestens vier Kugeln berührt werden, deren Mittelpunkte nicht in einer Ebene und nicht auf einer Halbkugel liegen; denn sonst würde die Kugel durch ihre Nachbarn nicht festgehalten werden. Man kann nun vermuten, daß bei der dünnsten Lagerung jede Kugel genau von vier anderen berührt wird und daß deren Mittelpunkte die Ecken eines regulären Tetraeders bilden. Wir konstruieren im folgenden ein System von Punkten, die in dieser Weise angeordnet sind. Wir wollen aber erst nachher untersuchen, ob die so erhaltene Kugellagerung wirklich die dünnste ist.

Im kubischen Gitter seien noch die Mitten der Würfel­flächen hinzuge­rechnet. Das entstandene Punktgebilde ist dann wieder ein Gitter (flächen­zentriert kubisches Gitter), denn es entsteht durch Verschiebung

der Parallelepipede $ABCDEFGH$ in Abb. 48 und 49. (Die beiden Figuren sind ein Beispiel für die früher erwähnte Tatsache, daß man ein

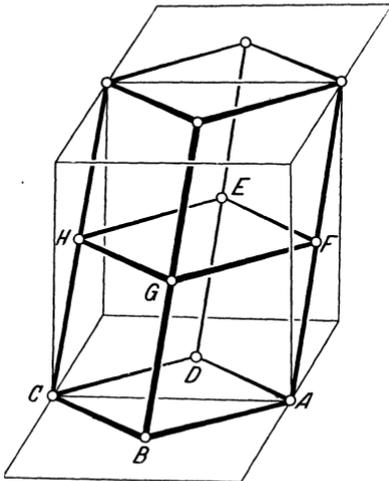


Abb. 48.

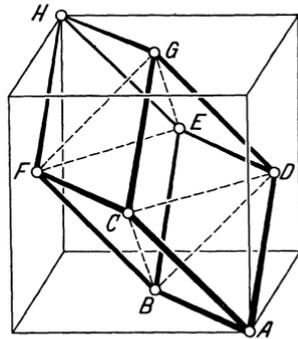


Abb. 49.

und dasselbe Gitter durch sehr verschiedenartige Grundbereiche erzeugen kann.) Aus Abb. 49 erkennt man, daß das Gitter gerade das der dichtesten Kugellagerung ist. In der Ebene ABD bestimmt nämlich das Parallelogramm $ABDE$ das gleichseitige Dreiecksgitter; die nächste Parallelebene, in der Gitterpunkte liegen, ist CFG , und die Gitterpunkte dieser Ebene liegen gerade so über denen der ersten, daß reguläre Tetraeder entstehen, wie z. B. $ABCD$.

Zu diesem Gitter K nehme ich nun noch ein kongruentes Gitter L hinzu, das aus K durch Verschiebung in Richtung der Würfelhauptdiagonale AH um ein Viertel ihrer Länge entsteht (Abb. 50). Ich behaupte, daß die Punkte von K und L zusammen die Mittelpunkte der gesuchten „tetraedrischen“ Kugellagerung darstellen; und zwar muß der Kugelradius gleich $\frac{1}{2}AA'$ sein, wenn A' der aus A entstandene Punkt von L ist. In der Tat: A' erweist sich bei dieser Konstruktion als gleichweit entfernt von den Punkten, die in Abb. 49 $ABCD$ genannt sind; die Kugel um A' wird daher genau von den Kugeln jenes Tetraeders berührt. Entsprechendes muß aus Symmetriegründen für alle Kugeln aus L gelten; ebenso aber

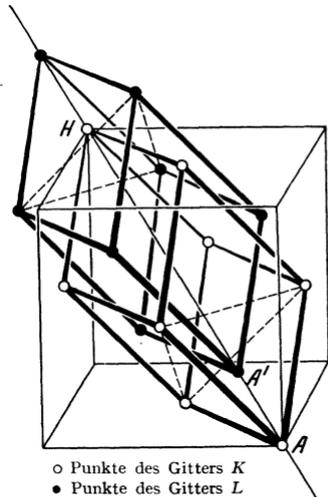


Abb. 50.

auch für alle Kugeln aus K (z. B. H in Abb. 50), denn die gegenseitige Lage von K und L unterscheidet sich nur durch den Richtungssinn der Verschiebung. Die Anordnung der Kugelmittelpunkte wird durch Abb. 51 und 52 veranschaulicht, wo die Mittelpunkte benachbarter Kugeln stets geradlinig verbunden sind¹.

Wir berechnen jetzt die Dichte der tetraedrischen Lagerung. Offenbar entfallen auf jeden Würfel vier Kugeln des Gitters L , da bei der Verschiebung die Punkte $EFGH$ (Abb. 49) mit ihren Kugeln ganz aus dem Würfel heraustreten, während die Kugeln um $ABCD$ ganz ins Würfelinnere rücken. Da das Gitter K dieselbe Dichte hat wie L , entfallen im ganzen acht Kugeln der Lagerung auf jeden Würfel. Setzen

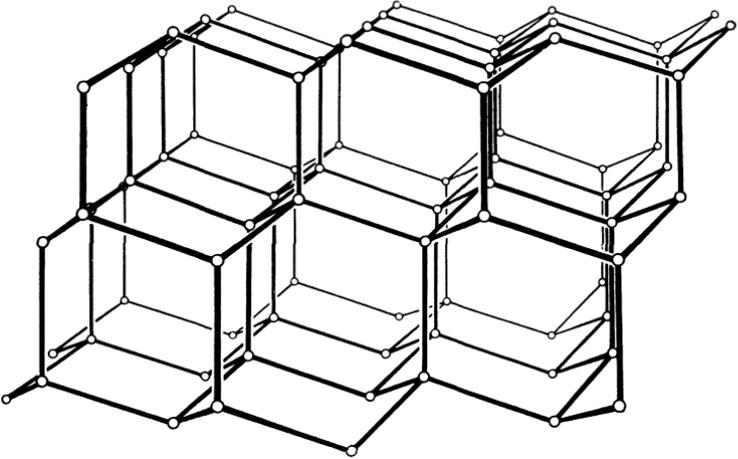


Abb. 51.

wir wieder den Kugelradius $\frac{1}{2}AA'$ gleich Eins und ist a die Kante, b die Hauptdiagonale des Würfels, so gilt: $b = 4AA' = 8 = a\sqrt{3}$. Der Würfelinhalt ist demnach $a^3 = \frac{8^3}{3\sqrt{3}}$. Für die gesuchte Dichte D ergibt sich analog dem Früheren:

$$D = \frac{8}{a^3} \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{16} \pi = 0,340.$$

Wir zeigen nun (nach H. HEESCH und F. LAVES, Göttingen²), daß die tetraedrische Kugelpackung keineswegs die dünnste ist, sondern

¹ Der geometrische Ort der Kugelmittelpunkte bei dieser Lagerung ist kein Punktgitter, denn zu diesem geometrischen Ort gehört z. B. nicht der Punkt A'' , den man erhält, wenn man in Abb. 50 AA' über A' hinaus um sich selbst verlängert; wäre das Gebilde ein Gitter, so müßte es mit A und A' auch A'' enthalten. Man bezeichnet das Gebilde als ein Punktsystem. Die Punktsysteme sind durch allgemeinere Symmetrieeigenschaften gekennzeichnet als die Gitter. Ihre Definition wird in § 9 gegeben.

² Vgl. Z. f. Kristallographie, Bd. 82, S. 10, Abb. 7.

daß man durch eine einfache Abänderung zu einer noch wesentlich dünneren Packung gelangt, bei der ebenfalls jede Kugel von vier anderen berührt wird und alle Kugeln gleichberechtigt auftreten. Dabei bilden allerdings die Mittelpunkte der vier Kugeln, die eine und dieselbe Kugel berühren, nicht mehr die Ecken eines regulären, sondern die eines anderen Tetraeders mit gleichseitiger Basis und gleichschenkligen Seitenflächen.

Um diese Packung zu erhalten, gehe ich von einer Kugel K der tetraedrischen Packung aus und lege in deren Inneres vier kleinere kongruente Kugeln k_1 bis k_4 , die K von innen gerade in den Punkten berühren, in denen K von außen von den Nachbarkugeln der tetraedrischen Packung berührt wird. Da diese vier Punkte die Ecken eines regulären Tetraeders bilden, so gilt das gleiche von den Mittelpunkten der kleineren Kugeln.

Durch passende Wahl ihres Radius kann ich also erreichen, daß k_1 bis k_4 einander paarweise berühren, also jede dieser Kugeln von drei anderen berührt wird. Nun denke ich mir die entsprechende Konstruktion auch für alle anderen Kugeln der tetraedrischen Packung ausgeführt. Dann wird k_1 außer von k_2, k_3, k_4 noch von einer Kugel k_5 von außen berührt, nämlich an der Stelle, wo k_1 von innen K berührt; dort wird ja K von einer Kugel K' der tetraedrischen Packung berührt, und im selben

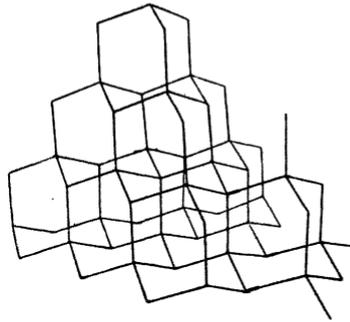


Abb. 52.

Punkt wird K' von innen von einer der kleineren Kugeln berührt; diese nennen wir k_5 . Natürlich gilt das Entsprechende von allen k_1 kongruenten Kugeln unserer Konstruktion, so daß diese in der Tat eine Lagerung bilden, bei der jede Kugel noch festliegt. Um die Dichte d der so erhaltenen Lagerung mit der Dichte D der tetraedrischen Lagerung zu vergleichen, genügt es offenbar, das Gesamtvolumen von k_1 bis k_4 mit dem Volumen von K zu vergleichen. Ist also r der Radius von k_1 , R der Radius von K , so erhält man:

$$\frac{d}{D} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 4 \frac{r^3}{R^3}.$$

Aus der Konstruktion folgt nun elementar die Beziehung: $R = (\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1)r$, und hieraus ergibt sich $d = \frac{4}{(\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1)^3} D = 0,3633 D$. Die Packung ist also bedeutend dünner als die tetraedrische. Man hat Gründe, anzunehmen, daß sie die dünnste ist. In der folgenden Tabelle sind die charakteristischen Konstanten der vier betrachteten Kugellagerungen zusammengestellt.

Dichteste Kugellagerung . .	$D = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,740$	} Jede Kugel wird von	} 12	} anderen berührt
Kubische Kugellagerung . .	$D = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,513$			
Tetraedrische Kugellagerung	$D = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{64} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,340$			
Dünnste (?) Kugellagerung .	$D = 0,123$			

Andersartige Untersuchungen werden nötig, wenn man die Forderung nach regelmäßiger Anordnung der Kreise oder Kugeln fallen läßt und z. B. nur verlangt, daß möglichst viele gleichgroße Kreise (Kugeln) in jedem hinreichend großen Gebiet der Ebene (des Raumes) enthalten sind. Für den Fall der Ebene ist bewiesen worden, daß die Kreise dann von selbst gitterförmig angeordnet sein müssen. Im drei- und mehrdimensionalen Raum ist die Frage noch nicht geklärt.

§ 8. Krystalle als regelmäßige Punktsysteme.

Die Theorie diskontinuierlicher regelmäßiger Punktgebilde findet eine wichtige Anwendung in der Krystallographie. Das regelmäßige Äußere und die Spaltbarkeit der Krystalle läßt erwarten, daß hier die einzelnen Atome oder Molekeln, als Punkte aufgefaßt, eine Figur bilden, die kongruent zu sich selbst über den ganzen Raum fortgesetzt werden kann. Eine durch solche Fortsetzung entstehende Figur heißt Punktsystem. Wir geben später eine exaktere Erklärung dieses Begriffs und werden zeigen, daß es nur endlich viele wesentlich verschiedene Punktsysteme gibt. Es entstehen nun zwei zum Teil mathematische, zum Teil physikalische Aufgaben. Zunächst ist für jede Krystallart das zugehörige Punktsystem anzugeben. Sodann ist das verschiedene physikalische Verhalten der Krystallarten auf geometrische Eigenschaften der zugehörigen Punktsysteme zurückzuführen.

Die ersten Versuche, auf diese Weise zu einer bestimmten Ansicht über die Krystallstruktur zu kommen, gehen auf BRAVAIS (1848) zurück. Eine feste empirische Grundlage erhielt seine Theorie aber erst, nachdem das LAUESCHE Verfahren der Beugung der Röntgenstrahlen an den Krystallen (1913) es ermöglicht hatte, nicht nur das Vorhandensein der Krystallgitter, sondern sogar ihren genauen Aufbau empirisch festzustellen.

Die größte Vorstellung, die man sich von einem Atom bilden kann, besteht offenbar darin, daß man das Atom als einen Punkt mit ebensoviel „Beinchen“ ansieht, als das Atom Valenzen hat; dabei nimmt man an, daß diese die Valenzen vorstellenden Beinchen so symmetrisch wie möglich im Raum angeordnet sind, solange kein Grund für eine Abweichung von der Symmetrie ersichtlich ist. Die Verbindung einzelner

Atome zu einer Molekel denkt man sich dann so, daß je zwei Beine verschiedener Atome miteinander zusammenfallen.

Wasserstoff (H), Sauerstoff (O), Stickstoff (N) und Kohlenstoff (C) sind z. B. ein- bzw. zwei-, drei- und vierwertig. Wir können uns also diese Atome als je einen Punkt mit einem bzw. zwei, drei oder vier

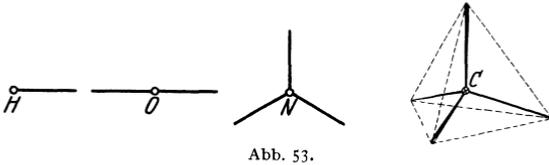


Abb. 53.

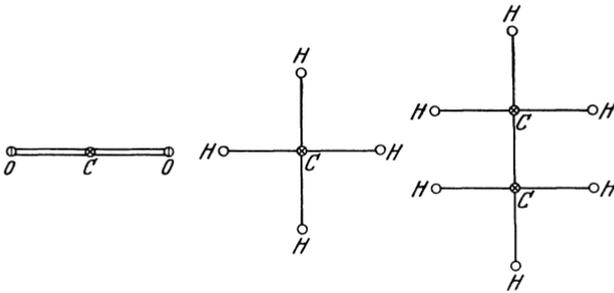


Abb. 54.

Beinen vorstellen (Abb. 53). Bei H, O und N verlangt die Symmetrie, daß alle Beine in einer Ebene liegen. Aus demselben Grund werden wir bei C erwarten, daß die vier Beine nach den Ecken eines regulären Tetraeders gerichtet sind, in dessen Mittelpunkt sich das Atom befindet.

Als Beispiel von Molekeln betrachten wir Kohlendioxyd (CO_2), Methan (CH_4), Äthan (C_2H_6). Abb. 54 gibt ein Schema des Zusammenhangs der Atome („Strukturformel“), ohne Rücksicht auf deren wahre räumliche Lagerung. Eine mögliche und nach neueren Untersuchungen wahrscheinliche räumliche Anordnung der Atome in den Molekeln des Methans und des Äthans gibt Abb. 55 wieder (VAN t'HOFF 1874). Beim Äthan-

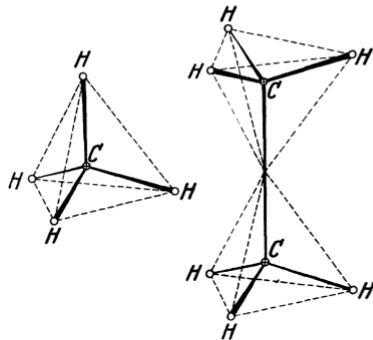


Abb. 55.

modell ist das eine Tetraeder gegen das andere noch drehbar zu denken um die Verbindungsgerade der beiden C-Atome als Achse.

