Als Maß für die Dichte einer Kreislagerung wählen wir die Gesamtfläche der eingelagerten Kreise geteilt durch den Inhalt des gegebenen Gebiets. Bei hinreichend großen Gebieten nähert sich dieser Wert offenbar dem Quotienten aus dem Flächeninhalt eines einzelnen Kreises geteilt durch den Inhalt des Grundparallelogramms. Als Optimum der Dichte liefert das Dreiecksgitter den Wert

$$D = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\pi = 0{,}289\,\pi\,.$$

§ 6. Ebene Punktgitter in der Zahlentheorie.

Bei vielen Problemen der Zahlentheorie spielen die Punktgitter eine Rolle. Wir wollen dafür einige Beispiele geben. Um Längen der Darstellung zu vermeiden, müssen wir allerdings in diesem Paragraphen etwas mehr mathematische Kenntnisse voraussetzen als sonst in diesem Buche.

1. Die Leibnizsche Reihe: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$. Wie in § 5 bedeute $f(r)$ die Anzahl der Gitterpunkte des ebenen quadratischen Einheitsgitters innerhalb eines Kreises vom Radius r mit einem Gitterpunkt als Mittelpunkt. Wir wollen diesen Punkt zum Nullpunkt eines cartesischen Koordinatensystems machen, in dem die Gitterpunkte die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten werden. Dann ist $f(r)$ die Anzahl aller Paare von ganzen Zahlen x, y, für die $x^2 + y^2 \leqq r^2$ gilt. Nun ist $x^2 + y^2$ stets eine ganze Zahl n. Ich erhalte also $f(r)$, wenn ich für alle ganzen Zahlen $n \leqq r^2$ zusehe, auf wieviel Arten sie sich als Quadratsumme zweier ganzen Zahlen schreiben lassen, und wenn ich dann diese Anzahlen von Zerlegungsmöglichkeiten addiere. Nun gilt der zahlentheoretische Satz: Die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl n als Quadratsumme zweier ganzen Zahlen ist gleich dem vierfachen Überschuß der Anzahl der Teiler von n von der Form $4k + 1$ über die Anzahl der Teiler von der Form $4k + 3$. Dabei sind die Darstellungen wie $n = a^2 + b^2$, $n = b^2 + a^2$, $n = (-a)^2 + b^2$ usw. alle als verschieden zu rechnen, wie ja diesen Zerlegungen auch verschiedene Punkte unseres Gitters entsprechen. Jede Zerlegung führt also zu einem System von acht Zerlegungen (abgesehen von den Sonderfällen $a = \pm b$, $a = 0$, $b = 0$). Als Beispiel des Satzes betrachten wir die Zahl $n = 65$. Sie hat im ganzen die Teiler 1, 5, 13, 65. Alle diese Teiler haben die Form $4k + 1$, Teiler der Form $4k + 3$ treten nicht auf. Der betrachtete Überschuß ist also 4, und nach unserem Satz muß sich 65 auf 16 verschiedene Arten als Quadratsumme schreiben lassen (oder, was dasselbe ist, der Kreis um den Nullpunkt vom Radius $\sqrt{65}$ muß durch 16 Gitterpunkte hindurchgehen). In der Tat ist $65 = 1^2 + 8^2$ und $65 = 4^2 + 7^2$, und jede dieser Darstellungen ist achtmal zu zählen.

