NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND
UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0015

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Unsere Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß der Abstand $P'Q' = r'$ gegenüber PQ unverändert geblieben ist; $r' = r$. Nun gilt für r' die zu (4) analoge Formel

$$r'^2 = \sum a_i \frac{(x_i' - y_i')^2}{a_i - \lambda'}. \tag{4'}$$

Aus (5) folgt

$$\frac{(x_i' - y_i')^2}{a_i - \lambda'} = \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

also wegen (4), (4′) in der Tat $r = r'$.

Denken wir uns λ fest, λ' veränderlich, so gibt (5) die Bahnkurven der Punkte des Stangenmodells, wenn dieses, wie wir immer angenommen haben, unter Festhaltung der Symmetrieebenen deformiert wird. Diese Kurven sind, wie eine kurze Rechnung zeigt, die Schnittkurven der mit (1) konfokalen Ellipsoide und zweischaligen Hyperboloide.

Zweites Kapitel.

Reguläre Punktsysteme.

Wir wollen in diesem Kapitel die metrischen Eigenschaften des Raums unter einem neuen Gesichtspunkt betrachten. Während wir uns nämlich bisher mit Kurven und Flächen, also mit kontinuierlichen Gebilden beschäftigt haben, wenden wir uns nun zu Systemen, die aus getrennten Elementen aufgebaut sind. Solche Systeme treten auch in den übrigen Gebieten der Mathematik oft auf, besonders in der Zahlen- und Funktionentheorie und in der Krystallographie[1].

§ 5. Ebene Punktgitter.

Ein besonders einfaches Gebilde, das aus diskreten Teilen besteht, ist das ebene quadratische Punktgitter (Abb. 39). Um es zu erzeugen, markieren wir uns in einer Ebene die vier Ecken eines Quadrats vom Inhalt Eins, verschieben das Quadrat parallel einer Seite um die Seitenlänge und zeichnen die beiden neu hinzugekommenen Eckpunkte ebenfalls auf. Dieses Verfahren denken wir uns nach derselben und dann nach der entgegengesetzten Seite unbegrenzt fortgesetzt. So erhalten wir in der Ebene einen Streifen, der aus zwei Reihen äquidistanter Punkte besteht. Diesen Streifen verschieben wir senkrecht zu sich selbst um eine Quadratseitenlänge, markieren die neu hinzugekommenen Punkte und denken uns auch dies Verfahren nach beiden Seiten unbegrenzt oft

[1] Soweit die folgenden Abschnitte die Krystallographie streifen, ist die Bezeichnungsweise nicht immer der üblichen krystallographischen Terminologie angepaßt. Im Rahmen der einfachen geometrischen Betrachtung, auf die wir uns beschränken, sind oft andere Namen kürzer und eindringlicher.

wiederholt. Die Gesamtheit aller so markierten Punkte bildet das quadratische Punktgitter; man kann es auch definieren als die Menge aller Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in einem ebenen cartesischen Koordinatensystem.

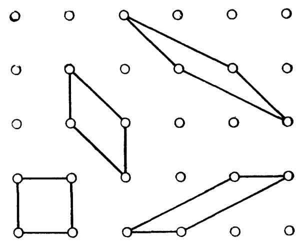

Abb. 39.

In diesem Gitter kann ich natürlich aus vier Punkten auch andere Figuren bilden als Quadrate, z. B. Parallelogramme. Man erkennt nun leicht, daß sich das Gitter ebenso wie aus dem Quadrat aus jedem solchen Parallelogramm erzeugen läßt, wenn das Parallelogramm nur außer seinen Ecken keinen Gitterpunkt mehr in seinem Innern und auf dem Rande enthält (andernfalls könnte ja das Verfahren nicht alle Gitterpunkte liefern). Die Betrachtung jedes solchen Parallelogramms zeigt nun, daß es gleichen Flächeninhalt hat wie das erzeugende Quadrat (vgl. Abb. 39); einen strengen Beweis dafür werden wir auf S. 30 kennenlernen.