Nun liegt die Frage nahe, ob sich auf dieselbe Art wie die Molekel nicht auch ganze Krystalle durch immer weitere Angliederung von Atomen erzeugen lassen. Die Möglichkeit eines solchen Aufbaus soll

zunächst in dem einfachsten Fall gezeigt werden, daß der Krystall nur aus einem einzigen Element besteht. Ich wähle dazu den Diamanten, der bekanntlich reiner Kohlenstoff ist. Die Aufgabe ist also, lauter C-Atome, die aus je einem Punkt mit vier Beinen bestehen, so ineinanderzuschachteln, daß in möglichst symmetrischer Weise jeder Punkt mit vier anderen Punkten durch zwei zusammenfallende Beine verbunden ist. Die Frage, ob sich ein solches Gerüst aufbauen läßt, ist rein geometrisch. Ein solches Gerüst existiert nun in der Tat; die Atome sind so anzuordnen wie die Kugelmittelpunkte bei der tetraedrischen Lagerung; denn nach der in § 7 ausgeführten Konstruktion hat dann jeder Punkt grade vier nächste Nachbarpunkte, zu denen er so liegt wie der Mittelpunkt eines regulären Tetraeders zu den Ecken (vgl. Abb. 50

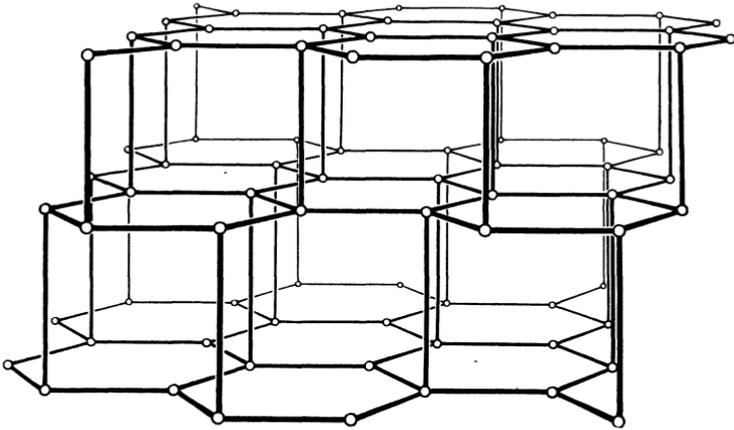


Abb. 56.

bis 52, S. 43 bis 45). In dieser rein geometrisch abgeleiteten Weise ist nun der Diamant tatsächlich aus seinen Atomen aufgebaut, wie die modernen Untersuchungen der beiden BRAGGS zeigen. Die Entfernung benachbarter Punkte beträgt dabei nach diesen Messungen $1,53 \cdot 10^{-8}$ cm*.

Außer dem Diamanten existiert noch ein zweiter Krystall, der nur aus C-Atomen zusammengesetzt ist, nämlich der Graphit. Die Messung ergibt, daß beim Graphit die Beine der C-Atome nicht symmetrisch liegen und nicht einmal gleich lang sind. Ein Bein ist nämlich auf $3,41 \cdot 10^{-8}$ cm verlängert, während die drei übrigen Beine auf $1,45 \cdot 10^{-8}$ cm verkürzt sind. Diese drei liegen annähernd in einer Ebene. Ob und wieweit sie von der ebenen Lage abweichen, ist experimentell nicht genügend geklärt, für die folgende Darstellung genügt die Annahme, daß sie genau in einer Ebene liegen. Dann läßt sich das Gerüst

* Auch der Wurtzitkrystall (ZnS) hat die Atomanordnung der tetraedrischen Kugelpackung. Die Zn- und die S-Atome bilden je eins der beiden Gitter, aus denen wir S. 43, Abb. 50 jenes Punktsystem aufgebaut haben.

des Graphits folgendermaßen beschreiben: Ich konstruiere ein ebenes System von regulären Sechsecken, deren Ecken von Atomen besetzt sind (Abb. 56). In dieser ebenen Anordnung sind je drei Valenzen jedes Atoms verbraucht. Damit nun die Schicht mit der darüber- und der darunterliegenden Schicht zusammenhängt, müssen die Beine der noch freien vierten Valenz abwechselnd nach oben und nach unten gerichtet sein. Dann sind in der Tat alle drei Schichten kongruent, und die Punkte der mittleren Schicht liegen abwechselnd mit einem Punkt der unteren und einem der oberen Schicht in einer Vertikalen. Auf dieselbe Weise läßt sich das Gerüst nach allen Seiten unbegrenzt fortsetzen.

Die beiden für den Diamanten und den Graphit aufgestellten Punktsysteme erklären einige Verschiedenheiten im physikalischen Verhalten beider Krystalle; z. B. die bei weitem größere Spaltbarkeit und Kompressibilität des Graphits. Die Erklärung anderer Unterschiede stößt dagegen auf bedeutende Schwierigkeiten.

Ein Beispiel für einen Krystall, der aus verschiedenen Atomen zusammengesetzt ist, gibt das Kochsalz (NaCl). Der Krystall des Kochsalzes ist ein Würfelgitter, dessen Ecken abwechselnd mit einem Cl-Atom und einem Na-Atom besetzt sind (Abb. 57). Die Entfernung

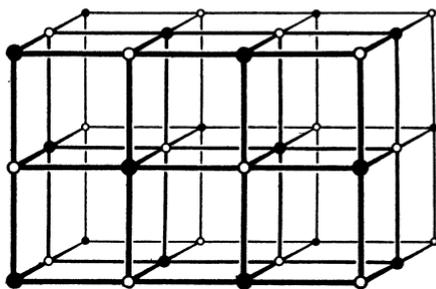


Abb. 57.

benachbarter Gitterpunkte beträgt $2 \cdot 10^{-8}$ cm, ist also größer als das kürzere und kleiner als das längere Bein des C-Atoms beim Graphit. Im Kochsalzkrystall besitzt jeder Gitterpunkt sechs Nachbarpunkte. Die Na- und Cl-Atome sind aber einwertig. Also entspricht der Krystall nicht der früher besprochenen Valenztheorie. Auch allgemein besteht kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen den Valenzen der Atome, die einen Krystall aufbauen, und der Anzahl der Nachbarpunkte eines Punktes. Daß beim Diamanten beide Zahlen übereinstimmen, ist ein Sonderfall.

Besonders bemerkenswert ist, daß im Kochsalzgitter keine Punktepaare ausgezeichnet sind, die der NaCl -Molekel entsprechen könnten. Das Gitter setzt sich also unmittelbar aus den beiden Atomarten zusammen. Im Gegensatz dazu gibt es andere Krystalle, aus denen man ohne allzu große Willkür Molekeln oder wenigstens Komplexe von Atomen herausgreifen kann. Im Gitter des Kalkspats (CaCO_3) z. B. läßt sich der Atomkomplex CO_3 in der räumlichen Anordnung deutlich als zusammengehörig erkennen.

Während der Diamant die tetraedrische Kugellagerung verwirklicht, finden wir bei einer großen Anzahl Krystallen das „flächenzentriert

kubische“ Gitter, das derjenigen dichtesten Kugellagerung entspricht, bei der von Schicht zu Schicht immer derselbe Übergang gemacht wird (Abb. 47 b, c, S. 41). Die andere Art der dichtesten Kugelpackung, bei der das System der Lücken von Schritt zu Schritt immer abwechselt (Abb. 47 a, S. 41), tritt z. B. im Krystall des Magnesiums auf. Man nennt diese Anordnung die „hexagonal dichteste Kugelpackung“.

§ 9. Reguläre Punktsysteme und diskontinuierliche Bewegungsgruppen.

Die Krystallographie führt uns auf die rein geometrische Frage, alle möglichen regelmäßigen Anordnungen von Objekten, z. B. Atomen, festzustellen. Da wir uns diese Objekte für viele Zwecke durch Punkte versinnbildlichen können, nennen wir eine derartige Anordnung ein reguläres Punktsystem. Im Sinne der vorangegangenen Überlegungen werden wir also das reguläre Punktsystem durch die folgenden drei Eigenschaften definieren:

1. Das reguläre ebene bzw. räumliche Punktsystem soll unendlich viele Punkte enthalten, und zwar soll die Zahl der in einem Kreis bzw. in einer Kugel liegenden Punkte mit der zweiten bzw. dritten Potenz des Radius ins Unendliche wachsen.
2. Das reguläre Punktsystem soll in jedem endlichen Gebiet nur endlich viele Punkte enthalten.
3. Das reguläre Punktsystem soll zu jedem seiner Punkte dieselbe Lagerung besitzen.

Die ersten zwei definierenden Eigenschaften sind ohne weiteres verständlich. Die dritte Eigenschaft läßt sich folgendermaßen näher erläutern: Ich ziehe von einem bestimmten Punkt des Systems aus die Verbindungslinien nach sämtlichen anderen Punkten des Systems und verfare in der gleichen Weise mit irgendeinem anderen Punkt des Systems. Die dritte definierende Eigenschaft besagt dann, daß die beiden auf diese Weise entstandenen Streckengebilde einander kongruent sind, d. h. daß durch eine bestimmte Bewegung der Ebene oder des Raumes das eine Gebilde in das andere übergeführt werden kann. So könnte ich, wenn ich mich in einem bestimmten Punkt des Systems befände, nicht durch Messungen entscheiden, welcher Punkt des Systems das ist, da eben alle Punkte zueinander die gleiche Lage haben. Um die dritte Forderung zu erfüllen, brauche ich aber nicht erst die Verbindungslinien zu ziehen; ich brauche nur zu fordern, daß jeder Punkt des Systems in jeden anderen durch eine gewisse Bewegung der Ebene oder des Raumes derartig überführbar sein soll, daß sich an jeder Stelle, die vorher mit einem Systempunkt besetzt war, auch nach der Bewegung ein Systempunkt befindet und umgekehrt. Wir sagen von einer solchen Bewegung, daß sie das Punktsystem unverändert

oder invariant läßt, und nennen jede derartige Bewegung eine *Deckbewegung* des Systems. Mit Hilfe dieses Begriffs kann ich die dritte definierende Eigenschaft folgendermaßen umformen:

3. Jeder Punkt des regulären Punktsystems soll in jeden anderen durch eine Deckbewegung des Systems überführbar sein.

Aus unserer Definition des regulären Punktsystems ergibt sich, daß die Punktgitter, die wir durch ihre Erzeugung aus dem Parallelogramm bzw. dem Parallelepipet definiert hatten, zu den Punktsystemen gehören. Die Einführung eines neuen, übergeordneten Begriffes ist dadurch gerechtfertigt, daß es Punktsysteme wie z. B. das Diamantgerüst gibt, die keine Punktgitter sind.

Wir wollen nun darangehen, die Gesamtheit aller verschiedenen regulären Punktsysteme aufzustellen. Es zeigt sich dabei, daß zu den Punktgittern nur noch Gebilde hinzukommen, die, ähnlich wie das Diamantgerüst, aus mehreren ineinandergeschobenen kongruenten und parallelgestellten Gittern bestehen. Zunächst erscheinen die Eigenschaften, durch die die Punktsysteme definiert sind, als so allgemein, daß man nicht glauben sollte, es ließe sich über diese Gebilde überhaupt eine geometrische Übersicht gewinnen. In Wahrheit aber ist diese Übersicht dennoch möglich; wir gelangen zu ihr, indem wir die Deckbewegungen des Systems ins Auge fassen.

Die Gesamtheit aller Deckbewegungen eines Punktsystems hat zwei charakteristische Eigenschaften, die ihre Untersuchung wesentlich erleichtern: erstens ergeben zwei Deckbewegungen hintereinander ausgeführt stets wieder eine Deckbewegung, und zweitens ist diejenige Bewegung, die irgendeine Deckbewegung des Systems rückgängig macht, stets selber eine Deckbewegung. Jede Gesamtheit von Abbildungen, die die entsprechenden beiden Eigenschaften besitzt, wird in der Mathematik eine *Gruppe* von Abbildungen genannt. Um die beiden Eigenschaften bequem rechnerisch verwerten zu können, wollen wir jede Abbildung mit einem Buchstaben, z. B. a , b bezeichnen; die Abbildung, die entsteht, wenn ich erst a und dann b ausführe, soll dann stets durch das Symbol ab gekennzeichnet sein. Die Abbildung, die a rückgängig macht, bezeichnen wir mit a^{-1} , sie wird auch die zu a *inverse* Abbildung genannt. Wenn wir beide Eigenschaften, durch die eine Gruppe definiert wird, kombinieren, werden wir z. B. auf die Abbildung aa^{-1} geführt. Diese Operation läßt offenbar alle Punkte ungeändert. Trotzdem ist es bequem, sie als einen Sonderfall einer Abbildung mitzuzählen. Wir nennen sie die identische Transformation oder die Identität und bezeichnen sie mit dem Buchstaben e . Bei der symbolischen Zusammensetzung der Abbildungen spielt e eine entsprechende Rolle wie die Eins beim Multiplizieren von Zahlen. Es ist stets $ae = ea = a$.

Wenn ich auf einen Punkt des Punktsystems alle möglichen Deckbewegungen des Systems anwende, so besagt die dritte definierende Eigen-

schaft der Punktsysteme, daß ich dabei aus diesem einen Punkt sämtliche anderen Punkte des Systems erhalte. Aus der Definition der Deckbewegung folgt andererseits, daß dabei nie ein Systempunkt in einen Punkt übergehen kann, der dem System nicht angehört; denn sonst würde die Bewegung das System nicht invariant lassen. Gegenüber einer gegebenen Abbildungsgruppe nennt man allgemein einen Punkt zu einem anderen *äquivalent*, wenn der eine Punkt aus dem anderen durch eine Abbildung der Gruppe hervorgeht. Demnach besteht das Punktsystem aus der Gesamtheit aller zu einem festen Punkt äquivalenten Punkte gegenüber der Gruppe von Deckbewegungen. Nach der zweiten definierenden Eigenschaft der Punktsysteme gibt es also zu einem Punkt des Systems nur endlich viele äquivalente Punkte in jedem endlichen Gebiet. Man nennt nun allgemein eine Abbildungsgruppe *diskontinuierlich*, wenn es zu jedem Punkt in jedem endlichen Gebiet nur endlich viele gegenüber der Gruppe äquivalente Punkte gibt. Hiernach muß die Gruppe der Deckbewegungen eines Punktsystems stets diskontinuierlich sein. Zwar wäre es an sich zulässig, daß ein Punkt, der dem System nicht angehört, unendlich viele äquivalente Punkte in einem endlichen Gebiet hätte. Es ist aber anschaulich evident und auch leicht streng zu beweisen, daß dann auch Punkte des Systems selbst unendlich viele äquivalente Punkte in einem endlichen Gebiet haben müßten.

Wir haben also die Gruppen von Deckbewegungen eines Punktsystems ausschließlich unter den diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der Ebene und des Raumes zu suchen und die Punktsysteme wiederum ausschließlich unter den Systemen der zu irgendeinem Punkt gegenüber einer solchen Gruppe äquivalenten Punkte. Auf diesem scheinbaren Umweg läßt sich nun die Untersuchung gerade am einfachsten durchführen. Es stellt sich nämlich heraus, daß es überhaupt nur endlich viele wesentlich verschiedene diskontinuierliche Bewegungsgruppen in der Ebene und im Raum gibt.

Untersucht man für diese endlich vielen Gruppen die Systeme der zu einem Punkt äquivalenten Punkte, so besitzen diese Systeme sicher die zweite und die dritte definierende Eigenschaft der Punktsysteme. Dagegen gibt es Gruppen, bei denen dann die erste Eigenschaft nicht besteht. Diese Gruppen werden wir also auszuschneiden haben. Die übrigbleibenden Gruppen und nur sie führen zu den Punktsystemen. Wegen der Bedeutung der Punktsysteme für die Krystallographie nennt man diejenigen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen, die auf Punktsysteme führen, die krystallographischen Bewegungsgruppen.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung der diskontinuierlichen Bewegungsgruppen. Wir wollen uns aber auf den Fall der Ebene beschränken; die analogen Untersuchungen im Raum sind so weitläufig, daß sie den Rahmen dieses Buches sprengen würden. Schon die ebenen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen erfordern eine ziemlich umfang-

reiche Betrachtung. Wir wollen trotzdem diese Betrachtung vollständig durchführen, weil wir dabei die Methoden kennenlernen, die auch für den räumlichen Fall typisch sind.

§ 10. Ebene Bewegungen und ihre Zusammensetzung; Einteilung der ebenen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen.

Eine Abbildung einer Ebene auf sich wird im folgenden als ebene Bewegung bezeichnet, wenn man die Endlage aus der Anfangslage durch eine *stetige* Bewegung der als starr gedachten Ebene erreichen kann, und zwar so, daß dabei die Bahnen aller Punkte der Ebene *in ihr selbst* verlaufen. Im übrigen soll aber eine ebene Bewegung nur durch Ausgangs- und Endlage gekennzeichnet sein, ohne Rücksicht darauf, wie im jeweils vorliegenden Falle der Übergang wirklich vollzogen wurde; natürlich kann er auf sehr verschiedene Art geschehen, auch so, daß die Bahnkurven teilweise die Ebene verlassen, oder daß Verzerrungen eintreten, die sich zum Schluß wieder aufheben. Wir fordern nur die *Möglichkeit* eines Übergangs, wie er zu Anfang beschrieben wurde. Es wird eine unserer ersten Aufgaben sein, für jede vorgelegte ebene Bewegung eine möglichst einfache Art des Übergangs zu finden.