Wir erhalten nach diesem Satz die Zahl $\frac{1}{4}(f(r)-1)$, wenn wir für alle positiven ganzen Zahlen $n \leqq r^2$ die Anzahl der Teiler von der Form $4k+3$ von der Anzahl der Teiler von der Form $4k+1$ abziehen und alle diese Differenzen addieren. Es ist aber viel einfacher, die Reihenfolge dieser Additionen und Subtraktionen zu ändern. Wir wollen zunächst die Gesamtanzahl aller Teiler $4k+1$ aller Zahlen $n \leqq r^2$ zusammenrechnen und davon die Gesamtanzahl der Teiler $4k+3$ abziehen. Um die erste Anzahl zu bestimmen, schreiben wir die Zahlen der Form $4k+1$ der Größe nach auf, also 1, 5, 9, 13, ... und lassen alle Zahlen fort, die r^2 übertreffen. Jede dieser Zahlen tritt als Teiler genau so oft auf, wie es Vielfache von ihr gibt, die r^2 nicht übertreffen. 1 ist also $[r^2]$ mal zu zählen, 5 dagegen $[r^2/5]$ mal, wenn wir mit $[a]$ allgemein die größte ganze Zahl bezeichnen, die a nicht übertrifft. Die gesuchte Gesamtanzahl der Teiler $4k+1$ ist demnach $[r^2]+\left[\frac{r^2}{5}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]+\left[\frac{r^2}{13}\right]+\cdots$. Nach Definition des Symbols $[a]$ bricht diese Reihe von selbst ab, sobald in der eckigen Klammer der Nenner den Zähler übertrifft. Dieselbe Betrachtung kann man für die Teiler $4k+3$ anstellen und erhält so für deren Gesamtanzahl die Reihe $\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{11}\right]+\cdots$. Wir haben diese zweite Summe von der ersten abzuziehen. Da beides endliche Summen sind, dürfen wir wieder die Reihenfolge beliebig umstellen, und das ist für den nachher vorzunehmenden Grenzübergang $r \to \infty$ zweckmäßig. Wir wollen unser Resultat in der Form aufstellen:

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=[r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]-\left[\frac{r^2}{11}\right]+\cdots.$$

Um besser zu übersehen, wann die Reihe abbricht, wollen wir r als ungerade ganze Zahl voraussetzen; dann hat die Reihe $\frac{r^2+1}{2}$ Glieder. Die Summanden haben abwechselndes Vorzeichen und nehmen nicht zu. Wenn wir daher die Reihe schon beim Glied $\left[\frac{r^2}{r}\right]=[r]=r$ abbrechen, ist der Fehler höchstens gleich diesem letzten Glied r, wir können also diesen Fehler in der Form ϑr schreiben, wo ϑ ein echter Bruch ist. Wenn wir in den übriggebliebenen $\frac{1}{2}(r+1)$ Gliedern die eckigen Klammern weglassen, machen wir in jedem Glied einen Fehler, der Eins nicht erreicht, im ganzen also wieder einen Fehler, den wir in der Form $\vartheta' r$ schreiben können, wo ϑ' ein echter Bruch ist. Wir haben demnach die Abschätzung

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=r^2-\frac{r^2}{3}+\frac{r^2}{5}-\frac{r^2}{7}+\cdots\pm r\pm\vartheta r\pm\vartheta' r,$$

oder wenn wir durch r^2 dividieren:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f(r)}{r^2}-\frac{1}{r^2}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\pm\frac{1}{r}\pm\frac{\vartheta+\vartheta'}{r}.$$

Wenn wir nun r (durch alle ungeraden ganzen Zahlen) unbegrenzt wachsen lassen, so strebt $f(r)/r^2$ gegen π, wie in § 5 bewiesen. Damit haben wir die LEIBNIZsche Reihe abgeleitet:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots .$$

2. Der kleinste Wert quadratischer Formen. Es sei

$$f(m, n) = am^2 + 2bmn + cn^2$$

eine quadratische Form mit reellen Koeffizienten a, b, c und der Determinante $D = ac - b^2 = 1$. Dann kann a nicht verschwinden. Wir wollen noch $a > 0$ voraussetzen. Dann ist bekanntlich $f(m, n)$ positiv definit, d. h. positiv für alle reellen Zahlenpaare m, n außer $m = n = 0$. Wir wollen zeigen: Es gibt zwei ganze Zahlen m, n, die nicht beide verschwinden und für die $f(m, n) \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ausfällt, wie auch die Koeffizienten a, b, c, abgesehen von den Bedingungen $ac - b^2 = 1$ und $a > 0$, gewählt sein mögen.