Bereits dieses einfache Gitter hat Anlaß zu wichtigen mathematischen Untersuchungen gegeben, deren erste von GAUSS stammt. Er versuchte die Anzahl $f(r)$ der Gitterpunkte zu bestimmen, die auf einer Kreisscheibe vom Radius r liegen; dabei soll der Kreismittelpunkt ein Gitterpunkt sein und r eine ganze Zahl. GAUSS hat diese Anzahl für viele Werte von r empirisch bestimmt und fand z. B.:

$r = 10$	$f(r) = 317,$
$r = 20$	$1257,$
$r = 30$	$2821,$
$r = 100$	$31417,$
$r = 200$	$125629,$
$r = 300$	$282697.$

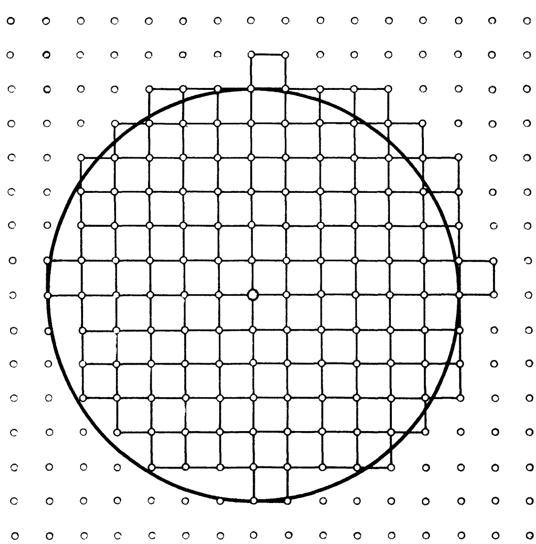

Abb. 40.

Aus der Betrachtung der Funktion $f(r)$ ergibt sich nämlich eine Methode zur Bestimmung des Wertes von π. Da jedes Grundquadrat den Inhalt Eins hat, ist $f(r)$ gleich dem Inhalt der Fläche F, die von allen den Quadraten bedeckt wird, deren linke untere Ecke auf der Kreisscheibe liegt (Abb. 40). $f(r)$ unterscheidet sich also vom Inhalt $r^2\pi$ der Kreisscheibe höchstens um den Flächeninhalt $A(r)$ derjenigen (mitgerechneten oder fortgelassenen) Quadrate, die von der Peripherie geschnitten werden.

$$|f(r) - r^2\pi| \leqq A(r),$$

$$\left|\frac{f(r)}{r^2} - \pi\right| \leqq \frac{A(r)}{r^2}.$$

Um $A(r)$ abzuschätzen, genügt nun eine einfache Überlegung. Die Maximalentfernung zweier Punkte im Einheitsquadrat beträgt $\sqrt{2}$. Alle Quadrate, die von der Peripherie geschnitten werden, liegen also in einem Kreisring von der Breite $2\sqrt{2}$, dessen begrenzende Kreise die Radien $r + \sqrt{2}$ und $r - \sqrt{2}$ haben. Dieser Kreisring hat den Flächeninhalt

$$B(r) = \left[(r + \sqrt{2})^2 - (r - \sqrt{2})^2\right]\pi = 4\sqrt{2}\pi r.$$

Nun ist aber $A(r) < B(r)$, also

$$\left|\frac{f(r)}{r^2} - \pi\right| < \frac{4\sqrt{2}\pi}{r}.$$

Daraus ergibt sich durch Grenzübergang die Formel, die wir zum Ziel hatten:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \pi. \tag{1}$$

Wenn man die von GAUSS ermittelten Funktionswerte $f(r)$ in diese Gleichung einsetzt, ergibt sich folgende Annäherung an $\pi = 3{,}14159$:

r	$\frac{f(r)}{r^2}$
$r = 10$	$= 3{,}17$,
20	3,1425,
30	3,134,
100	3,1417,
200	3,140725,
300	3,14107.

Eine Anwendung der Gleichung (1) besteht im Beweis der auf S. 29 ausgesprochenen Behauptung, daß jedes der Parallelogramme, durch die ich das quadratische Punktgitter erzeugen kann, den Flächeninhalt Eins besitzt. Ich weise nämlich jeden Gitterpunkt der Kreisscheibe in gleicher Weise einem solchen Parallelogramm als Eckpunkt zu und vergleiche die von diesen Parallelogrammen bedeckte Fläche F mit der Kreisscheibe. Wieder ist die Abweichung geringer als der Inhalt $B(r)$ eines Kreisrings mit den Radien $r + c$ und $r - c$, wo c die (von r unabhängige) Maximalentfernung zweier Punkte im Grundparallelogramm bedeutet. Ist dessen Inhalt a, so hat F den Inhalt $a \cdot f(r)$, und wir erhalten die Formel

$$|af(r) - r^2\pi| < B(r) = 4rc\pi,$$

also

$$\left| \frac{a f(r)}{r^2} - \pi \right| < \frac{4 c \pi}{r},$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \frac{\pi}{a}.$$

Wir haben aber oben gezeigt, daß

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \pi.$$

Hieraus[1] folgt die Behauptung $a = 1$.