Die einfachsten ebenen Bewegungen sind die Parallelverschiebungen oder Translationen, bei denen jeder Punkt in der gleichen Richtung und um die gleiche Strecke in der Ebene fortbewegt wird und jede Gerade zu sich selbst parallel bleibt.

Ein weiterer bekannter Typus ebener Bewegungen sind die Drehungen der Ebene um irgendeinen Punkt um einen bestimmten Winkel. Dabei wird die Richtung jeder Geraden um diesen Winkel gedreht¹, und außer dem Drehpunkt selbst bleibt kein Punkt der Ebene ungeändert.

Auch bei einer beliebigen ändern von der Identität verschiedenen ebenen Bewegung kann es höchstens einen Punkt geben, der ungeändert bleibt. Wenn wir nämlich zwei Punkte der Ebene festhalten, so bleibt außer der identischen Abbildung nur eine einzige Abbildung der Ebene auf sich übrig, die durch starre Bewegung erzeugt werden kann; sie entsteht, wenn die Ebene um die Verbindungsgrade der beiden festgehaltenen Punkte um 180° gedreht wird. Dieser Übergang gehört nicht zu der eingangs beschriebenen Art. Auch läßt sich die Abbildung nicht durch einen solchen Übergang herstellen. Denn bei ihr wird ein rechtsherum umlaufener Kreis stets in einen linksherum umlaufenden Kreis verwandelt, während eine ebene Bewegung aus Stetigkeitsgründen nie einen Umlaufsinn umkehren kann. Aus dieser Überlegung ergibt

¹ Für Geraden, die durch den Drehpunkt gehen, ist das evident. Für jede andere Gerade folgt es daraus, daß sie eine durch den Drehpunkt gehende Parallele besitzt, und daß parallele Geraden bei jeder Bewegung parallel bleiben.

sich, daß eine ebene Bewegung durch die Abbildung zweier Punkte vollständig bestimmt ist. Denn zwei ebene Bewegungen, die beide irgend zwei Punkte in gleicher Weise abbilden, können sich nur durch eine ebene Bewegung unterscheiden, die zwei Punkte festläßt, d. h. gar nicht.

Die Übersicht über die ebenen Bewegungen wird nun außerordentlich durch die Tatsache vereinfacht, daß überhaupt jede solche Bewegung sich durch eine einzige Translation oder eine einzige Drehung erzeugen läßt. Um diese Behauptung zu beweisen, denke ich mir eine bestimmte ebene Bewegung b vorgegeben; wenn wir den trivialen Fall beiseite lassen, daß b die Identität ist, so kann ich einen Punkt A herausgreifen, der in einen anderen Punkt A' übergeht. B sei der Mittelpunkt der Strecke AA' .

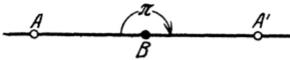


Abb. 58.

B kann entweder fest bleiben oder einen anderen Punkt B' zum Bildpunkt haben. Im ersten Fall (Abb. 58) ist meine Behauptung jedenfalls zutreffend. Dann ersetze ich nämlich die gegebene Bewegung b durch die

Drehung um B um den Winkel π . Diese Drehung b' führt die Punkte A und B in dieselben Bildpunkte A' und B über wie b ; da wir aber gesehen haben, daß eine ebene Bewegung durch zwei Punkte und ihre Bildpunkte schon gekennzeichnet ist, muß b' mit b übereinstimmen. Geht nun B in einen anderen Punkt B' über, so unterscheide ich wieder den Sonderfall, daß B' auf die Gerade AA' fällt, von dem allgemeineren Fall, daß AA' und BB' verschiedene Geraden sind. Im ersten Fall ist zu beachten, daß B' eindeutig bestimmt ist; der Abstand zwischen A

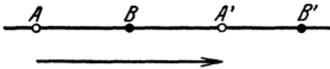


Abb. 59.

und B muß ja bei der Bewegung b ungedändert bleiben. Da aber nach Konstruktion $AB = A'B$ ist, muß auch $A'B' = A'B$ sein. Dadurch und durch die Forderung $B' \neq B$ ist B' in der Tat eindeutig bestimmt

(Abb. 59). Dann können wir aber b durch die Translation ersetzen, die A in A' überführt; denn diese Translation führt auch B in den vorgeschriebenen Bildpunkt B' über. Es bleibt also nur noch der letzte Fall zu erledigen. Dann errichte ich in B auf AB das Lot und errichte ebenso in B' auf $A'B'$ das Lot (Abb. 60).

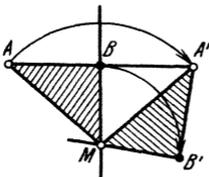


Abb. 60.

Da die beiden Lote nach unserer Voraussetzung und Konstruktion weder parallel sind noch zusammenfallen, besitzen sie einen Schnittpunkt M . Ich behaupte, daß ich b durch diejenige Drehung um M ersetzen kann, die A in A' überführt. Zum Beweise habe ich zu zeigen,

daß dabei auch B in B' übergeht; das kommt darauf hinaus, daß die Dreiecke AMB und $A'MB'$ kongruent sind. Nun ist aber einerseits $AMB \cong A'MB'$, da beide Dreiecke bei B rechtwinklig sind und gleiche Katheten haben, und andererseits ist $A'B'M \cong A'BM$, da die

Dreiecke bei B und B' rechtwinklig sind, die Hypotenuse $A'M$ gemein haben und da, wie bereits erwähnt, $A'B' = AB = A'B$ ist.

Unser Resultat wird formal noch einfacher, wenn wir die Translationen als Drehungen um den Winkel Null und einen unendlich fernen Mittelpunkt ansehen. Anschaulich läßt sich diese Auffassung leicht rechtfertigen. Wenn ich nämlich eine Reihe von Drehungen betrachte, bei denen die Drehwinkel unbegrenzt abnehmen und bei denen sich der Drehpunkt unbegrenzt in einer bestimmten Richtung entfernt, so läßt es sich einrichten, daß diese Bewegungen sich immer weniger von einer bestimmten Translation unterscheiden, wenigstens innerhalb eines festen endlichen Gebiets.

Nach dieser Auffassung ist jede ebene Bewegung eine Drehung um einen bestimmten Winkel, der bei den Translationen gleich Null zu setzen ist. Wenn ich demnach zwei Drehungen hintereinander ausführe, muß ich das Resultat auch durch eine einzige Drehung ersetzen können, zu der wieder ein bestimmter Drehwinkel gehört. Es gilt nun der einfache Satz von der Additivität der Drehwinkel:

Eine Drehung um den Winkel α und eine Drehung um den Winkel β ergeben zusammengesetzt stets eine Drehung um den Winkel $\alpha + \beta$.

Wir hatten nämlich zu Beginn erwähnt, daß der Drehwinkel an der Richtungsänderung einer beliebigen Geraden gemessen werden kann. Dieser Satz gilt auch für die Translationen in unserer neuen Definition, da die Translationen alle Richtungen ungeändert lassen. Danach ist der Satz evident. Aus ihm folgt z. B., daß zwei Drehungen um entgegengesetzt gleiche Winkel und um verschiedene Drehpunkte stets eine Translation ergeben. Denn der Drehwinkel der zusammengesetzten Bewegung ist Null, und die Identität kann nicht entstehen, da keiner der beiden Drehpunkte fest bleibt.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns wieder zu den diskontinuierlichen ebenen Bewegungsgruppen. Wir können sie nämlich jetzt in einfacher Weise einteilen. Wir haben nur anzugeben, was für Translationen vorkommen und welche Drehwinkel und Drehpunkte auftreten. Es erweist sich als zweckmäßig, die Translationen an erster Stelle zu berücksichtigen. Wir machen also die Fallunterscheidung:

I. Alle in der Gruppe vorkommenden Translationen haben parallele Richtungen.

II. Es gibt in der Gruppe zwei Translationen, deren Richtungen nicht parallel sind.

Der Fall *I* soll auch diejenigen Gruppen umfassen, die überhaupt keine Translationen enthalten.

Zur Unterteilung der beiden Fälle ziehen wir nunmehr die Drehungen heran. Wir unterscheiden: *1.* Gruppen, die keine Drehungen enthalten, *2.* Gruppen, die Drehungen enthalten.

Außer durch Aufstellung der in einer Gruppe vorhandenen Drehungen und Translationen kann man jede Gruppe auch durch eine einfache geometrische Figur kennzeichnen, den *Fundamentaltbereich*. Als Fundamentaltbereich einer Gruppe bezeichnet man jedes zusammenhängende Gebiet, das in seinem Innern kein Paar äquivalenter Punkte enthält und das sich nicht weiter vergrößern läßt, ohne diese Eigenschaft zu verlieren. Solche Fundamentaltbereiche spielen bei allen diskontinuierlichen Abbildungsgruppen eine wichtige Rolle, nicht nur bei den Bewegungsgruppen. Im allgemeinen ist es keine einfache Aufgabe, einen Fundamentaltbereich für eine gegebene Gruppe zu bestimmen, oder überhaupt die Existenz eines Fundamentaltbereichs für eine Gattung von Gruppen zu beweisen. Für die ebenen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen lassen sich aber in jedem Fall leicht Fundamentaltbereiche konstruieren. Es zeigt sich, daß im Fall *I* jeder Fundamentaltbereich sich ins Unendliche erstreckt, während im Fall *II* die Fundamentaltbereiche stets endlich sind.

Wir wollen noch einige zwischen den Drehungen und Translationen einer Gruppe stets geltenden Beziehungen erwähnen, die wir mehrfach verwenden werden und die wir deshalb als Hilfssätze numerieren:

1. Hilfssatz: Kommt in einer Gruppe eine Drehung um einen Punkt P um den Winkel α vor und ist Q zu P äquivalent, so enthält die Gruppe auch eine Drehung um Q um denselben Winkel α .

Beweis: Nach Voraussetzung enthält die Gruppe eine Bewegung b , die P in Q überführt, sowie die Drehung d um P um α . Unter Anwendung der im vorigen Paragraphen erklärten Symbolik betrachten wir nun die Bewegung $b^{-1}db$, die nach den beiden Gruppenpostulaten ebenfalls der Gruppe angehört. Diese Bewegung muß eine Drehung um den Winkel α sein, denn ist β der Drehwinkel von b , so ist der Drehwinkel von $b^{-1}db$ nach dem Additionssatz der Drehwinkel: $-\beta + \alpha + \beta = \alpha$. Der Drehpunkt muß aber Q sein; denn Q wird durch b^{-1} in P übergeführt, P bleibt bei d fest, und P wird durch b wieder nach Q zurückgebracht.

2. Hilfssatz: Enthält eine Gruppe eine Drehung um den Winkel α und eine Translation t , so enthält sie auch die Translation t' , deren Richtung mit der von t den Winkel α bildet und die der Größe nach mit t übereinstimmt.

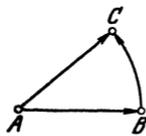


Abb. 61.

Beweis: d sei eine in der Gruppe vorkommende Drehung um α , ihr Drehpunkt sei A . A gehe durch t in B über, und B gehe durch d in C über (Abb. 61). Dann ist einfach $t' = d^{-1}td$. Die so definierte Bewegung gehört nämlich der Gruppe an und ist nach dem Additionssatz der Drehwinkel eine Translation. Wir haben nur noch zu zeigen, daß dabei A in C übergeht; in der Tat bleibt A während d^{-1} fest, geht durch t in B über und kommt von dort durch d nach C .

Nach diesem Satz können z. B. bei den Gruppen der Gattung I keine anderen Drehwinkel vorkommen als π , falls überhaupt Translationen in der Gruppe vorhanden sind. Denn sonst gäbe es mit jeder Translationsrichtung eine andere, die ihr nicht parallel ist.

§ 11. Die diskontinuierlichen ebenen Bewegungsgruppen mit unendlichem Fundamentbereich.

Wir wollen zunächst den Fall I erledigen, der die einfachsten Gruppen liefert. Zunächst nehmen wir den Unterfall $I, 1$; dann haben wir es also mit Gruppen zu tun, die keine Drehung enthalten. Wir gehen nun von einem beliebigen Punkt A aus (Abb. 62). Da in endlicher Entfernung von A nur endlich viele ihm äquivalente Punkte liegen, muß es auch einen solchen Punkt A_1 unter ihnen geben, der den kleinsten möglichen Abstand von A hat; es kann natürlich mehrere solcher Punkte kleinsten Abstands von A geben; ich denke mir einen herausgegriffen. Die Bewegung a in der Gruppe, die A in A_1 überführt, muß eine Translation sein, da ja nach Voraussetzung keine Drehungen in der Gruppe

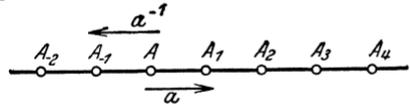


Abb. 62.

vorkommen. Verlängere ich die Strecke AA_1 um sich selbst über A_1 hinaus bis A_2 , so muß auch A_2 mit A äquivalent sein. A_2 entsteht nämlich aus A durch die Translation aa . Ebenso liegen auf der Geraden AA_1 noch weitere A äquivalente Punkte A_3, A_4, \dots in immer gleichem Abstand voneinander, die aus A entstehen, wenn ich a beliebig oft wiederhole. Ebenso liegen auch auf der anderen Seite von A auf der Geraden AA_1 noch unendlich viele äquidistante Punkte A_{-1}, A_{-2}, \dots , die zu A äquivalent sind und die aus A entstehen, wenn ich a^{-1} einmal oder mehrmals anwende. Ich behaupte nun, daß diese Skala auf der Geraden AA_1 auch alle zu A äquivalenten Punkte vollständig erschöpft. Denn alle Translationen, die in der Gruppe vorkommen, müssen nach Voraussetzung zu AA_1 parallelgerichtet sein. Jeder beliebige zu A äquivalente Punkt muß also auf der Geraden AA_1 liegen. Fiele nun ein solcher Punkt A' nicht auf einen Teilpunkt der Skala, so müßte er ins Innere eines Intervalls $A_n A_{n+1}$ fallen (Abb. 63). Die Strecke $A_n A'$ wäre also kürzer als AA_1 . Nun kann ich

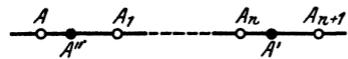


Abb. 63.

aber durch eine in der Gruppe enthaltene Translation A_n in A überführen, und dabei ginge A' in einen Punkt A'' über, der näher an A läge als A_1 . Das steht im Widerspruch damit, daß wir zu Beginn A_1 als einen zu A äquivalenten Punkt kleinsten Abstands von A ausgewählt hatten.

Wir haben durch diese Überlegung den Fall $I, 1$ vollständig erledigt; denn wir haben zu einem beliebigen Punkt die sämtlichen äquivalenten

gefunden und damit auch alle Bewegungen, die überhaupt in der Gruppe vorkommen. Es sind die Translationen a und a^{-1} , einmal oder mehrmals angewandt. Alle Gruppen der Gattung I, I sind also im wesentlichen identisch.

Um einen Fundamentalbereich aufzustellen, können wir einfach von einer Geraden ausgehen, die nicht parallel AA_1 ist, also etwa dem Lot auf dieser Strecke. Durch a wird diese Gerade auf eine ihr parallele Gerade abgebildet, und der Streifen zwischen den Parallelen ist offenbar ein Fundamentalbereich¹ (Abb. 64). Denn zwei innere Punkte dieses Streifens sind nie äquivalent. Da andererseits die beiden begrenzenden Geraden des Streifens einander äquivalent sind, so kann ich dem Streifen nirgends ein Stück anfügen, ohne daß das so vergrößerte Gebiet ein Paar von äquivalenten Punkten enthielte. Ich kann aber auf andere Weise den Fundamentalbereich noch beliebig abändern, ohne

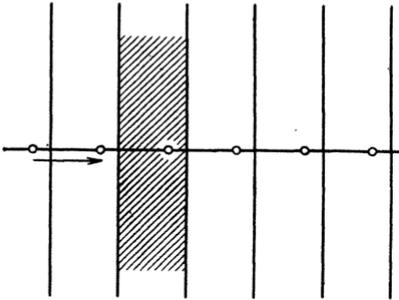


Abb. 64.

