

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG_0017

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

haben, wobei m, n alle ganzen Zahlen durchlaufen und ε eine positive, sonst beliebige Zahl ist. Wie oben erkennt man, daß dieses Gitter ein Einheitsgitter ist; in Abb. 46 ist ein erzeugendes Parallelogramm des Gitters gezeichnet unter der Annahme $0 < \alpha < 1$. Legen wir um den Nullpunkt als Mittelpunkt ein achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge 2, so muß dieses nach dem MINKOWSKISCHEN Satz noch einen weiteren Gitterpunkt enthalten. Dieser ist durch zwei bestimmte Zahlen m, n gekennzeichnet, die nicht beide verschwinden. Andererseits sind die Koordinaten der Punkte im Innern und auf dem Rand des Quadrats durch die Ungleichungen $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ bestimmt. Die Zahlen m, n erfüllen also die Ungleichungen

$$\frac{|\alpha n - m|}{\varepsilon} \leq 1, \quad |\varepsilon n| \leq 1$$

oder

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|n|}, \quad |n| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

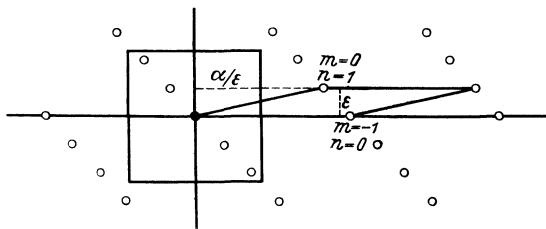


Abb. 46.

Dies gibt wieder eine Folge von Brüchen m/n , die α beliebig genau approximieren. Elimination von ε liefert

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Der MINKOWSKISCHE Satz beweist also die Existenz einer Folge von Brüchen, die α noch besser annähern, als sich für die im vorigen Abschnitt konstruierte Folge beweisen ließ. Denn dort hatten wir nur die Approximationen

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{n^2}$$

erhalten, die schwächer sind, weil $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ ist.

Natürlich lassen sich die in diesem Paragraphen angegebenen Methoden nicht nur in der Ebene, sondern auch in Räumen von beliebig vielen Dimensionen anwenden, wodurch sich viel allgemeinere zahlentheoretische Resultate gewinnen lassen.

§ 7. Punktgitter in drei und mehr Dimensionen.

Ein räumliches Punktgitter entsteht, wenn ich auf ein Parallelepiped nach drei Dimensionen hin dasselbe Verfahren anwende, durch das das ebene Punktgitter aus einem Parallelogramm erzeugt wird. Auch im Raum können Parallelepipede verschiedener Gestalt dasselbe Gitter erzeugen, müssen dann aber den gleichen Rauminhalt haben. Alle diese Parallelepipede müssen ferner acht Punkte des Gitters zu Ecken haben und in ihrem Innern von Gitterpunkten frei

sein. Wir sprechen von einem Einheitsgitter, wenn ein erzeugendes Parallelepipid den Inhalt Eins hat.

Aus demselben Grund wie in der Ebene gibt es auch bei den räumlichen Einheitsgittern keine positive untere Grenze für den Minimalabstand zweier Gitterpunkte, wohl aber eine obere Grenze dieser Größe. Ihre Bestimmung wird auf dieselbe Weise wie bei den ebenen Punktgittern durchgeführt und soll deshalb übergangen werden. Die Rolle, die dabei in der Ebene das gleichseitige Dreieck spielt, übernimmt im Raum das reguläre Tetraeder. Während aber in der Ebene das erzeugende Parallelogramm sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, besteht das entsprechende Parallelepipid im Raum, das reguläre Rhomboëder, aus zwei regulären Tetraedern und einem regulären Oktaeder (vgl. Abb. 49, S. 43)¹. Der Inhalt dieses Parallelepipeds ist $c^3/\sqrt{2}$, wobei c die Kantenlänge des Tetraeders bedeutet. Jener Inhalt soll aber Eins sein. Aus der Beziehung $\frac{c^3}{\sqrt{2}} = 1$ folgt $c = \sqrt[6]{2}$. Im räumlichen Einheitsgitter muß also im Abstand $\sqrt[6]{2}$ von jedem Gitterpunkt immer noch mindestens ein zweiter Gitterpunkt liegen.