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung allgemeiner „Einheitsgitter" zu, d. h. Gittern, die von einem beliebigen Parallelogramm des Inhalts Eins auf dieselbe Art erzeugt werden wie das quadratische Gitter vom Quadrat. Wiederum können verschiedene Parallelogramme dasselbe Gitter erzeugen, sie müssen dann aber alle den Inhalt Eins haben, was man in gleicher Weise wie beim quadratischen Gitter beweist.

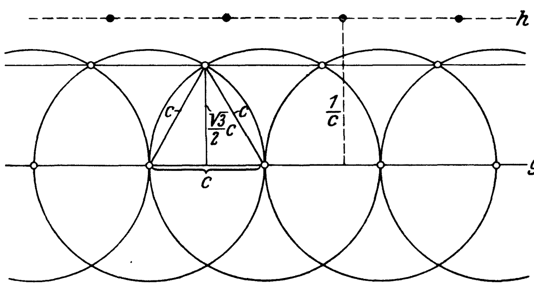

Abb. 41.

Für jedes solches Einheitsgitter ist der kleinste Abstand c zweier Gitterpunkte eine charakteristische Größe. Es gibt Einheitsgitter mit beliebig kleinem c, z. B. solche, die von einem Rechteck mit den Seiten c und $1/c$ erzeugt werden. Dagegen kann c offenbar nicht beliebig groß werden, weil das Gitter sonst kein Einheitsgitter sein könnte. Also hat c eine obere Grenze. Wir wollen sie bestimmen.

Sei in einem beliebigen Einheitsgitter ein Punktepaar mit dem kleinsten vorkommenden Abstand c herausgegriffen (Abb. 41). Legt man durch die beiden Punkte eine Gerade g, so müssen auf ihr nach Definition des Gitters immer weitere Gitterpunkte im Abstand c liegen; die zu g im Abstand $1/c$ gezogene Parallele h muß ebenfalls unendlich viele Gitterpunkte enthalten, dagegen muß der Streifen zwischen den Parallelen von Gitterpunkten frei sein, was beides daraus folgt, daß das Gitter ein Einheitsgitter sein soll. Um alle Gitterpunkte von g schlage ich nun Kreise mit dem Radius c. Sie überdecken in ihrer Gesamtheit einen Streifen, der von der übrigen Ebene durch Kreisbögen abgegrenzt wird. Jeder innere Punkt dieses Streifens ist von mindestens

[1] Bei diesem Beweis hätten wir statt der Kreisscheibe auch jedes andere Flächenstück verwenden können, dessen Rand sich durch einen im Verhältnis zum Gesamtflächeninhalt beliebig schmalen Flächenstreifen zudecken läßt.

einem Gitterpunkt um weniger als c entfernt, kann also nach Definition von c kein Gitterpunkt sein. Also ist $1/c$ größer oder gleich dem kürzesten Abstand der Grenzlinie des Streifens von g. Dieser Abstand ist offenbar die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite c; also haben wir:

$$\frac{1}{c} \geqq \frac{c}{2}\sqrt{3},$$

$$c \leqq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Die Zahl $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ ist die gesuchte obere Grenze für c. Dieser Extremwert wird auch tatsächlich in einem Gitter erreicht, nämlich, wie aus Abb. 41 ersichtlich, in einem Gitter, dessen erzeugendes Parallelogramm sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

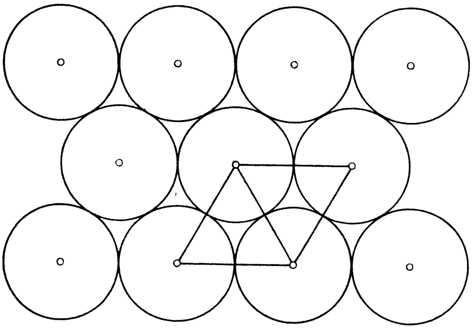

Abb. 42.