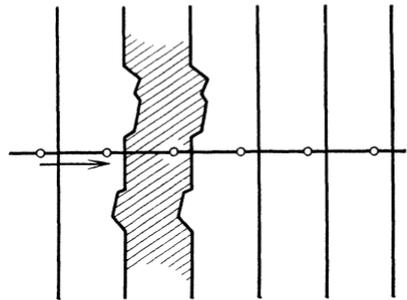


Abb. 65.

daß er seine Eigenschaft verliert. Ich brauche nur auf der einen Seite ein Stück anzusetzen und auf der anderen Seite ein äquivalentes Stück fortzulassen (Abb. 65). Diese Art von Abänderung lassen auch die Fundamentalbereiche aller weiter zu betrachtenden Gruppen und überhaupt aller Abbildungsgruppen zu. Man wählt unter diesen vielen Möglichkeiten stets einen Fundamentalbereich von möglichst einfacher Gestalt aus.

Wenn ich den ganzen Fundamentalbereich der Translation a unterwerfe, so erhalte ich einen kongruenten angrenzenden Streifen. Ich kann auf diese Weise die ganze Ebene mit den Fundamentalbereichen der Gruppe einfach und lückenlos überdecken. Diese Erscheinung tritt auch bei allen anderen im folgenden zu betrachtenden Gruppen ein, und man kann allgemein beweisen, daß die Fundamentalbereiche beliebiger diskontinuierlicher Abbildungsgruppen sich stets einfach und

¹ Dabei hat man festzusetzen, daß etwa die Punkte der linken Grenzgeraden mit zum Fundamentalbereich gehören, die der rechten dagegen nicht; andernfalls würden entweder äquivalente Punkte zum Bereich gehören, oder derselbe wäre noch unvollständig.

lückenlos aneinanderschließen. Allerdings brauchen sie nicht immer die ganze Ebene zu erfüllen, wie wir in einem späteren Kapitel an einem Beispiel sehen werden (S. 228).

Die Gruppe $I, 1$ führt nicht auf ein reguläres Punktsystem, da die einem festen Punkt äquivalenten Punkte eine gradlinige Skala bilden, also die erste definierende Forderung des Punktsystems unerfüllt lassen.

Trotzdem war die Betrachtung dieser Gruppen für das Studium der Punktsysteme nicht ohne Bedeutung. Wenn wir nämlich in einer beliebig kompliziert gebauten diskontinuierlichen Bewegungsgruppe die Gesamtheit aller Translationen betrachten, die irgendeiner in der Gruppe enthaltenen Translation parallelgerichtet sind, so bildet diese Gesamtheit von Translationen wieder eine Gruppe, denn beide Gruppenpostulate sind erfüllt; man bezeichnet eine Gruppe, die in einer umfassenderen Gruppe enthalten ist, als eine Untergruppe der umfassenderen Gruppe. Nun muß jede Untergruppe einer diskontinuierlichen Gruppe selbst diskontinuierlich sein. Wir können daher schließen, daß die herausgegriffene Gesamtheit von Translationen eine Gruppe $I, 1$ ist und die von uns angegebene Struktur besitzt, einerlei von welcher umfassenderen Gruppe wir ausgehen. Diese und ähnliche Schlußweisen werden im folgenden wiederholt zur Anwendung kommen.

Wir betrachten nun den Fall $I, 2$, also Gruppen, die Drehungen enthalten, aber keine zwei Translationen in nichtparallelen Richtungen. Dann haben wir zu unterscheiden, ob die Gruppe überhaupt eine Translation enthält oder nicht. Beginnen wir mit der einfacheren Möglichkeit — wir wollen sie als $I, 2, \alpha$, einordnen —, daß keine Translation vorhanden ist. Ich behaupte, daß dann alle Drehungen denselben Drehpunkt haben müssen. Denn gäbe es zwei Drehungen a, b mit den zwei verschiedenen Mittelpunkten A und B , so könnte die in der Gruppe enthaltene Bewegung $a^{-1}b^{-1}ab$ nach dem Additionssatz der Drehwinkel nur eine Translation oder die Identität sein. Wäre nun B' der Bildpunkt von B vermöge a (Abb. 66); dann wäre B' von B verschieden, weil B von A verschieden vorausgesetzt war und eine Drehung keinen Punkt außer dem Drehpunkt fest läßt. Wäre daher B'' das Bild von B' vermöge b , so wäre auch B'' von B' verschieden. Nun kann man aber leicht sehen, daß B' vermöge $a^{-1}b^{-1}ab$ gerade in B'' überginge. Also wäre die Bewegung $a^{-1}b^{-1}ab$ nicht die Identität, sondern eine Translation, entgegen der Voraussetzung, daß in der Gruppe keine Translationen vorkommen.

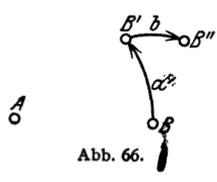


Abb. 66.

Sei nun A der (einzige) Drehpunkt der Gruppe und Q irgendein anderer Punkt. Dann liegen alle zu Q äquivalenten Punkte auf dem durch Q gehenden Kreise um A . Wegen der Diskontinuität der Gruppe kann es also nur endlich viele zu Q äquivalente Punkte geben, und da

die Gesamtheit dieser Punkte durch jede in der Gruppe enthaltene Drehung um A in sich übergeführt werden muß, so müssen die Punkte äquidistant auf der Kreisperipherie liegen (Abb. 67). Ist Q_1 unter diesen Punkten einer der beiden zu Q benachbarten Punkte, so ist $\sphericalangle QAQ_1$ der kleinste Drehwinkel, der in der Gruppe vorkommt, und wenn die Anzahl der zu Q äquivalenten Punkte (Q eingerechnet) n beträgt, so hat dieser Winkel notwendig den Wert $2\pi/n$, und alle in der Gruppe enthaltenen Bewegungen bestehen aus Drehungen um A um die positiven und negativen Vielfachen dieses Winkels, von denen

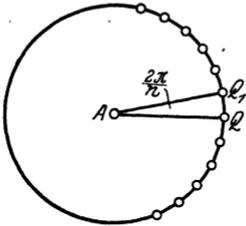


Abb. 67.

es nur endlich viele geometrisch verschiedene gibt. Damit ist der Fall $I, 2, \alpha$ erledigt. Als Fundamentalbereich eignet sich ein Winkelraum mit der Spitze in A und der Öffnung $2\pi/n$ (Abb. 68). Der Fundamentalbereich ist also wieder unendlich, und die Gruppe führt auf kein Punktsystem, da es zu jedem Punkt nur endlich viele äquivalente gibt, also die erste Forderung S. 50 nicht erfüllt ist.

Die Gruppe besitzt für die übrigen diskontinuierlichen ebenen Bewegungsgruppen eine ähnliche Bedeutung wie die vorher betrachtete.

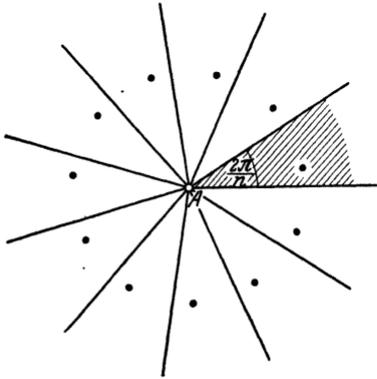


Abb. 68.

Kommt in einer beliebigen solchen Gruppe eine Drehung um einen Punkt A vor, so bildet die Gesamtheit der in der Gruppe enthaltenen Drehungen um A eine diskontinuierliche Untergruppe, muß also den Typus $I, 2, \alpha$ haben. Daraus folgt, daß die Drehwinkel aller dieser Drehungen aus den Vielfachen eines Winkels $2\pi/n$ bestehen müssen. Wir können also den Punkt A durch die ganze Zahl n charakterisieren und als n -zähligen Drehpunkt bezeichnen.

Nun haben wir unter den Gruppen vom Typus I nur noch den Fall $I, 2, \beta$ zu erledigen, daß also eine Drehung d und eine Translation t vorhanden sind und daß alle weiteren Translationen zu t parallel sind. Nach dem zweiten Hilfssatz (S. 56, 57) muß d den Drehwinkel π haben, es gibt daher nach der soeben eingeführten Ausdrucksweise nur 2-zählige Drehpunkte. Sei A_1 ein solcher Punkt (Abb. 69). Die Gesamtheit aller Translationen der Gruppe muß eine Gruppe vom Typ $I, 1$ bilden. Wir betrachten die geradlinige Skala A_1, A_2, \dots der zu A_1 äquivalenten Punkte, die dieser Untergruppe entspricht. Nach dem ersten Hilfssatz (S. 56) müssen alle diese Punkte 2-zählige Drehpunkte sein. Ich be-

haupte, daß außerdem die sämtlichen Mittelpunkte B_1, B_2, \dots der Strecken $A_n A_{n+1}$ 2-zählige Drehpunkte sind. Ist nämlich t die Translation, die A_1 in A_2 überführt und a_2 die Drehung um π um A_2 , so wird durch ta_2 das Punktepaar $A_1 A_2$ in $A_2 A_1$ übergeführt; denn durch t geht $A_1 A_2$ in $A_2 A_3$ über, und $A_2 A_3$ wird durch a_2 in $A_2 A_1$ verwandelt. Da die Drehung um B_1 um π ebenfalls $A_1 A_2$ in $A_2 A_1$ verwandelt, so muß ta_2 mit dieser Drehung identisch sein, also ist B_1 ein 2-zähliger Drehpunkt, und ebenso muß auch die ganze zu B_1 gehörige Skala, d. h. die Gesamtheit der Punkte B_n , aus 2-zähligen Drehpunkten bestehen. Außer diesen Drehpunkten A_n und B_n gibt es aber keine weiteren. Denn ist A irgendeiner der Punkte A_n und

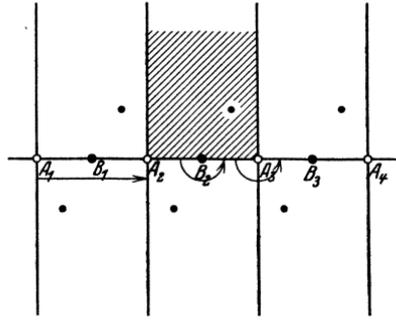


Abb. 69.

ist C irgendein beliebiger von A verschiedener Drehpunkt der Gruppe (Abb. 70), so muß C jedenfalls 2-zählig sein. Sei c die zugehörige Drehung um π , dann betrachte ich die Bewegung ac , wo a die Drehung um A um π bedeute. Ist A' das Bild von A bei c , so ist C der Mittelpunkt der Strecke AA' , und die Bewegung ac führt ebenfalls A in A' über. Nach dem Additionssatz der Drehwinkel muß ac aber eine Translation sein, demnach ist A' einer der Punkte, die aus A durch die in der Gruppe enthaltenen Translationen hervorgehen, d. h. A' ist einer der Punkte A_1, A_2, \dots , und C ist als Mittelpunkt von AA' notwendig einer der Punkte A_n oder B_n .

Damit haben wir einen vollständigen Überblick über die Gruppen $I, 2, \beta$. In Abb. 69 sind die beiden Klassen von Drehpunkten und ein geeigneter Fundamentbereich eingezeichnet. Es ist zu beachten, daß keiner der Punkte A_n einem der Punkte B_n äquivalent sein kann, da durch jede Drehung und jede Translation der Gruppe jede der beiden Skalen in sich übergeht.

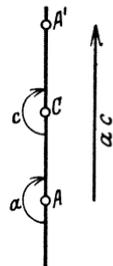


Abb. 70.

In Abb. 69 sind ferner einige einander äquivalente Punkte eingezeichnet, die von den Drehpunkten verschieden sind. Sie sind zickzackförmig angeordnet. Da sie in einem Streifen endlicher Breite Platz finden, erfüllen sie die erste Forderung nicht, die wir an die Punktsysteme gestellt haben; denn ihre Anzahl im Innern eines Kreises von wachsendem Radius nimmt offenbar nur proportional der ersten Potenz des Radius zu. Wie bei den ersten beiden Gruppen ist der Fundamentbereich unendlich.

Die Systeme äquivalenter Punkte, die nicht Drehpunkte sind, kann man sich als zwei kongruente und parallelgestellte Skalen vorstellen;

ähnlich werden wir bei den komplizierteren Gruppen zu Systemen kongruenter parallelgestellter Gitter kommen. Offenbar ist das Auftreten verschiedener Skalen und Gitter durch das Vorhandensein von Drehungen bedingt. In der Tat wird in unserem Fall die eine Skala durch jede Gruppendrehung in die andere verwandelt; nur die Skalen der Drehpunkte selbst bilden eine Ausnahme.

Da sich nun der Punkt wegen seiner allseitigen Symmetrie nicht zur Wiedergabe von Drehungen eignet, ist es anschaulicher, nicht zu Punkten, sondern zu anderen einfachen Figuren die Gesamtheit aller Äquivalenten aufzuzeichnen. Die einfachste Figur, die keine allseitige Symmetrie besitzt, besteht aus einem „Zeiger“, d. h. einem Punkt mit einer hindurchgehenden Richtung. In Abb. 71 *a*, *b* sind Systeme äquivalenter Zeiger für die Gruppe $I, 2, \beta$ gezeichnet; man erhält zwei verschiedene Typen von

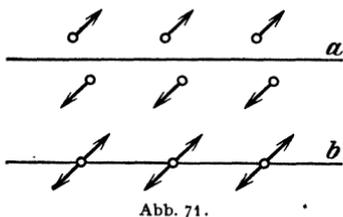


Abb. 71.

Figuren, je nachdem man den Zeiger eines Punktes allgemeiner Lage oder eines Drehpunktes zugrunde legt. Im ersten Fall erweist sich besonders der Vorteil, den die Einführung der Zeiger bringt: Die beiden Skalen sind durch verschiedene Zeigerrichtung voneinander unterschieden, während alle Zeiger derselben Skala gleichgerichtet sind.

§ 12. Die krystallographischen Bewegungsgruppen der Ebene. Reguläre Punkt- und Zeigersysteme. Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen.

Wir wenden uns nun zum Fall *II*, also zu Gruppen, die zwei nichtparallele Translationen enthalten. Es stellt sich heraus, daß alle diese Gruppen im Gegensatz zu den Gruppen vom Typus *I* stets auf Punktsysteme führen, daß wir sie also gemäß S. 52 als krystallographische Gruppen zu bezeichnen haben. Damit steht es im Zusammenhang, daß alle diese Gruppen endliche Fundamentalbereiche besitzen. Bei der Betrachtung dieser Gruppen stoßen wir in erster Linie wieder auf die ebenen Punktgitter. Wie wir schon erwähnten, bilden die Figuren äquivalenter Punkte und Zeiger stets entweder ein solches Punktgitter oder lassen sich als Systeme aus mehreren parallelgestellten kongruenten Gittern auffassen.

Wir hatten auf S. 55 den Fall *II* in zwei Unterfälle eingeteilt. Wir wollen zuerst den einfacheren Unterfall *II, 1* behandeln, in dem die Gruppe keine Drehungen enthält, dagegen zwei nichtparallele Translationen. In diesem Fall zeigt es sich nun, daß die zu einem Punkt äquivalenten Punkte stets ein ebenes Punktgitter bilden.