Diese Behauptung erweist sich als Konsequenz unserer Betrachtung über den Minimalabstand von Gitterpunkten im Einheitsgitter. Wir formen $f(m, n)$ in der üblichen Weise um unter Benutzung der Gleichung $D = 1$:

$$f(m, n) = \left(\sqrt{a}\,m + \frac{b}{\sqrt{a}}\,n\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\,n\right)^2.$$

Nun betrachten wir in einem cartesischen ebenen Koordinatensystem die Punkte mit den Koordinaten

$$x = \sqrt{a}\,m + \frac{b}{\sqrt{a}}\,n,$$
$$y = \sqrt{\frac{1}{a}}\,n,$$

wobei m, n alle ganzen Zahlen durchlaufen. Nach einfachen Sätzen der analytischen Geometrie müssen diese Punkte ein Einheitsgitter bilden. Denn sie entstehen aus dem quadratischen Einheitsgitter $x = m$, $y = n$, wenn man die Ebene der affinen Transformation

$$x = \sqrt{a}\,\xi + \frac{b}{\sqrt{a}}\,\eta,$$
$$y = \sqrt{\frac{1}{a}}\,\eta$$

von der Determinante Eins unterwirft. Nun wird aber $f(m, n) = x^2 + y^2$; $\sqrt{f(m, n)}$ stellt also, wenn m und n alle ganzen Zahlen durchlaufen, den Abstand des zugehörigen Gitterpunktes vom Nullpunkt dar. Nach dem zu Anfang erwähnten Satz gibt es einen Punkt P des Gitters, für den dieser Abstand nicht größer ausfällt als $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Für die zwei ganzen

Zahlen m, n, die zu P gehören, ist daher, wie wir es erreichen wollten,

$$f(m, n) \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Man kann dieses Ergebnis auf das Problem anwenden, reelle Zahlen durch rationale zu approximieren. Es sei α eine beliebige reelle Zahl; wir betrachten dann die Form

$$f(m, n) = \left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon^2 n^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} m^2 - 2\frac{\alpha}{\varepsilon^2} mn + \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right) n^2.$$

Diese Form hat die Determinante

$$D = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right) - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^4} = 1.$$

Dabei sei ε eine positive, sonst beliebige Zahl. Nach unserem Ergebnis gibt es stets zwei ganze Zahlen m, n, für die die Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon^2 n^2 \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Also gelten erst recht die beiden Abschätzungen

$$\left|\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right| \leqq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \qquad |\varepsilon n| \leqq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Daraus ergeben sich die Abschätzungen[1]:

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{|n|}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \qquad |n| \leqq \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Ist α nicht rational, so muß die linke Seite der ersten Ungleichung von Null verschieden sein. Wir müssen also notwendig unbegrenzt viele solche Zahlenpaare n, m erhalten, indem wir ε immer kleinere Werte erteilen; denn dann muß $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$ unbegrenzt abnehmen. Wir erhalten auf diese Weise eine Folge rationaler Zahlen m/n, die die Irrationalzahl α beliebig genau approximieren. Andererseits können wir ε mit Hilfe der zweiten Ungleichung eliminieren. Auf diese Weise ergibt sich

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Wir haben also eine Folge von approximierenden Brüchen, bei der die Güte der Approximation dem Quadrat des Nenners proportional bleibt; bei der also eine verhältnismäßig gute Annäherung mit verhältnismäßig kleinen Nennern erzielt wird.

---

[1] Division durch n ist bei hinreichend kleinem ε erlaubt, da die Ungleichung $|\alpha n - m| \leqq \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ nicht bestehen könnte, wenn $n = 0$ wäre.

3. Der Satz von Minkowski. Es ist Minkowski gelungen, einen Satz über Punktgitter aufzustellen, der trotz seiner Einfachheit viele verschiedenartige Probleme der Zahlentheorie aufgeklärt hat, die mit anderen Methoden nicht bewältigt werden konnten. Der Deutlichkeit halber wollen wir hier den Satz nicht in voller Allgemeinheit aufstellen, sondern uns mit einem Spezialfall begnügen, der sich besonders leicht formulieren läßt und der trotzdem schon alles für die Methode Wesentliche enthält. Dieser Satz lautet:

Wenn man in ein beliebiges ebenes Einheitsgitter ein Quadrat von der Seitenlänge 2 legt, das einen Gitterpunkt zum Mittelpunkt hat, so liegt im Innern oder auf dem Rand dieses Quadrats sicher noch ein weiterer Gitterpunkt.