Durch Vergrößern oder Verkleinern können wir nun jedes beliebige Gitter aus einem Einheitsgitter erzeugen. Ist also a^2 der Inhalt eines Grundparallelogramms in einem Gitter und C der Minimalabstand zweier Gitterpunkte, so gilt:

$$C \leqq a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Wiederum steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn das Gitter aus gleichseitigen Dreiecken aufgebaut ist. Bei *gegebenem* Minimalabstand besitzt also dieses Gitter das kleinstmögliche Grundparallelogramm. Nun ist aber, wie wir schon S. 30 gesehen haben, der Flächeninhalt großer Flächen annähernd gleich der Anzahl der Gitterpunkte im Innern multipliziert mit dem Flächeninhalt des Grundparallelogramms. Unter allen Gittern gegebenen Minimalabstands enthält also innerhalb einer gegebenen großen Fläche das Gitter der gleichseitigen Dreiecke die meisten Punkte.

Schlägt man um alle Punkte eines Gitters Kreise mit dem halben Minimalabstand des Gitters als Radius, so erhält man ein System von Kreisen, die sich teilweise berühren, aber nie überdecken. Man bezeichnet ein derart konstruiertes System als eine gitterförmige Kreislagerung. Eine gitterförmige Kreislagerung nennen wir um so dichter, je mehr von den Kreisen in einem vorgeschriebenen (hinreichend großen) Gebiet Platz haben. Demnach liefert das Dreiecksgitter die dichteste Kreislagerung (Abb. 42).

Als Maß für die Dichte einer Kreislagerung wählen wir die Gesamtfläche der eingelagerten Kreise geteilt durch den Inhalt des gegebenen Gebiets. Bei hinreichend großen Gebieten nähert sich dieser Wert offenbar dem Quotienten aus dem Flächeninhalt eines einzelnen Kreises geteilt durch den Inhalt des Grundparallelogramms. Als Optimum der Dichte liefert das Dreiecksgitter den Wert

$$D = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\pi = 0{,}289\,\pi\,.$$

§ 6. Ebene Punktgitter in der Zahlentheorie.

Bei vielen Problemen der Zahlentheorie spielen die Punktgitter eine Rolle. Wir wollen dafür einige Beispiele geben. Um Längen der Darstellung zu vermeiden, müssen wir allerdings in diesem Paragraphen etwas mehr mathematische Kenntnisse voraussetzen als sonst in diesem Buche.

1. Die Leibnizsche Reihe: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$. Wie in § 5 bedeute $f(r)$ die Anzahl der Gitterpunkte des ebenen quadratischen Einheitsgitters innerhalb eines Kreises vom Radius r mit einem Gitterpunkt als Mittelpunkt. Wir wollen diesen Punkt zum Nullpunkt eines cartesischen Koordinatensystems machen, in dem die Gitterpunkte die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten werden. Dann ist $f(r)$ die Anzahl aller Paare von ganzen Zahlen x, y, für die $x^2 + y^2 \leqq r^2$ gilt. Nun ist $x^2 + y^2$ stets eine ganze Zahl n. Ich erhalte also $f(r)$, wenn ich für alle ganzen Zahlen $n \leqq r^2$ zusehe, auf wieviel Arten sie sich als Quadratsumme zweier ganzen Zahlen schreiben lassen, und wenn ich dann diese Anzahlen von Zerlegungsmöglichkeiten addiere. Nun gilt der zahlentheoretische Satz: Die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl n als Quadratsumme zweier ganzen Zahlen ist gleich dem vierfachen Überschuß der Anzahl der Teiler von n von der Form $4k+1$ über die Anzahl der Teiler von der Form $4k+3$. Dabei sind die Darstellungen wie $n = a^2 + b^2$, $n = b^2 + a^2$, $n = (-a)^2 + b^2$ usw. alle als verschieden zu rechnen, wie ja diesen Zerlegungen auch verschiedene Punkte unseres Gitters entsprechen. Jede Zerlegung führt also zu einem System von acht Zerlegungen (abgesehen von den Sonderfällen $a = \pm b$, $a = 0$, $b = 0$). Als Beispiel des Satzes betrachten wir die Zahl $n = 65$. Sie hat im ganzen die Teiler 1, 5, 13, 65. Alle diese Teiler haben die Form $4k+1$, Teiler der Form $4k+3$ treten nicht auf. Der betrachtete Überschuß ist also 4, und nach unserem Satz muß sich 65 auf 16 verschiedene Arten als Quadratsumme schreiben lassen (oder, was dasselbe ist, der Kreis um den Nullpunkt vom Radius $\sqrt{65}$ muß durch 16 Gitterpunkte hindurchgehen). In der Tat ist $65 = 1^2 + 8^2$ und $65 = 4^2 + 7^2$, und jede dieser Darstellungen ist achtmal zu zählen.