Zum Beweis gehe ich von einem beliebigen Punkt P aus und suche eine solche Translation t der Gruppe, die P in einen möglichst

nahen äquivalenten Punkt Q überführt (Abb. 72). Dann liefern die zu t parallelen Translationen eine Skala weiterer zu P äquivalenter Punkte auf der Geraden PQ . Nun gibt es nach Voraussetzung noch Translationen, die nicht zu PQ parallel sind, also gibt es noch außerhalb der Geraden PQ äquivalente Punkte zu P ; unter diesen suche ich mir wieder einen möglichst nahe bei P gelegenen Punkt R heraus, und t' sei die Translation aus unserer Gruppe, die P in R überführt. Dann ist jedenfalls $PR \cong PQ$. Ist S der Punkt, in den Q durch t' übergeht, so bilden die Punkte $PQRS$ ein Parallelogramm, und es ist ersichtlich, daß das durch dieses Parallelogramm erzeugte Gitter aus lauter äquivalenten Punkten besteht. Denn alle diese Punkte entstehen aus P , indem ich erst t (oder t^{-1}) und dann t' (oder t'^{-1}) je eine bestimmte Anzahl von Malen anwende. Ich behaupte nun, daß es keine weiteren zu P äquivalenten Punkte mehr geben kann, daß also auch alle in der Gruppe vorkommenden Translationen sich aus t und t' zusammensetzen lassen. Denn im entgegengesetzten Falle enthielte die Gruppe eine Translation u , die P in einen Punkt U überführte, der nicht zum Gitter gehörte. Dann könnte ich ein bestimmtes zu $PQRS$ kongruentes Gitterparallelogramm $P'Q'R'S'$ (Abb. 72) ausfindig machen, das U enthielte. Von den

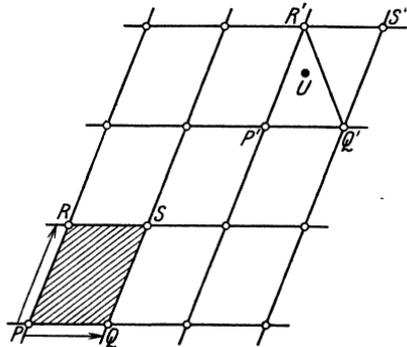


Abb. 72.

beiden kongruenten Dreiecken $P'Q'R'$ und $S'Q'R'$ müßte eines, etwa das erste, U enthalten. Nun müßte aber in der Gruppe die Translation $P' \rightarrow U$ vorkommen, die sich ja aus der Gruppentranslation $P' \rightarrow P$ und u zusammensetzen läßt. Das führt zu einem Widerspruch. Denn da nach unserer früheren Betrachtung $PR \cong PQ$ sein muß, so ist im Dreieck $P'Q'R'$ der Punkt R' am weitesten von P' entfernt. Die Translation $P' \rightarrow U$ wäre also kürzer als die Translation t' , die P in R , also P' in R' überführt. Deshalb müßte die Translation $P' \rightarrow U$ zu t parallel sein, und U müßte auf der Strecke $P'Q'$ liegen. Dann wäre aber die Translation $P' \rightarrow U$ auch kürzer als t , während doch t als eine der kürzesten in der Gruppe vorkommenden Translationen ausgewählt war. Entsprechend verläuft der Beweis, wenn man annimmt, U läge im Dreieck $S'Q'R'$. Dann hat man statt der Translation $P' \rightarrow U$ die Translation $S' \rightarrow U$ zu betrachten, was in gleicher Weise zu einem Widerspruch führt.

Die zueinander äquivalenten Punkte der Gruppen II, I bilden also stets Punktgitter, und wendet man die Gruppe auf einen Zeiger anstatt

auf einen Punkt an, so erhält man ein Gitter aus parallelgestellten Zeigern (Abb. 73).

Wenn wir uns jetzt zur letzten noch übrigen Kategorie *II, 2* wenden, wo also auch Drehungen zugelassen sind, so haben wir auf das soeben abgeleitete Ergebnis in jedem Fall zurückzugreifen. Denn auch die Gruppen *II, 2* enthalten wie *II, 1* zwei nichtparallele Translationen.

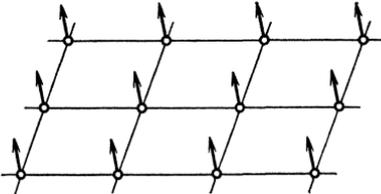


Abb. 73.

Die Gesamtheit der in einer Gruppe *II, 2* enthaltenen Translationen muß daher notwendig eine Untergruppe vom Typ *II, 1* sein. Wenn man also unter den Punkten, die in einer Gruppe *II, 2* zu einem beliebigen Punkt P äquivalent sind, nur diejenige Gesamtheit betrachtet, die aus P durch eine Translation hervorgehen, so erhält man ein Punktgitter. Die in der Gruppe enthaltenen Drehungen müssen dieses Gitter entweder in sich überführen oder aber einen Punkt des Gitters in einen nicht im Gitter enthaltenen Punkt Q verwandeln. Die Translationen der Gruppe erzeugen aber aus Q wieder ein Gitter, das zum Gitter von P kongruent und parallelorientiert ist und dessen Punkte sämtlich äquivalent zu Q und P sind. Durch dieses Verfahren, das offenbar so lange fortgesetzt werden kann, als es noch unverbrauchte zu P äquivalente Punkte gibt, kann ich aber nur endlich viele verschiedene Gitter erhalten, denn andernfalls könnte die Gruppe nicht diskontinuierlich sein. Diese Überlegung zeigt, daß es nur verhältnismäßig wenige Gruppen *II, 2*

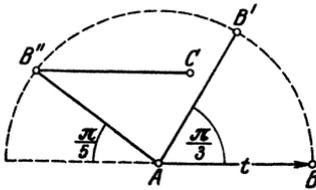


Abb. 74.

geben kann und daß die zugehörigen Punktsysteme stets aus parallelgestellten kongruenten Gittern bestehen.

Wir teilen die Gruppen *II, 2* nach den bei ihnen vorkommenden Drehwinkeln ein. Alle diese Drehwinkel müssen die Form $2\pi/n$ haben, wo n eine ganze Zahl ist; denn die Drehungen um einen Punkt, die

in der Gruppe vorkommen, bilden eine diskontinuierliche Untergruppe vom Typ *I, 2, α* . Ich behaupte nun, daß n keine anderen von 1 verschiedenen Werte annehmen kann als 2, 3, 4, 6. Zum Beweis betrachte ich einen n -zähligen Drehpunkt A der Gruppe (Abb. 74) und wähle in der Gruppe eine möglichst kurze Translation t aus, die A in B überführen möge. Durch Drehung um A um $2\pi/n$ werde B nach B' gebracht. Nach Hilfssatz 2, S. 56 enthält dann die Gruppe auch die Translation t' , die A in B' überführt. Wir betrachten nun die Bewegung $t^{-1}t'$, die offenbar B nach B' bringt. Nach dem Additionssatz der Drehwinkel ist $t^{-1}t'$ eine Translation, und da t als eine möglichst kurze

Translation der Gruppe ausgewählt war, so folgt $BB' \cong AB$. Daher ist $\sphericalangle BAB' = \frac{2\pi}{n} \cong \frac{\pi}{3}$, also $n \leq 6$. Wir haben nun noch den Fall $n = 5$ auszuschließen. Zu diesem Zweck gehen wir indirekt vor und nehmen A als 5-zähligen Drehpunkt (Abb. 74) an. Durch Drehung um A um $2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ gehe B in B'' über. Dann enthielte die Gruppe die Translation t'' , die A in B'' überführt. Dann würde aber die Translation $t''t$ ersichtlich A in C überführen, und da C näher an A liegt als B , so gäbe es im Widerspruch zur Voraussetzung eine kürzere Translation als t in der Gruppe.

Somit können in den Gruppen $II, 2$ in der Tat nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Drehpunkte auftreten. Ist φ der kleinste in einer solchen Gruppe auftretende Drehwinkel, so haben wir die vier Unterfälle zu diskutieren:

$$\begin{aligned}
 II, 2, \alpha: & \quad \varphi = \pi, \\
 II, 2, \beta: & \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}, \\
 II, 2, \gamma: & \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \\
 II, 2, \delta: & \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß zu jedem dieser vier Fälle genau eine Gruppe gehört.

$II, 2, \alpha$: Es muß in der Gruppe wenigstens einen 2-zähligen Drehpunkt A geben. Die Untergruppe der in der Gruppe enthaltenen Translationen liefert zu A als äquivalente weitere 2-zählige Drehpunkte die Punkte eines Gitters; $ABCD$ sei eines seiner erzeugenden Parallelogramme (Abb. 75). Wir können nun auf die Betrachtungen zurückgreifen, die wir über die Gruppen $I, 2, \beta$ angestellt hatten (S. 60, 61). Danach muß der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke irgend zweier Punkte des Gitters

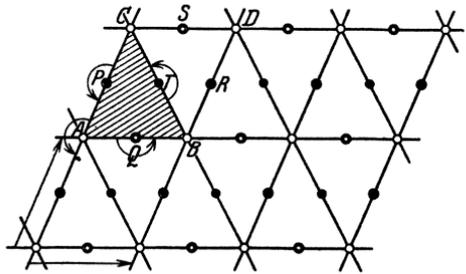


Abb. 75.

ebenfalls 2-zähliger Drehpunkt sein, und umgekehrt muß jeder 2-zählige Drehpunkt eine solche Verbindungsstrecke halbieren. Wir betrachten nun den Mittelpunkt Q von AB , den Mittelpunkt P von AC und den Mittelpunkt T von BC und AD . Alle diese Punkte sind paarweise inäquivalent. Sie sind nach dem soeben Gesagten sämtlich 2-zählige Drehpunkte und mit ihren zugehörigen Gittern erschöpfen sie auch alle 2-zähligen Drehpunkte, die in der Gruppe vorkommen. Wir haben also vier verschiedene Klassen von 2-zähligen Drehpunkten. Die Drehungen um diese Punkte und die Translationen des Gitters $ABCD$ erschöpfen alle Transformationen der Gruppe, da nach unserer Annahme

keine anderen als 2-zählige Drehpunkte vorkommen können. Als Fundamentalbereich können wir offenbar das Dreieck ABC verwenden.

In Abb. 76 und 77 sind die Figuren aus äquivalenten Zeigern gezeichnet, die man erhält, je nachdem man von einem Punkt allgemeiner Lage (Abb. 76) oder einem Drehpunkt (Abb. 77) ausgeht. Im ersten Fall erhalten wir zwei ineinandergestellte Gitter, die durch entgegengesetzte Zeigerrichtung unterschieden sind. Im zweiten Fall rücken die Gitter in eins zusammen, da in jedem Drehpunkt zwei Zeiger ansetzen. Betrachtet man statt der Zeiger nur die Punkte, so liefern beide Figuren je ein reguläres Punktsystem; aber dann unterscheidet sich das System Abb. 77

nicht mehr von dem zu Abb. 72 gehörigen System, dem ebenen

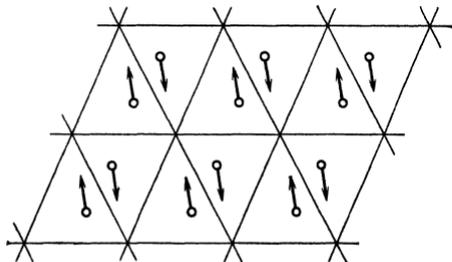


Abb. 76.

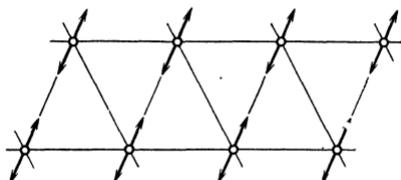


Abb. 77.

allgemeinen Punktgitter. Wenn wir umgekehrt zum ebenen allgemeinen Punktgitter die zugehörige Gruppe von Deckbewegungen suchen, so ergibt sich nicht etwa $II, 1$, sondern stets $II, 2, \alpha$, da wir ja in Abb. 75 das Parallelogramm $ABCD$ ganz beliebig wählen dürfen und das zugehörige Gitter durch die Bewegungen der Gruppe in sich übergeführt wird. Die Betrachtung der Zeiger statt der Punkte führt also hier zu klareren Unterscheidungen.

II, 2, β . Nach unserer Annahme ist $2\pi/3$ der kleinste vorkommende Drehwinkel. Ich behaupte, daß die Drehungen um $\pm \frac{2\pi}{3}$ auch die einzigen sind. Denn von anderen Winkeln käme nur π in Frage; nach dem Additionssatz würde aber eine Drehung um π und eine Drehung um $-\frac{2\pi}{3}$ eine Drehung um $\pi/3$ ergeben, und ein solcher Drehwinkel darf in der Gruppe nicht vorkommen. Es gibt daher in der Tat ausschließlich 3-zählige Drehpunkte in der Gruppe.

Sei A ein 3-zähliger Drehpunkt (Abb. 78) und $A \rightarrow B$ eine möglichst kurze in der Gruppe enthaltene Translation. Geht B durch Drehung um A um $2\pi/3$ in C über, so ist nach Hilfssatz 2 auch die Translation $A \rightarrow C$ in der Gruppe enthalten. Das Gitter der Untergruppe der Translationen muß sich aus dem Parallelogramm $ABCD$ erzeugen lassen, da in seinem Innern nach unserer Konstruktion keine anderen Gitterpunkte mehr liegen können. Die Diagonale AD zerlegt $ABCD$ in zwei gleichseitige Dreiecke. Das Translationsgitter der Gruppe muß also

das der dichtesten Kreislagerung sein und kann nicht wie im Fall $II, 2, \alpha$ beliebig angenommen werden (ebenso werden wir auch in den folgenden beiden Fällen sehen, daß die zugehörigen Translationsgitter spezielle Gestalt haben müssen). Die Drehung (d) $AB \rightarrow AC$ und hierauf die Translation (t) $A \rightarrow B$ führen zusammengesetzt (dt) AB in BD über (Abb. 78). dt muß also eine Drehung d' um den Mittelpunkt M des Dreiecks ABD sein mit $2\pi/3$ als Drehwinkel.

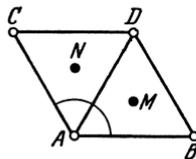


Abb. 78.

M ist also ebenfalls 3-zähliger Drehpunkt der Gruppe. Ferner wird AC durch $d'' = td'$ über BD nach DA befördert, also ist d'' die Drehung um $-2\pi/3$ um den Mittelpunkt N des Dreiecks ACD ; demnach ist auch N 3-zähliger Drehpunkt. Ebenso wie A führen auch M und N zu Gittern, deren sämtliche Punkte 3-zählige Drehpunkte sind. Ich behaupte, damit sind alle Drehungen der Gruppe erschöpft. Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß zwei 3-zählige Drehpunkte E und F nie einen kürzeren Abstand haben können als AM . Nun ergeben die Drehungen $d^{-1}d'$ offenbar t . Ebenso erzeugen zwei entgegengesetzte Drehungen um E und F eine Translation, und deren Länge müßte sich zum Abstand EF verhalten wie die Länge von t zum Abstand AM . Da nach Voraussetzung keine Translation der Gruppe kürzer ist als t , kann somit auch EF nicht kürzer sein als AM . Es gibt daher in der Tat keine anderen Drehpunkte als die Punkte der zu A, M, N gehörigen drei Gitter. Da die Drehungen um A jedes dieser Gitter in sich überführen und nicht ein Gitter ins andere, so sind die Punkte A, M, N inäquivalent. Die Gruppe $II, 2, \beta$ besitzt demnach drei verschiedene Klassen von Drehpunkten (Abb. 79). Die Punkte jeder Klasse

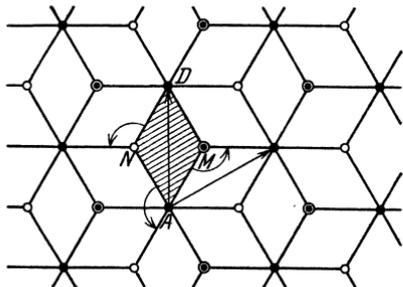


Abb. 79.

lassen sich als Mittelpunkte eines Systems regulärer Sechsecke auffassen, die die Ebene einfach und lückenlos überdecken und deren Ecken abwechselnd mit den Drehpunkten der anderen beiden Klassen besetzt sind. Man erhält auf diese Weise drei Systeme regulärer Sechsecke, die in bestimmter Weise übereinanderliegen. Übrigens läßt sich diese Figur als eine Orthogonalprojektion dreier übereinanderliegender Schichten des Graphitgerüsts (Abb. 56, S. 48) auffassen.

Als Fundamentalbereich ist in Abb. 79 der Rhombus $AMND$ gewählt¹, ferner sind in dieser Figur zwei Translationen eingetragen, aus denen sich das Translationsgitter der Gruppe erzeugen läßt.

¹ Dasselbe System aneinandergrenzender Rhomben wird im Aufbau der Bienenwabe verwandt.

Betrachtet man ein System äquivalenter Zeiger, die nicht von einem Drehpunkt ausgehen (Abb. 80), so erhält man drei ineinandergestellte Gitter, von denen jedes durch eine bestimmte Zeigerstellung gekennzeichnet ist. Erzeugende Parallellogramme dieser Gitter sind nicht eingetragen, weil die Figur sonst unübersichtlich würde.

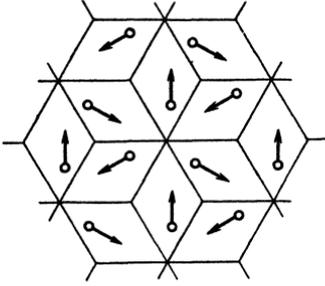


Abb. 80.