Analog wie in der Ebene löst unser Ergebnis gleichzeitig das Problem der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung. Sie wird verwirklicht, wenn die Mittelpunkte das Rhomboëdergitter bilden. Wenn die Kugeln den Radius 1 haben, ist die Tetraederkantenlänge gleich 2, der Grundbereich hat also das Volumen

$$\frac{2^3}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Ein Raumgebiet vom Volumen J enthält demnach angenähert $\frac{J}{4\sqrt{2}}$ Gitterpunkte, also ebensoviel Einheitskugeln der angegebenen Lagerung; wie in der Ebene gilt diese Beziehung um so genauer, je größer J ist.

Wir wollen diese Kugellagerung näher beschreiben. Denken wir uns zunächst eine ebene Schicht von Einheitskugeln, so daß die Mittelpunkte das Gitter der dichtesten ebenen Kreislagerung bilden. Offenbar erhalten wir dann die dichteste ebene Kugellagerung. Wir nehmen nun eine zweite ebensolche Schicht und suchen sie so auf die erste zu legen, daß beide Schichten zwischen zwei parallelen Ebenen von möglichst kleinem Abstand Platz haben. Zu diesem Zweck müssen die Kugeln der zweiten Schicht gerade in die Einsenkungen der ersten Schicht gelegt werden. Dabei reicht aber der Platz nicht zur Ausfüllung jeder Einsenkung, sondern es muß immer abwechselnd eine übersprungen

¹ In der Ebene führt die dichteste Kreislagerung auf eine lückenlose Bedeckung der Ebene durch kongruente gleichseitige Dreiecke. Man sollte glauben, daß das analoge räumliche Problem zu einem Aufbau des Raumes aus kongruenten regulären Tetraedern führt. Es läßt sich aber beweisen, daß der Raum überhaupt nicht aus kongruenten regulären Tetraedern aufgebaut werden kann.

werden (vgl. Abb. 42, S. 32). Soll jetzt eine dritte Schicht in derselben Weise auf die ersten beiden gelegt werden, so ist die gegenseitige Lage der drei Schichten durch diese Vorschrift noch nicht eindeutig bestimmt.

Einerseits können wir die dritte Schicht so in die Einsenkungen der zweiten legen, daß die erste und dritte Schicht symmetrisch zur zweiten liegen (Abb. 47 a). Andererseits können wir die dritte Schicht aber auch in die Einsenkungen legen, die bei der erstgenannten Anordnung frei geblieben waren (Abb. 47 b, c); dann wird die erste Schicht in die zweite durch dieselbe Verschiebung übergeführt wie die zweite in die dritte. In diesem Fall liefert die fortgesetzte Wiederholung derselben Verschiebung nach beiden Seiten hin die Kugellagerung des Rhomboëdrgitters. Während also in der Ebene das Optimum der Dichte nur von einer einzigen Kreislagerung erreicht wird, führt dasselbe Problem im Raum auf zwei ganz verschiedene Kugelanordnungen¹. Die Mittelpunkte der Kugeln brauchen überhaupt keine über den ganzen Raum hin regelmäßige Figur zu bilden, da man ja von Schicht zu Schicht willkürlich zwischen beiden Möglichkeiten wechseln kann. Eine Eigenschaft ist aber für alle beschriebenen Anordnungen kennzeichnend: Jede Kugel wird von genau zwölf anderen Kugeln berührt, nämlich von sechs Kugeln derselben Schicht und von je drei der darüber- und darunterliegenden Schicht.