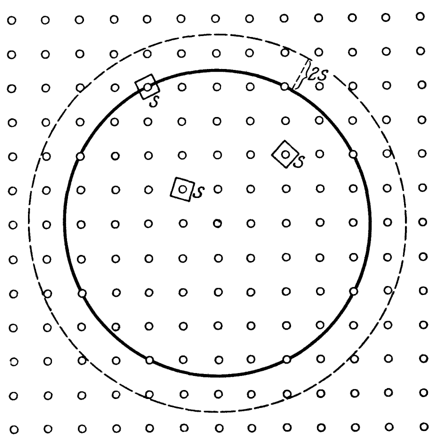

Abb. 43.

Zum Beweise denke ich mir in der Ebene des Gitters irgendein großes Gebiet abgegrenzt, z. B. Inneres und Rand eines Kreises von großem Radius r mit einem Gitterpunkt als Mittelpunkt. Um jeden in dieses Gebiet fallenden Gitterpunkt als Mittelpunkt lege ich ein Quadrat der Seitenlänge s (Abb. 43). Wir wollen nun fordern, daß diese Quadrate sich nirgends überdecken, wie groß r auch gewählt sei, und aus dieser Forderung eine Abschätzung für die Seitenlänge s gewinnen. Da nach unserer früheren Bezeichnungsweise $f(r)$ Gitterpunkte im Gebiet liegen und die Quadrate sich nicht überdecken, so beträgt ihr Gesamtinhalt $s^2 f(r)$. Andererseits fallen diese Quadrate sicher ins Innere des konzentrischen Kreises von vergrößertem Radius $r + 2s$. Wir erhalten also die Abschätzung

$$s^2 f(r) \leqq \pi (r + 2s)^2$$

oder

$$s^2 \leqq \frac{\pi r^2}{f(r)} \left(1 + \frac{2s}{r}\right)^2.$$

Wenn wir nun s festhalten, aber r unbegrenzt wachsen lassen, so lehren unsere früheren Betrachtungen über $f(r)$, daß die rechte Seite der Ungleichung gegen Eins strebt. Wir erhalten also für s die Bedingung

$$s \leqq 1.$$

Da es nur die beiden Möglichkeiten gibt, daß die Quadrate sich überdecken oder sich nicht überdecken, so folgt für jedes positive noch so kleine ε, daß stets Überdeckungen auftreten müssen, wenn ich von Quadraten der Seitenlänge $1 + \varepsilon$ ausgehe. Dabei kann ich die Quadrate noch beliebig um ihre Mittelpunkte drehen, da über ihre gegenseitige Stellung nichts vorausgesetzt war. Ich will sie nun alle parallel orientiert denken. Greifen wir dann zwei sich überdeckende Quadrate a, b mit den Mittelpunkten A und B heraus (die nach unserer Voraussetzung Gitterpunkte sind), so muß auch der Mittelpunkt M der Strecke AB ins Innere beider Quadrate fallen (Abb. 44).

Zur Abkürzung wollen wir einmal alle Punkte, die wie M die Verbindungsstrecke zweier Gitterpunkte halbieren, als „Halbierungspunkte" des Gitters bezeichnen. Dann können wir schließen: Jedes Quadrat a der Seitenlänge $1 + \varepsilon$, das einen Gitterpunkt zum Mittelpunkt hat, muß einen Halbierungspunkt in seinem Innern enthalten. Denn wenn wir um alle übrigen Gitterpunkte weitere Quadrate legen, die mit a gleichorientiert und kongruent sind, so müssen Überdeckungen auftreten, und da in dieser Figur alle Quadrate gleichberechtigt sind, muß auch a selbst von einem anderen Quadrat b teilweise überdeckt werden, also einen wie in Abb. 44 konstruierten Halbierungspunkt M enthalten. Nun läßt sich der Beweis leicht indirekt zu Ende führen. Könnte ich um einen Gitterpunkt A als Mittelpunkt ein Quadrat der Seitenlänge 2 legen, das im Innern und auf dem Rand keinen weiteren Gitterpunkt enthielte, so könnte ich dieses Quadrat parallel und konzentrisch zu sich selbst etwas vergrößern, so daß auch das größere Quadrat a' der Seitenlänge $2(1 + \varepsilon)$ keinen Gitterpunkt im Innern enthielte. Wenn ich andererseits dieses Quadrat wieder parallel und konzentrisch zu sich selbst auf die Hälfte verkleinere, erhalte ich ein Quadrat a der Seitenlänge $1 + \varepsilon$ mit dem Gitterpunkt A als Mittelpunkt, und dieses muß nach dem soeben Bewiesenen einen Halbierungspunkt M enthalten. Das ist ein Widerspruch. Denn verlängere ich AM um sich selbst bis B, so muß B ein Gitterpunkt sein, und aus der gegenseitigen Lage von a und a' würde folgen, daß dieser Gitterpunkt im Innern von a' läge (Abb. 45).