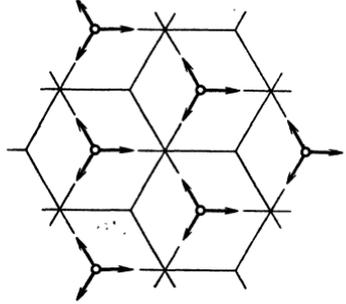


Abb. 81.

Geht man von einem Drehpunkt aus (Abb. 81), so fallen die drei Gitter in eins zusammen, da von jedem Punkt drei Zeiger ausgehen müssen.

II, 2, γ . Der kleinste Drehwinkel der Gruppe ist $\pi/2$. Es kann also 2- und 4-zählige Drehpunkte geben. Andere Drehwinkel können nicht auftreten, denn eine Drehung um $2\pi/3$ ließe sich nach dem Additionssatz mit einer Drehung um π zu einer Drehung um $\pi/3$ zusammensetzen, im Widerspruch damit, daß kein kleinerer Drehwinkel als $\pi/2$ vorkommen soll.

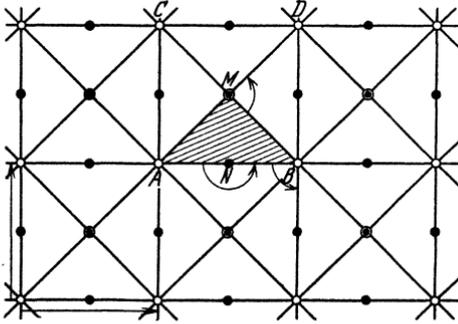


Abb. 82.

Wir führen nun die Untersuchung ähnlich wie im vorigen Fall. Sei A irgendein 4-zähliger Drehpunkt (Abb. 82) und $A \rightarrow B$ eine möglichst kurze Translation der Gruppe. Geht B durch Drehung um A um $\pi/2$ in C über, so ist auch $A \rightarrow C$ eine in der Gruppe vorkommende

Translation. Das Translationsgitter der Gruppe muß sich also aus dem Quadrat $ABCD$ erzeugen lassen, da dieses Gitterpunkte zu Ecken hat und keine weiteren Gitterpunkte mehr enthalten kann. Wie im vorigen Fall ist also das Translationsgitter nicht beliebig, sondern hat eine besondere symmetrische Gestalt. Wenn wir nun zu den Translationen nur noch die Drehungen um π , aber nicht die um $\pi/2$ hinzunehmen, so erhalten wir eine Untergruppe, und diese muß den Typus **II, 2, α** haben. Die Mittelpunkte der Quadrate, z. B. M , sowie die

Mittelpunkte der Quadratseiten, z. B. N , bilden zusammen mit den Quadratecken das vollständige System der Drehpunkte in der Untergruppe. Ausschließlich unter diesen Punkten haben wir aber auch die 2- und 4-zähligen Drehpunkte der vollen Gruppe zu suchen, da diese Punkte ja in der Untergruppe als 2-zählig mitberücksichtigt sein müssen. Betrachten wir nun die Drehung (d) $AB \rightarrow AC$ und die Translation (t) $A \rightarrow B$, so führt $d' = dt$ offenbar AB in BD über, d' ist daher die Drehung um M um $\pi/2$, und demnach sind die Quadratmittelpunkte sämtlich 4-zählige und nicht nur 2-zählige Drehpunkte. Ebenso wie im vorigen Fall können wir schließen, daß keine anderen 4-zähligen Drehpunkte mehr vorkommen. $d^{-1}d'$ ist nämlich die kürzeste in der Gruppe enthaltene Translation t , also können zwei 4-zählige Drehpunkte keinen kürzeren Abstand haben als AM , wir können daher zu den Gittern von A und M keine 4-zähligen Drehpunkte mehr hinzufügen. Da diese beiden Gitter durch jede der bisher betrachteten Bewegungen in sich und nicht ineinander übergeführt werden, sind A und M inäquivalent. Dagegen erkennt man, daß alle 2-zähligen Drehpunkte äquivalent sind. Wir haben also eine einzige Klasse 2-zähliger Drehpunkte, bestehend aus zwei ineinandergeschobenen Quadratgittern, und zwei Klassen 4-zähliger Drehpunkte, aus je einem Gitter bestehend. Als Fundamentalbereich läßt sich das Dreieck AMB verwenden.

Das Zeigersystem, das zu einem Punkt allgemeiner Lage gehört (Abb. 83), besteht aus vier Quadratgittern, jedes durch eine bestimmte Zeigerrichtung gekennzeichnet. Ein 2-zähliger Drehpunkt (Abb. 84) liefert zwei Gitter verschiedener Zeigerrichtung, ein 4-zähliger Drehpunkt nur ein einziges (Abb. 85). Wenn dabei wie in dieser Figur die Pfeile paarweise aufeinanderzeigen, können wir die Figur als regelmäßige ebene Anordnung gleichartiger 4-wertiger Atome deuten.

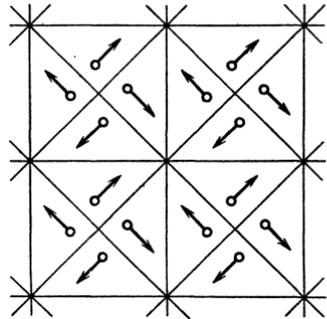


Abb. 83.

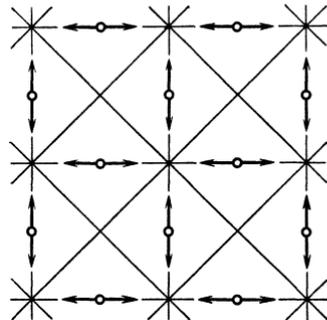


Abb. 84.

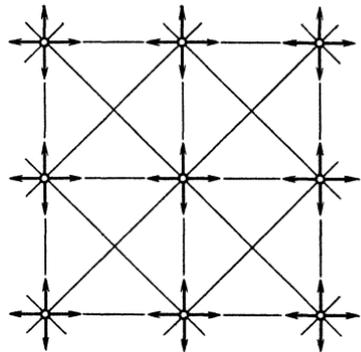


Abb. 85.

II, 2, δ . In diesem Fall ist die Mannigfaltigkeit der Drehungen am größten. Denn da 6-zählige Drehpunkte zugelassen sind, können auch 2- und 3-zählige vorkommen. Dagegen sind 4-zählige Drehpunkte ausgeschlossen, denn mit einer Drehung um $\pi/2$ und einer Drehung um $\pi/3$ enthielte die Gruppe notwendig eine Drehung um $\pi/6$, und dieser Drehwinkel kann in keiner krystallographischen ebenen Bewegungsgruppe auftreten.

Es sei A ein 6-zähliger Drehpunkt der Gruppe (Abb. 86). Wir betrachten nun zunächst die Untergruppe, die aus den Translationen und den Drehungen um $2\pi/3$ besteht. Die Struktur dieser Untergruppe ist uns aus **II, 2, β** bekannt. In ihr tritt A als 3-zähliger Drehpunkt auf. Das Translationsgitter dieser Untergruppe ist das Gitter der gleichseitigen Dreiecke, und neben den Ecken, z. B. A, B, C , treten auch die Mittelpunkte der Dreiecke, z. B. M , als 3-zählige Drehpunkte auf.

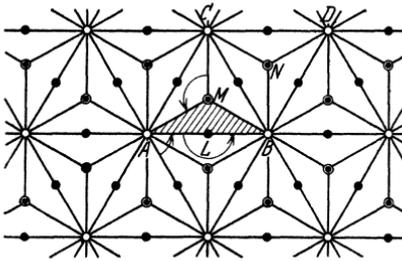


Abb. 86.

Daraus können wir aber schließen, daß auch in der ganzen Gruppe selbst die Translationen das gleiche Gitter bilden, da diese ja alle in der Untergruppe berücksichtigt sind. In der ganzen Gruppe ist nun A nicht 3-, sondern 6-zähliger Drehpunkt, daher müssen auch alle Gitterpunkte des Gitters von A 6-zählig sein.

Wenn es noch andere 6-zählige

Drehpunkte in der Gruppe gibt, können es nur die Dreiecksmitten sein, denn alle 6-zähligen Drehpunkte sind in der Untergruppe als 3-zählig mitberücksichtigt. Nun bewirken die beiden Drehungen um A und C um $+\pi/3$ und $-\pi/3$ die Translation $A \rightarrow B$. Da es keine kürzere Translation als diese in der Gruppe gibt, kann auch der Abstand 6-zähliger Drehpunkte nicht kürzer sein als AC ; folglich gibt es außer dem Gitter von A keine 6-zähligen Drehpunkte, und die Dreiecksmitten sind 3-zählig. Weitere 3-zählige Punkte kann es nicht geben, da sie alle in der Untergruppe berücksichtigt waren. Im Gegensatz zum Fall **II, 2, β** sind die 3-zähligen Drehpunkte sämtlich äquivalent, da z. B. M durch eine Drehung um B in N übergeführt wird.

Um nun noch die etwaigen 2-zähligen Drehpunkte aufzufinden, verfahren wir analog: Wir betrachten die Untergruppe, die aus den Translationen und den Drehungen um π besteht. Aus den Betrachtungen über den Fall **II, 2, α** ergibt sich, daß die Ecken des erzeugenden Gitterparallelogramms sowie deren Mittelpunkte und Seitenmittelpunkte, d. h. die Mittelpunkte der Seiten aller gleichseitigen Dreiecke, Drehungen um π gestatten. Die Ecken der Dreiecke haben wir schon als 6-zählige Drehpunkte berücksichtigt. Es bleiben also genau die Seitenmitten der

Dreiecke als Gesamtheit der 2-zähligen Drehpunkte übrig. Man erkennt, daß sie alle äquivalent sind. Es gibt also je eine Klasse 2-, 3- und 6-zähliger Drehpunkte. AMB ist ein Fundamentalbereich der Gruppe.

Das Zeigersystem eines Punktes allgemeiner Lage besteht aus sechs ineinandergeschobenen Gittern, von denen jedes durch eine Zeiger-

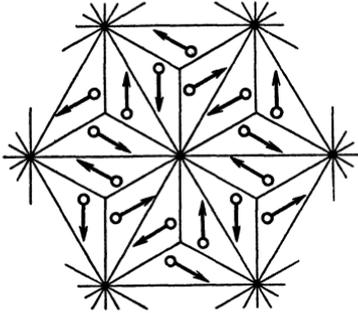


Abb. 87.

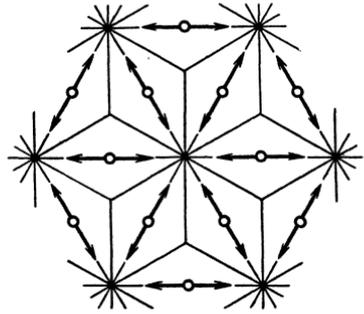


Abb. 88.

richtung gekennzeichnet ist. In Abb. 87 ist jedes dieser Gitter durch je drei parallele Zeiger vertreten, die je ein gleichseitiges Dreieck bilden. Geht man von einem 2-zähligen Drehpunkt aus (Abb. 88), so fallen die Gitter paarweise zu drei Gittern zusammen. Diese Figur gibt eine mögliche regelmäßige ebene Anordnung eines Komplexes aus zweierlei Atomen, von denen die eine Art 6-wertig und die andere Art 2-wertig ist.

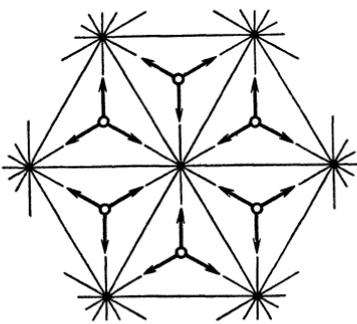


Abb. 89.

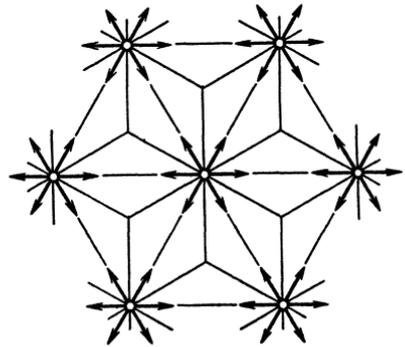


Abb. 90.

Wenn wir alle Zeiger um $\pi/2$ drehen, kommen wir auf eine Anordnung, bei der 2- und 3-wertige Atome verknüpft sind. Das Zeigersystem der 3-zähligen Drehpunkte (Abb. 89) besteht aus zwei Gittern. Bei der in der Figur angenommenen Zeigerstellung ergibt sich eine Anordnung aus 3- und 6-wertigen Atomen. Das Zeigersystem der 6-zähligen Drehpunkte (Abb. 90) bildet ein einziges Gitter, das wir in der gezeichneten Zeigerstellung als regelmäßige ebene Anordnung 6-wertiger gleichartiger Atome auffassen können.

Die Aufgabe, die wir uns in § 9 gestellt haben, ist nunmehr vollständig gelöst. Wir haben die sämtlichen überhaupt möglichen krystallographischen Bewegungsgruppen der Ebene aufgestellt und dabei gefunden, daß es nur fünf solche Gruppen gibt. Die allgemeinsten Punkt- und Zeigersysteme erhalten wir, wenn wir in jeder Gruppe von einem Punkt allgemeiner Lage ausgehen. Denn die Punktsysteme aus Drehpunkten der komplizierteren Gruppen kehren in den Punktsystemen aus Punkten allgemeiner Lage wieder, wenn wir einfachere Gruppen zugrunde legen. Dagegen liefern die Zeigersysteme bei den Drehpunkten neuartige Figuren.

Zugleich haben wir die Lösung eines mit dem vorigen verwandten Problems gefunden, nämlich auf welche verschiedenen Arten man die Ebene aus kongruenten endlichen Bereichen derart zusammensetzen kann, daß der ganze Aufbau durch eine Deckbewegung in sich übergeführt werden kann, und daß jeder Baustein durch eine Deckbewegung mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann. Die Gruppe dieser Deckbewegungen muß eine diskontinuierliche sein, und zwar eine krystallographische, weil die Anzahl der Bausteine innerhalb eines Kreises mit dem Quadrat des Radius ins Unendliche wächst. Es gibt daher nur zwei Möglichkeiten. Entweder läßt keine von der Identität verschiedene Deckbewegung einen Baustein ungeändert; dann muß der Baustein einen Fundamentalbereich bilden. Oder es gibt Bausteine, die durch eine Deckbewegung in sich übergehen; dann bildet die Gesamtheit der Deckbewegungen dieser Art eine diskontinuierliche Untergruppe, die ersichtlich keine Translationen enthält, also aus Drehungen um einen bestimmten Punkt bestehen muß ($I, 2, \alpha$). In diesem Fall hat der Baustein zentrale Symmetrie und muß sich aus Fundamentalbereichen zusammensetzen lassen. Ein Beispiel für diesen Fall liefert der Aufbau der Ebene aus kongruenten regulären Sechsecken oder Quadraten, der bei vielen Fußböden verwandt wird.

Ein anderes und schwierigeres Problem ist das „Parkettierungsproblem“; es erfordert, die Ebene aus endlichen kongruenten Bausteinen zusammenzusetzen, dagegen wird nicht verlangt, daß der Bau Deckbewegungen gestattet.

§ 13. Die krystallographischen Klassen und Gruppen räumlicher Bewegungen. Gruppen und Punktsysteme mit spiegelbildlicher Symmetrie.

Auch im Raum gibt es nur endlich viele krystallographische Bewegungsgruppen; ihre Anzahl ist aber weit größer als in der Ebene. Um diese Gruppen bestimmen zu können, muß man, wie in der Ebene, zunächst die einzelnen Bewegungen geometrisch kennzeichnen. Man kann auch im Raum jede beliebige Bewegung durch eine Bewegung von be-

stimmtem einfachen Typus ersetzen. Betrachtet man zunächst Bewegungen, die einen Punkt fest lassen, so läßt sich beweisen, daß dann auch eine durch diesen Punkt gehende Gerade Punkt für Punkt fest bleiben muß und daß die Bewegung durch eine Drehung um einen bestimmten Winkel um diese Gerade als Achse ersetzt werden kann. Räumliche Bewegungen, die keinen Punkt fest lassen, sind z. B. die Translationen.