Die Frage der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung ist auch noch im vier- und fünfdimensionalen Raum untersucht worden. Merkwürdigerweise zeigt es sich, daß das Punktgitter, das in höheren Dimensionen dem Dreiecks- bzw. Rhomboëdrgitter entspricht, nicht mehr die dichteste Kugellagerung liefert. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

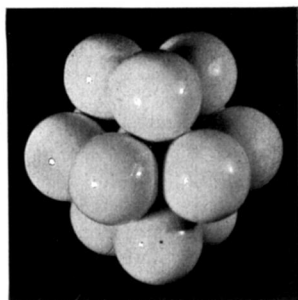


Abb. 47 a.

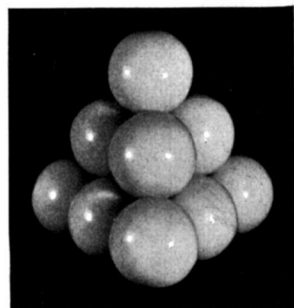


Abb. 47 b.

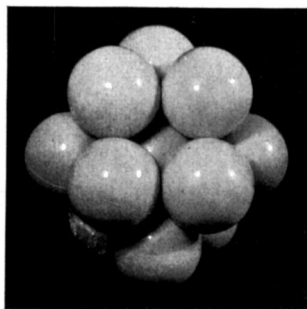


Abb. 47 c.

¹ In der Natur kommen beide Lagerungen wirklich vor. Der erste Fall tritt bei den hexagonalen Krystallen vom Magnesiumtyp ein, der zweite bei den kubisch flächenzentrierten Krystallen Vgl. § 8.

	Kürzester Punktabstand c	Dichtigkeit der Kugellagerung
Ebene	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,075$	$0,289\pi = 0,907$
Gewöhnlicher Raum . . .	$\sqrt[6]{2} = 1,122$	$\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,740$
Vierdimensionaler Raum .	$\sqrt[4]{2} = 1,189$	$\frac{\pi^2}{16} = 0,617$
Fünfdimensionaler Raum .	$\sqrt[10]{2} = 1,074$	$\frac{\sqrt{2}}{60} \pi^2 = 0,465$

(Das Volumen der Kugel vom Radius Eins beträgt im vierdimensionalen Raum $\pi^2/2$ und im fünfdimensionalen Raum $8\pi^2/15$).

Nun sind noch zahlreiche weitere regelmäßige Kugellagerungen von Interesse, deren Dichte hinter dem Optimum zurückbleibt. Als Beispiel sei die kubische Kugellagerung genannt, bei der die Mittelpunkte der Einheitskugeln dasjenige Gitter bilden, das von einem Würfel der Kantenlänge 2 erzeugt wird. Dabei wird jede Kugel von genau sechs Nachbarkugeln berührt; es ist also zu erwarten, daß die Dichte dieser Lagerung bedeutend hinter der Dichte des Rhomboëdergitters zurückbleibt, bei der jede Kugel von zwölf weiteren berührt wird. Um das zu beweisen, bringen wir das Würfelgitter in eine solche Lage, daß je ein Würfel gerade eine Kugel umschließt. Der Würfel der Kantenlänge 2 hat den Inhalt 8, also liegen in einem großen Raumstück vom Inhalt $8x$ asymptotisch stets x Kugeln. Da nun die Einheitskugel das Volumen $\frac{4}{3}\pi$ besitzt, so beträgt die Dichte der kubischen Lagerung

$$D = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{\pi}{6} = 0,524.$$

Weiter liegt es nahe, im Gegensatz zur dichtesten Lagerung umgekehrt nach der dünnsten im Raum möglichen regelmäßigen Kugellagerung zu fragen, bei der die Kugeln gerade noch festliegen. Hierbei muß jede Kugel von mindestens vier Kugeln berührt werden, deren Mittelpunkte nicht in einer Ebene und nicht auf einer Halbkugel liegen; denn sonst würde die Kugel durch ihre Nachbarn nicht festgehalten werden. Man kann nun vermuten, daß bei der dünnsten Lagerung jede Kugel genau von vier anderen berührt wird und daß deren Mittelpunkte die Ecken eines regulären Tetraeders bilden. Wir konstruieren im folgenden ein System von Punkten, die in dieser Weise angeordnet sind. Wir wollen aber erst nachher untersuchen, ob die so erhaltene Kugellagerung wirklich die dünnste ist.