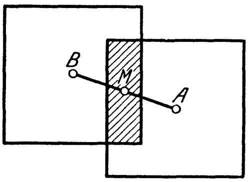

Abb. 44.

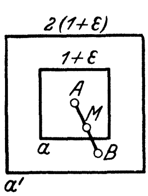

Abb. 45.

Eine besonders wirksame Anwendung findet der MINKOWSKIsche Satz bei dem schon im vorigen Abschnitt erwähnten Problem, reelle Zahlen durch rationale zu approximieren. Wir können ganz ähnlich vorgehen wie im vorigen Abschnitt, werden aber ein etwas schärferes Resultat erhalten. Mit Hilfe der gegebenen reellen Irrationalzahl α konstruieren wir das Gitter, dessen Punkte in einem cartesischen System die Koordinaten

$$x = \frac{\alpha n - m}{\varepsilon}, \qquad y = \varepsilon n$$

haben, wobei m, n alle ganzen Zahlen durchlaufen und ε eine positive, sonst beliebige Zahl ist. Wie oben erkennt man, daß dieses Gitter ein Einheitsgitter ist; in Abb. 46 ist ein erzeugendes Parallelogramm des Gitters gezeichnet unter der Annahme $0 < \alpha < 1$. Legen wir um den Nullpunkt als Mittelpunkt ein achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge 2, so muß dieses nach dem MINKOWSKIschen Satz noch einen weiteren Gitterpunkt enthalten. Dieser ist durch zwei bestimmte Zahlen m, n gekennzeichnet, die nicht beide verschwinden. Andererseits sind die Koordinaten der Punkte im Innern und auf dem Rand des Quadrats durch die Ungleichungen $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ bestimmt. Die Zahlen m, n erfüllen also die Ungleichungen

$$\frac{|\alpha n - m|}{\varepsilon} \leqq 1, \qquad |\varepsilon n| \leqq 1$$

oder

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{|n|}, \qquad |n| \leqq \frac{1}{\varepsilon}.$$

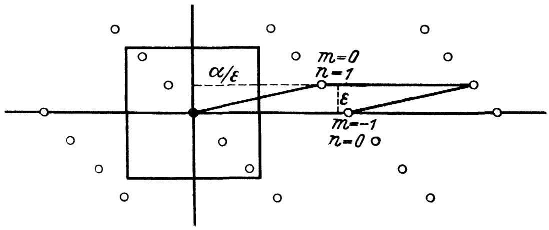

Abb. 46.

Dies gibt wieder eine Folge von Brüchen m/n, die α beliebig genau approximieren. Elimination von ε liefert

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqq \frac{1}{n^2}.$$

Der MINKOWSKIsche Satz beweist also die Existenz einer Folge von Brüchen, die α noch besser annähern, als sich für die im vorigen Abschnitt konstruierte Folge beweisen ließ. Denn dort hatten wir nur die Approximationen

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{n^2}$$

erhalten, die schwächer sind, weil $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ ist.

Natürlich lassen sich die in diesem Paragraphen angegebenen Methoden nicht nur in der Ebene, sondern auch in Räumen von beliebig vielen Dimensionen anwenden, wodurch sich viel allgemeinere zahlentheoretische Resultate gewinnen lassen.

§ 7. Punktgitter in drei und mehr Dimensionen.

Ein räumliches Punktgitter entsteht, wenn ich auf ein Parallelepiped nach drei Dimensionen hin dasselbe Verfahren anwende, durch das das ebene Punktgitter aus einem Parallelogramm erzeugt wird. Auch im Raum können Parallelepipede verschiedener Gestalt dasselbe Gitter erzeugen, müssen dann aber den gleichen Rauminhalt haben. Alle diese Parallelepipede müssen ferner acht Punkte des Gitters zu Ecken haben und in ihrem Innern von Gitterpunkten frei