Man kann nun zeigen, daß jede beliebige Bewegung des Raumes sich aus einer bestimmten Drehung und einer bestimmten Translation in der Richtung der Drehungsachse zusammensetzen läßt; man kann auch die Drehungen und Translationen selbst als solche zusammengesetzte Bewegungen ansehen, indem man annimmt, daß der eine Bestandteil der Bewegung sich auf die Identität reduziert. Denkt man sich nun bei der allgemeinsten Bewegung die Drehung und die Translation zu gleicher Zeit und mit konstanter Geschwindigkeit ausgeführt, so erhält man eine schraubenförmige Fortbewegung des Raumes. Die allgemeinste Bewegung des Raumes wird deshalb als Schraubung bezeichnet, wobei man die Translationen und Drehungen als Grenzfälle von Schraubungen auffassen kann. Bei manchen Problemen ist es übrigens auch zweckmäßig, die Translationen ähnlich wie im Fall der Ebene als Drehungen mit verschwindend kleinem Drehwinkel um eine unendlich ferne Achse anzusehen.

Bei der Zusammensetzung zweier Schraubungen im Raum gilt kein so einfaches allgemeines Gesetz, wie es in der Ebene der Additionssatz der Winkel bei Zusammensetzung von Drehungen darstellt. Es gibt aber zwei speziellere Sätze, die für die Zwecke der räumlichen Krystallographie ausreichen; zunächst ergeben nämlich zwei Translationen zusammengesetzt stets wieder eine Translation, und zweitens unterscheiden sich Schraubungen um parallele Achsen und gleiche Drehungswinkel nur um eine Translation. Als Drehungswinkel einer Schraubung ist dabei der Winkel der Drehung anzusehen, die den einen Bestandteil der Schraubung bildet.

Nach dem ersten Gesetz bilden die in einer räumlichen Bewegungsgruppe enthaltenen Translationen stets eine Untergruppe. Wie in der Ebene ist die Struktur dieser Untergruppe maßgebend dafür, ob eine diskontinuierliche räumliche Bewegungsgruppe krystallographisch ist, d. h. auf ein räumliches Punktsystem führt, oder nicht. Sind nämlich alle Translationen der Gruppe einer festen Ebene parallel, so besitzt die Gruppe stets unendliche Fundamentalbereiche und kann auf kein Punktsystem führen. Besitzt dagegen die Gruppe drei Translationen, deren Richtungen nicht sämtlich einer und derselben Ebene parallel sind, so ist sie eine krystallographische Gruppe. Die zu einem Punkt P äquivalenten Punkte bezüglich der Untergruppe der Translationen bilden dann stets ein räumliches Punktgitter. Wenn es außerdem in

der Gruppe noch eine Schraubung gibt, die P in einen dem Gitter nicht angehörenden Punkt Q überführt, so bestimmt die Untergruppe der Translationen auch zu Q ein Gitter aus lauter zu Q und P äquivalenten Punkten. Wegen der Diskontinuität der Gruppe kann es nur endlich viele solche Gitter geben; diese Einschränkung führt wie in der Ebene zur Übersicht aller möglichen Fälle. Zugleich ergibt sich, daß die regulären Punktsysteme im Raum sich aus endlich vielen kongruenten parallel ineinandergeschobenen räumlichen Punktgittern zusammensetzen lassen. Ein Beispiel dafür haben wir im System der Kugelmittelpunkte bei der tetraedrischen Lagerung schon kennengelernt.

Der zweite erwähnte Satz über die Schraubungen mit parallelen Achsen führt nun zu einem wichtigen geometrischen Verfahren, um die von einer Translation verschiedenen Bewegungen einer Gruppe zusammenzufassen. Zu diesem Zweck zeichne ich irgendeinen beliebigen Raumpunkt M aus. Zur Achse a jeder in der Gruppe vorkommenden Schraubung ziehe ich durch M die Parallele a_0 , und jeder in der Gruppe vorkommenden Schraubung s um die Achse a ordne ich die Drehung s_0 um die Achse a_0 zu, die denselben Drehwinkel besitzt wie s . Dann können sich s und s_0 nur durch eine Translation unterscheiden. Nach diesem Verfahren entspricht jeder von einer Translation verschiedenen Bewegung der Gruppe G eine andere Bewegung, die den Punkt M fest läßt. Um die Zuordnung zu vervollständigen, lasse ich ferner allen Translationen aus G die Identität entsprechen. Auf diese Weise ist der Gruppe G ein System G_M von Abbildungen zugeordnet, die sämtlich M fest lassen. Ich behaupte, daß G_M eine Gruppe ist. Sind nämlich die Drehungen s_0 und t_0 aus G_M den Schraubungen s und t aus G zugeordnet, so läßt sich aus dem Gesetz über Schraubungen um parallele Achsen leicht schließen, daß $s_0 t_0$ gerade diejenige Drehung aus G_M ist, die st zugeordnet werden muß. Daher erfüllt das System G_M in der Tat die beiden Gruppenpostulate, daß mit s_0 und t_0 stets auch $s_0 t_0$ sowie s_0^{-1} dem System angehören.

Durch die Struktur der Gruppe G_M ist G keineswegs eindeutig bestimmt; man kann aus der Struktur von G_M nichts über die in G enthaltenen Translationen schließen, z. B. allen Gruppen G , die nur aus Translationen bestehen, entspricht eine und dieselbe Gruppe G_M , die nur aus der Identität besteht. G_M liefert also eine Zusammenfassung von Gruppen, die sich nur durch ihre Translationen unterscheiden. Man nennt die Gesamtheit aller räumlichen Bewegungsgruppen, die auf eine und dieselbe Gruppe G_M führen, eine *Klasse räumlicher Bewegungsgruppen*. Wenn einer Klasse eine kristallographische Gruppe angehört, nennt man diese Klasse eine *kristallographische Klasse*. Dieser Begriff ist sowohl für die praktische Kristallographie als auch für die geometrische Bestimmung der Raumgruppen von großer Bedeutung.

Es ist nämlich viel leichter, zuerst alle möglichen krystallographischen Klassen aufzustellen und erst nachher für jede Klasse zu untersuchen, was für Gruppen ihr angehören können.

Da alle Bewegungen aus G_M den Punkt M fest lassen, führen sie auch die Oberfläche einer um M als Mittelpunkt geschlagenen Kugel in sich über, und man kann daher die Gruppen G_M als Bewegungsgruppen der Kugeloberfläche ansehen. Es tritt nun die große Vereinfachung ein, daß G_M stets diskontinuierlich sein muß, wenn G diskontinuierlich ist. Da die Diskontinuität von G etwas ganz anderes bedeutet als die Diskontinuität von G_M , so ist der genannte Satz keineswegs selbstverständlich. Er läßt sich aber bei den krystallographischen Gruppen leicht beweisen, indem man die zugehörigen Translationsgitter in Betracht zieht. Dieser Beweis soll hier übergangen werden.

Um alle krystallographischen Klassen von räumlichen Bewegungsgruppen zu finden, haben wir demnach nur noch die diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der Kugel zu untersuchen. Es tritt aber noch eine zweite Vereinfachung ein. Wie in der Ebene, so kann man auch im Raum schließen, daß in einer krystallographischen Bewegungsgruppe keine anderen Drehwinkel vorkommen können als die Vielfachen von π , $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$. Wie es also in der Ebene nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Drehpunkte in den Gruppen gibt, so kann es (bei analoger Bezeichnungsweise) in den räumlichen krystallographischen Bewegungsgruppen nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Achsen geben. Das gleiche muß aber auch für die Gruppen G_M der krystallographischen Klassen gelten. Nach dieser Einschränkung bleiben nur elf Krystallklassen übrig; sie mögen hier aufgezählt werden.

Wir nehmen zunächst die Fälle, daß nur eine einzige n -zählige Achse in G_M vorhanden ist. Diese Klassen werden in der Krystallographie mit C_n bezeichnet. Wir haben die fünf Klassen (Abb. 91):

1. C_1 (Identität, Klasse der Translationsgruppen),
2. C_2 ,
3. C_3 ,
4. C_4 ,
5. C_6 .

Wir nehmen jetzt an, daß mehrere Achsen vorhanden sind, von denen höchstens eine mehr als 2-zählige ist. Diese ausgewählte n -zählige

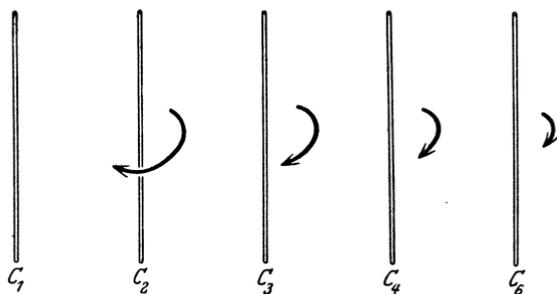


Abb. 91.

Achse wird als Hauptachse bezeichnet, die 2-zähligen Achsen als Nebenachsen. Dann läßt sich aus den Gruppenpostulaten leicht schließen, daß es genau n Nebenachsen geben muß, und daß sie alle auf der

Hauptachse senkrecht stehen und miteinander gleiche Winkel bilden müssen. Die zugehörigen Gruppen und Klassen werden mit dem Symbol D_n (Diëder) bezeichnet. Es gibt vier solche Klassen (Abb. 92):

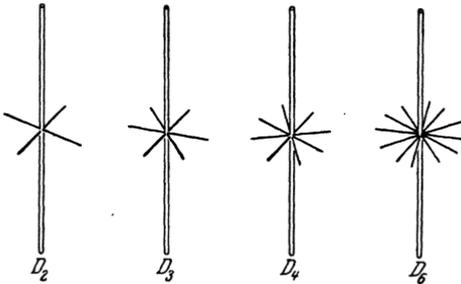


Abb. 92.

6. D_2 , (3 gleichberechtigte Achsen).

7. D_3 ,

8. D_4 ,

9. D_6 .

Man kann übrigens leicht einsehen, daß für $n = 3$ die Nebenachsen alle äquivalent sind, während sie sich in den übrigen Fällen abwechselnd auf zwei Klassen verteilen.

Es bleibt nur noch die Möglichkeit, daß es mehrere Achsen gibt, die mehr als 2-zählig sind. Eine nähere Betrachtung lehrt dann, daß die äquivalenten Punkte auf der Kugel entweder die Ecken eines regulären Tetraeders (T) oder die eines regulären Oktaeders (O) bilden müssen. Aus den Symmetrieeigenschaften dieser Polyeder folgt von selbst die Achsenverteilung; man erhält alle Achsen, indem man die Ecken, die Mittelpunkte der Flächen und die Mittelpunkte der Kanten mit dem Kugelmittelpunkt verbindet. Auf diese Weise liefert das Tetraeder die Klasse

10. T (Abb. 93).

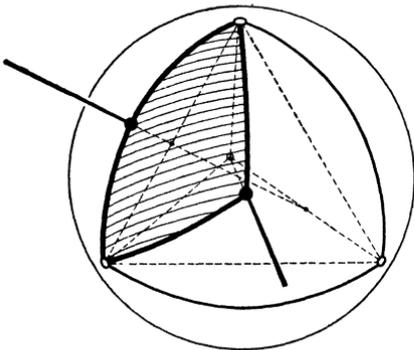


Abb. 93.

Verbindet man im Tetraeder den Kugelmittelpunkt mit einer Ecke, so geht diese Gerade auch durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche. Da diese ein gleichseitiges Dreieck ist und andererseits in jeder Ecke drei Flächen zusammenstoßen, erhalten wir *vier 3-zählige Achsen*. Verbinden wir ferner die sechs Kantenmitten des Tetraeders mit dem Kugelmittelpunkt, so erhalten wir

nicht sechs, sondern nur drei Geraden, da sich die Mittelpunkte der Kanten paarweise diametral gegenüberliegen. Diese Achsen können, wenn das Tetraeder in sich übergehen soll, nur 2-zählig sein. Die Klasse T besitzt somit *drei 2-zählige Achsen*, die übrigens paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Um einen Fundamentalbereich auf der Kugel zu erhalten, können wir von einem sphärischen Dreieck ausgehen, das einer Fläche des Tetraeders entspricht. Ein solches Dreieck ist noch kein Fundamentalbereich, da es durch Drehung um eine 3-zählige Achse in sich selbst

übergeht. Dagegen läßt sich das Dreieck offenbar aus drei Fundamentalbereichen aufbauen (Abb. 93).

Die Untersuchung der letzten Klasse,

11. O (Abb. 94),

verläuft analog. Die sechs Ecken des Oktaeders liegen einander paarweise gegenüber, und in jeder Ecke stoßen vier Flächen zusammen. Wir erhalten also *drei 4-zählige Achsen*. Ebenso liegen die acht Flächen des Oktaeders einander paarweise gegenüber; da sie sämtlich gleichseitige Dreiecke sind, liefern sie *vier 3-zählige Achsen*. Da endlich das Oktaeder zwölf Kanten besitzt und da diese einander paarweise gegenüberliegen, gibt es in der Klasse O *sechs 2-zählige Achsen*. Als Fundamentalbereich können wir wieder den dritten Teil eines sphärischen Dreiecks verwenden, das einer Oktaederfläche entspricht (Abb. 94).

Die elf Klassen, die wir aufgestellt haben, führen zu insgesamt fünfundsiebzehn räumlichen krystallographischen Bewegungsgruppen. Die Übersicht über diese vielen Gruppen wird also durch die Einteilung in Klassen außerordentlich erleichtert. Man kann nun den Klassenbegriff auch schon in der Ebene in genau derselben Weise einführen. Dann erhält man diskontinuierliche Bewegungsgruppen der Kreisperipherie, und zwar sind das einfach die Identität und die Drehungen um Vielfache von

π , $2\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/3$. Wir haben also nur fünf Klassen und in jeder Klasse nur eine krystallographische Bewegungsgruppe; bei den ebenen krystallographischen Bewegungsgruppen bringt demnach die Klasseneinteilung noch keinen Vorteil.

Wie in der Ebene, so führen auch im Raum die krystallographischen Bewegungsgruppen zu Punktsystemen, und sie stehen ferner im Zusammenhang mit dem Problem, den Raum aus kongruenten endlichen Bausteinen aufzubauen, so daß der Bau Deckbewegungen gestattet, die jeden Stein in jeden anderen überführen können. Dieses Problem ist noch nicht gelöst.

Für die Krystalchemie ist es zweckmäßig, neben den Punktsystemen auch Zeigersysteme zu betrachten. Im Raum kommt man aber nicht mit einem einzigen Zeiger aus, da diese Figur noch um die Zeigerichtung drehbar ist. Eine Figur mit vollbestimmter Orientierung er-

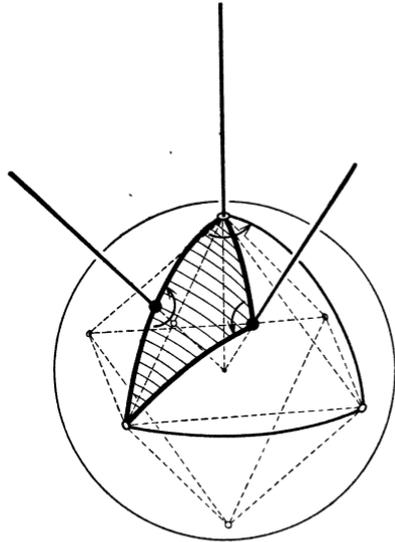


Abb. 94.

hält man erst, wenn man einen Punkt mit zwei Zeigern verschiedener Länge und Richtung ausstattet.

Vergleicht man nun die empirisch bestimmten Krystallstrukturen mit dem geometrisch bestimmten Vorrat aller Zeigersysteme, so ergibt sich das überraschende Resultat, daß die Natur nicht nur diesen geometrischen Vorrat vollständig verbraucht, sondern daß es sogar noch viele Krystallstrukturen gibt, die durch unseren Begriff des regulären Punktsystems nicht erfaßt werden, obwohl alle Elemente gleichberechtigt sind. Wir haben nämlich in der dritten definierenden Eigenschaft der Punktsysteme die Gleichberechtigung aller Punkte dadurch gekennzeichnet, daß jeder Punkt des Systems in jeden anderen durch eine *Deckbewegung* überführbar sein soll. Man kommt zu einem allgemeineren Begriff des Punktsystems, wenn man unter den Decktransformationen des Systems auch *Spiegelungen* zuläßt; Spiegelungen der Ebene an einer ihrer Geraden und Spiegelungen des Raumes an einer seiner Ebenen. Auch diese allgemeineren Transformationen lassen alle Längen und Winkel ungeändert. Nur bewirken sie eine Vertauschung von rechts und links, und die Raumspiegelungen können nicht aus der Ausgangslage durch stetige Bewegung erzeugt werden. Faßt man alle Abbildungen des Raumes, die die Längen und Winkel ungeändert lassen, unter dem Namen Decktransformationen zusammen, so erhält man in den diskontinuierlichen Gruppen von Decktransformationen eine Gesamtheit, die die diskontinuierlichen Bewegungsgruppen mit umfaßt, aber noch zahlreiche weitere Gruppen enthält. Auch diese allgemeineren Gruppen sind vollständig bestimmt worden. Ihre Übersicht wird dadurch erleichtert, daß in jeder von ihnen die in ihr vorkommenden Bewegungen eine Untergruppe bilden, also eine Gruppe, deren Typus durch unsere früheren Betrachtungen bestimmbar ist. Ebenso läßt sich in der Ebene und im Raum die Einteilung in Klassen auf die Gruppen mit Spiegelungen übertragen. So wie die Schraubungen um parallele Achsen und gleiche Winkel unterscheiden sich nämlich auch die Spiegelungen an parallelen Ebenen bzw. Geraden nur durch eine Translation. Über die Gesamtheit von Klassen und Gruppen, die man auf diese Weise erhält, gibt die folgende kleine Tabelle eine Übersicht.