Im kubischen Gitter seien noch die Mitten der Würfel­flächen hinzuge­rechnet. Das entstandene Punktgebilde ist dann wieder ein Gitter (flächen­zentriert kubisches Gitter), denn es entsteht durch Verschiebung

der Parallelepipede $ABCDEFGH$ in Abb. 48 und 49. (Die beiden Figuren sind ein Beispiel für die früher erwähnte Tatsache, daß man ein

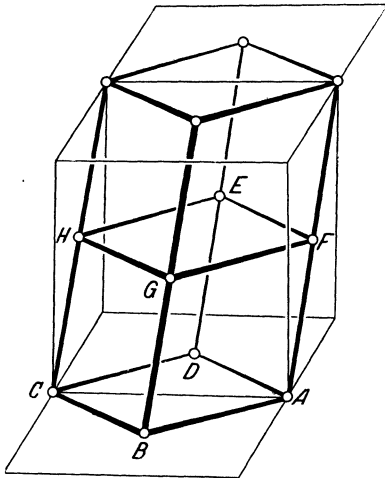


Abb. 48.

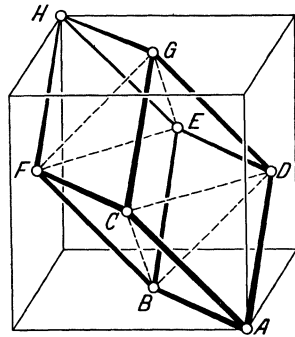


Abb. 49.

und dasselbe Gitter durch sehr verschiedenartige Grundbereiche erzeugen kann.) Aus Abb. 49 erkennt man, daß das Gitter gerade das der dichtesten Kugellagerung ist. In der Ebene ABD bestimmt nämlich das Parallelogramm $ABDE$ das gleichseitige Dreiecksgitter; die nächste Parallelebene, in der Gitterpunkte liegen, ist CFG , und die Gitterpunkte dieser Ebene liegen gerade so über denen der ersten, daß reguläre Tetraeder entstehen, wie z. B. $ABCD$.

Zu diesem Gitter K nehme ich nun noch ein kongruentes Gitter L hinzu, das aus K durch Verschiebung in Richtung der Würfelhauptdiagonale AH um ein Viertel ihrer Länge entsteht (Abb. 50). Ich behaupte, daß die Punkte von K und L zusammen die Mittelpunkte der gesuchten „tetraedrischen“ Kugellagerung darstellen; und zwar muß der Kugelradius gleich $\frac{1}{2}AA'$ sein, wenn A' der aus A entstandene Punkt von L ist. In der Tat: A' erweist sich bei dieser Konstruktion als gleichweit entfernt von den Punkten, die in Abb. 49 $ABCD$ genannt sind; die Kugel um A' wird daher genau von den Kugeln jenes Tetraeders berührt. Entsprechendes muß aus Symmetriegründen für alle Kugeln aus L gelten; ebenso aber

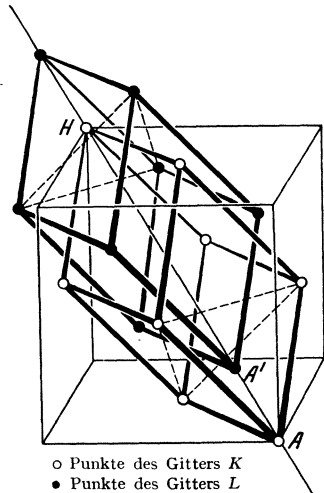


Abb. 50.

auch für alle Kugeln aus K (z. B. H in Abb. 50), denn die gegenseitige Lage von K und L unterscheidet sich nur durch den Richtungssinn der Verschiebung. Die Anordnung der Kugelmittelpunkte wird durch Abb. 51 und 52 veranschaulicht, wo die Mittelpunkte benachbarter Kugeln stets geradlinig verbunden sind¹.