	Ebene		Raum	
	Krystallographische Gruppen	Krystallographische Klassen	Krystallographische Gruppen	Krystallographische Klassen
Bewegungen	5	5	65	11
Durch Spiegelung dazu . . .	12	5	165	21
Im ganzen	17	10	230	32

Erst die Hinzunahme der Spiegelungen liefert wirklich die vollständige Mannigfaltigkeit der in der Natur vorkommenden Krystall-

strukturen. Geht man zu den Zeigersystemen über, so hat man in der Ebene und im Raum jeweils noch einen Zeiger hinzuzufügen; denn ein Zeiger in der Ebene gestattet noch eine Spiegelung an der Geraden, die den Zeiger enthält, und ebenso läßt im Raum die Figur aus zwei Zeigern verschiedener Länge noch eine Spiegelung an der Ebene der Zeiger zu. Im Raum hat man also drei Zeiger verschiedener Länge zugrunde zu legen, die von einem Punkt ausgehen und nicht in einer und derselben Ebene liegen.

Man kann die diskontinuierlichen Gruppen von Decktransformationen nicht nur geometrisch, sondern auch auf arithmetisch-algebraischem Wege bestimmen. Man wird dann im Fall der Ebene auf merkwürdige Relationen zwischen komplexen Zahlen geführt; im Raum hat man hyperkomplexe Zahlensysteme zugrunde zu legen.

Es wäre eine interessante Aufgabe, die hier angestellten Überlegungen auch auf mehrdimensionale Räume auszudehnen. Für die diskontinuierlichen Deckgruppen der mehrdimensionalen Kugeln liegen einige Ergebnisse vor, da man die Analoga der regulären Polyeder in den Räumen beliebiger Dimensionszahlen kennt; mit diesen mehrdimensionalen Gebilden werden wir uns noch im nächsten Kapitel beschäftigen. Ferner hat BIEBERBACH bewiesen, daß es für jedes n nur endlich viele diskontinuierliche krystallographische n -dimensionale Gruppen gibt, und daß in jeder solchen Gruppe n linear unabhängige Translationen vorkommen.

§ 14. Die regulären Polyeder.

Bei der Aufstellung der krystallographischen Klassen sind wir auf das reguläre Tetraeder und Oktaeder geführt worden. Wir wollen jetzt eine allgemeine Definition des regulären Polyeders geben und feststellen, welche weiteren regulären Polyeder außer dem Tetraeder und dem Oktaeder noch möglich sind.

Wir werden von einem regulären Polyeder verlangen, daß alle seine Ecken, alle seine Kanten und alle seine Flächen unter sich gleichberechtigt sind. Ferner wollen wir fordern, daß sämtliche Flächen reguläre Polygone sind.

Ein solches Polyeder muß zunächst frei von einspringenden Ecken und einspringenden Kanten sein. Denn da nicht alle Ecken und nicht alle Kanten einspringend sein können, so wären nicht alle Ecken oder nicht alle Kanten gleichberechtigt, wenn einspringende Ecken oder Kanten vorkämen. Daraus folgt, daß die Summe der Polygonwinkel, die in einer Ecke zusammenstoßen, kleiner sein muß als 2π . Denn sonst würden alle diese Polygone in eine Ebene fallen, oder es müßten einspringende Kanten von dieser Ecke auslaufen. Da ferner mindestens drei Polygone in einer Ecke zusammenstoßen müssen und da aus der Regularität die Gleichheit sämtlicher Polygonwinkel folgt, so müssen

alle diese Winkel einen kleineren Wert haben als $2\pi/3$. Nun ist aber der Winkel im regulären Sechseck gerade $2\pi/3$, und bei wachsendem n wird der Winkel im regulären n -Eck immer größer. Also kommen nur reguläre Drei-, Vier- und Fünfecke als Grenzflächen eines regulären Polyeders in Frage. Da das reguläre Viereck, das Quadrat, lauter rechte Winkel hat, können nicht mehr als drei Quadrate in einer Ecke zusammenstoßen, ohne daß die Winkelsumme 2π erreicht; erst recht können nicht mehr als drei Fünfecke aneinanderstoßen. Nun ist die Gestalt eines regulären Polyeders vollständig bestimmt, wenn man die Anzahl der in einer Ecke zusammenstoßenden Flächen und deren Eckenzahl kennt. Demnach kann es höchstens je ein reguläres Polyeder geben, das von Quadraten oder von regulären Fünfecken begrenzt wird. Dagegen können drei, vier oder fünf gleichseitige Dreiecke in einer Ecke D zusammenstoßen, da erst sechs Dreiecke die Winkelsumme 2π ergeben. Das gleichseitige Dreieck kann also bei drei verschiedenen Polyedern als Grenzfläche auftreten, und wir haben insgesamt fünf Möglichkeiten für reguläre Polyeder gefunden. Diese Möglichkeiten lassen sich nun auch alle verwirklichen. Schon PLATO hat alle fünf regulären Polyeder gekannt und ihnen in seiner Ideenlehre große Bedeutung zugeschrieben. Sie werden deshalb auch die platonischen Körper genannt. Wir stellen die wichtigsten Angaben über die fünf regulären Polyeder in der folgenden Tabelle zusammen und geben in Abb. 95—99 deren Bilder in Parallelprojektion.

Name des Polyeders	Art der begrenzenden Polygone	Anzahl der			
		Ecken	Kanten	Flächen	in einer Ecke zusammenstoßenden Flächen
Tetraeder (Abb. 95)	Dreieck	4	6	4	3
Oktaeder (Abb. 96)	„	6	12	8	4
Ikosaeder (Abb. 97)	„	12	30	20	5
Würfel (Hexaeder) (Abb. 98)	Viereck	8	12	6	3
Dodekaeder (Abb. 99)	Fünfeck	20	30	12	3

Die regulären Polyeder stehen alle zur Kugel in einer ähnlichen Beziehung, wie wir für das Tetraeder und das Oktaeder schon im vorigen Paragraphen angegeben haben. Sie lassen sich alle in eine Kugel einbeschreiben, und jedes dieser Polyeder führt zu einer diskontinuierlichen Bewegungsgruppe der Kugel, bei der die Ecken des Polyeders ein System äquivalenter Punkte bilden. Wenn wir nun in allen Ecken des Polyeders die Tangentialebenen an die Kugel legen, so müssen diese Ebenen ein zweites Polyeder begrenzen, das bei den Bewegungen der Gruppe ebenfalls in sich selbst übergeht; wir werden erwarten, daß das neu-gefundene Polyeder ebenfalls regulär ist, und nach dieser Konstruktion müssen einander die fünf Polyeder paarweise entsprechen. Führt man

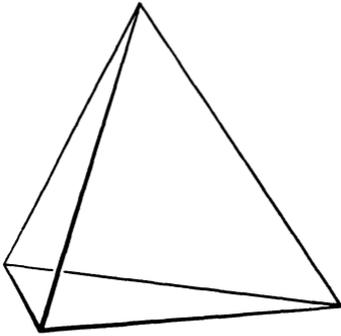


Abb. 95.

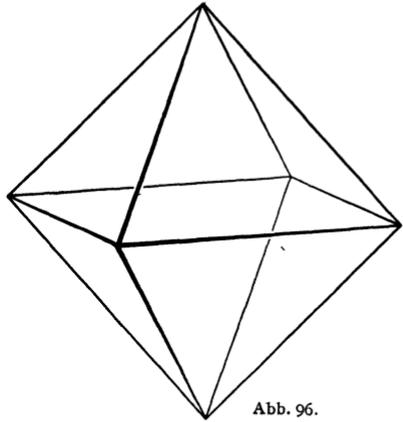


Abb. 96.

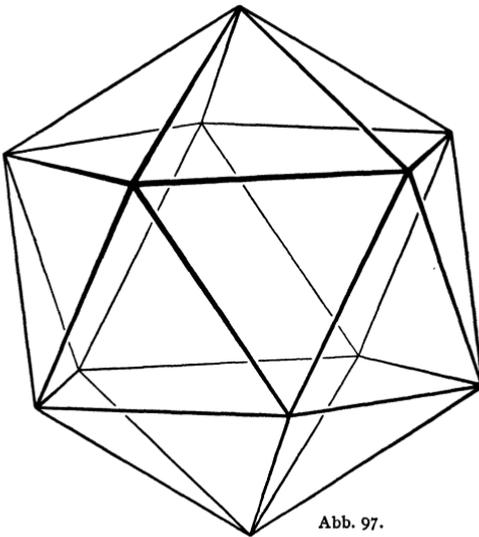


Abb. 97.

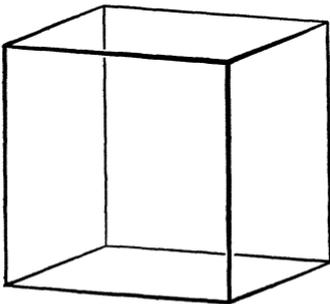


Abb. 98.

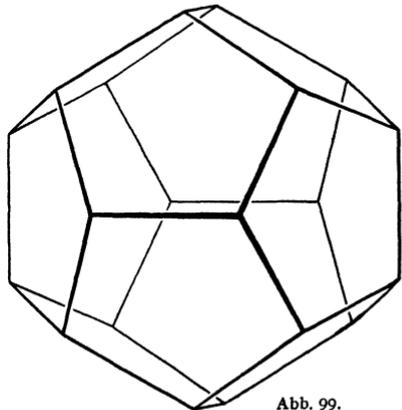


Abb. 99.

die Konstruktion beim Oktaeder durch, so erhält man in der Tat ein reguläres Polyeder, nämlich den Würfel; in Abb. 100 sind die beiden Polyeder in dieser gegenseitigen Lage gezeichnet. Die Gruppe O der

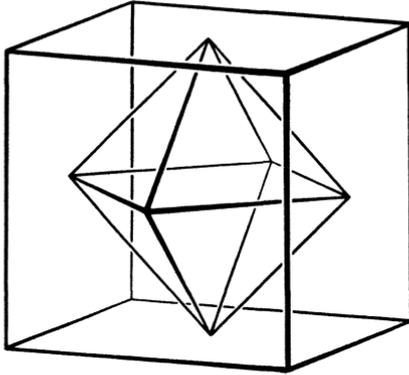


Abb. 100.

Kugel hätten wir daher ebenso wie durch das Oktaeder auch durch den Würfel definieren können. Die gegenseitige Beziehung der beiden Körper kommt in der Tabelle darin zum Ausdruck, daß der eine soviel Ecken hat wie der andere Flächen, daß ferner beide Körper gleich viele Kanten haben und daß endlich in jeder Ecke des einen soviel Flächen zusammenstoßen, wie auf jeder Fläche des anderen Ecken liegen. Man

kann daher das Oktaeder auch dem Würfel umbeschreiben (Abb. 101).

Wie die Tabelle zeigt, besteht die analoge Beziehung zwischen dem Dodekaeder und dem Ikosaeder. Beide Körper führen daher auf eine

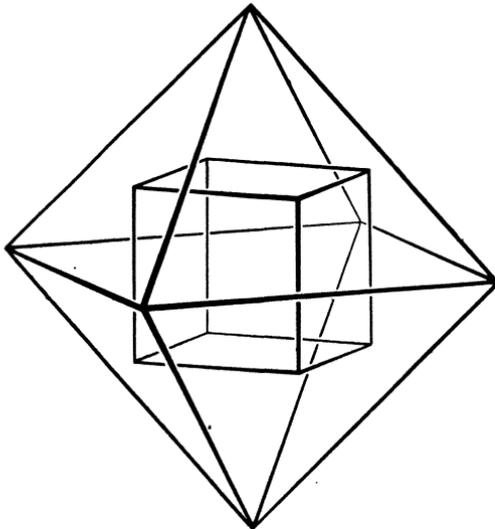


Abb. 101.

und dieselbe Gruppe der Kugel, die man gewöhnlich als Ikosaedergruppe bezeichnet. Durch die Betrachtungen aus der Kristallographie konnten wir diese Gruppe nicht auffinden, da in ihr die Zahl fünf eine Rolle spielt, während in den kristallographischen Klassen keine 5-zähligen Achsen vorkommen. Beim Tetraeder liefert die Konstruktion keinen anderen regulären Körper, sondern wieder ein Tetraeder.

Im nächsten Kapitel werden wir im Dualitäts-

prinzip des Raumes eine allgemeinere Methode kennenlernen, die Punkte, Geraden und Ebenen einer Figur auf die Ebenen, Geraden und Punkte einer zweiten Figur zu beziehen. Nach diesem Prinzip entspricht der Würfel „dual“ dem Oktaeder, das Ikosaeder dem Dodekaeder und das Tetraeder sich selbst.

Eine nähere Betrachtung lehrt, daß die Tetraedergruppe eine Untergruppe der Oktaedergruppe ist; ähnlich hatten wir auch bei den diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der Ebene die einen als Untergruppen anderer erkannt. Die Beziehung zwischen den Gruppen T und O hat die anschauliche Konsequenz, daß ich in einen Würfel ein reguläres Tetraeder einbeschreiben kann, so daß dessen Ecken Würfecken sind und die Kanten des Tetraeders Diagonalen der Würfelflächen werden. Man kann zwei verschiedene derartige Tetraeder in den Würfel hineinstellen (Abb. 102).

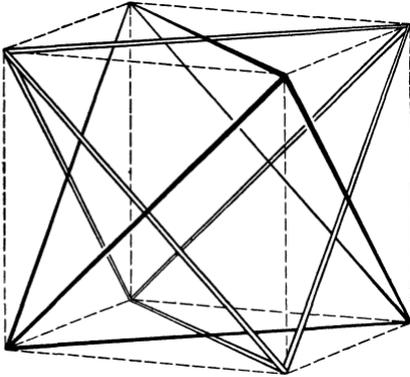


Abb. 102.

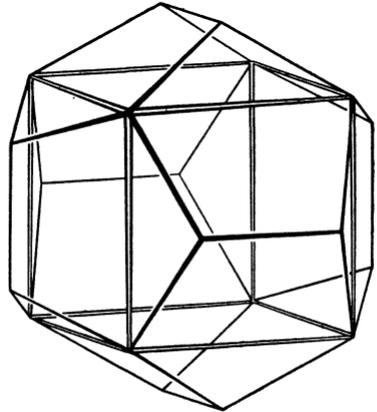


Abb. 103.

Ebenso erweist sich nun die Oktaedergruppe als Untergruppe der Ikosaedergruppe. Aus diesem Grunde kann man einen Würfel in ein Dodekaeder in gleicher Weise hineinstellen wie ein Tetraeder in einen Würfel (Abb. 103). Die nähere Betrachtung zeigt, daß es fünf solche Würfel in jedem Dodekaeder gibt; je eine Kante jedes Würfels liegt auf jeder Fläche des Dodekaeders, und je zwei Würfel stoßen in jeder Ecke zusammen.

Drittes Kapitel.

Konfigurationen.

Wir werden in diesem Kapitel geometrische Tatsachen kennenlernen, zu deren Formulierung und Beweis wir keine Strecken und Winkel auszumessen oder zu vergleichen brauchen. Man könnte meinen, daß sich ohne Längen- und Winkelmessung gar keine wesentlichen Eigenschaften einer Figur mehr bestimmen ließen und nur noch ungenaue Aussagen übrigblieben. In der Tat hat man lange Zeit nur die metrische Seite der Geometrie erforscht. Erst bei der wissenschaftlichen Begrün-