Wir berechnen jetzt die Dichte der tetraedrischen Lagerung. Offenbar entfallen auf jeden Würfel vier Kugeln des Gitters L , da bei der Verschiebung die Punkte $EFGH$ (Abb. 49) mit ihren Kugeln ganz aus dem Würfel heraustreten, während die Kugeln um $ABCD$ ganz ins Würfelinnere rücken. Da das Gitter K dieselbe Dichte hat wie L , entfallen im ganzen acht Kugeln der Lagerung auf jeden Würfel. Setzen

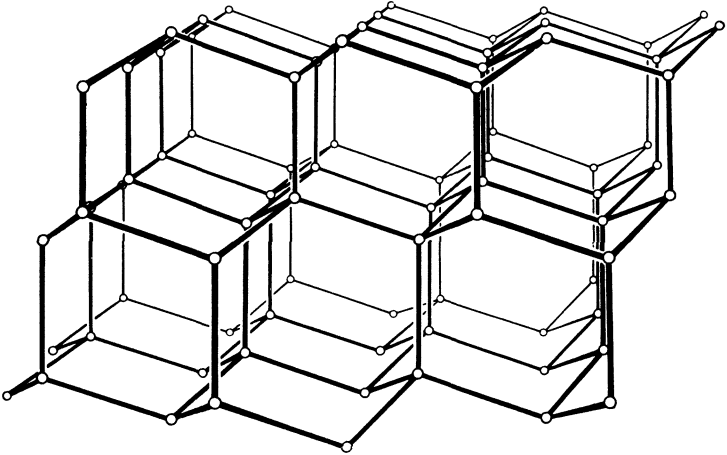


Abb. 51.

wir wieder den Kugelradius $\frac{1}{2}AA'$ gleich Eins und ist a die Kante, b die Hauptdiagonale des Würfels, so gilt: $b = 4AA' = 8 = a\sqrt{3}$. Der Würfelinhalt ist demnach $a^3 = \frac{8^3}{3\sqrt{3}}$. Für die gesuchte Dichte D ergibt sich analog dem Früheren:

$$D = \frac{8}{a^3} \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{16} \pi = 0,340.$$

Wir zeigen nun (nach H. HEESCH und F. LAVES, Göttingen²), daß die tetraedrische Kugelpackung keineswegs die dünnste ist, sondern

¹ Der geometrische Ort der Kugelmittelpunkte bei dieser Lagerung ist kein Punktgitter, denn zu diesem geometrischen Ort gehört z. B. nicht der Punkt A'' , den man erhält, wenn man in Abb. 50 AA' über A' hinaus um sich selbst verlängert; wäre das Gebilde ein Gitter, so müßte es mit A und A' auch A'' enthalten. Man bezeichnet das Gebilde als ein Punktsystem. Die Punktsysteme sind durch allgemeinere Symmetrieeigenschaften gekennzeichnet als die Gitter. Ihre Definition wird in § 9 gegeben.

² Vgl. Z. f. Kristallographie, Bd. 82, S. 10, Abb. 7.

daß man durch eine einfache Abänderung zu einer noch wesentlich dünneren Packung gelangt, bei der ebenfalls jede Kugel von vier anderen berührt wird und alle Kugeln gleichberechtigt auftreten. Dabei bilden allerdings die Mittelpunkte der vier Kugeln, die eine und dieselbe Kugel berühren, nicht mehr die Ecken eines regulären, sondern die eines anderen Tetraeders mit gleichseitiger Basis und gleichschenkligen Seitenflächen.

Um diese Packung zu erhalten, gehe ich von einer Kugel K der tetraedrischen Packung aus und lege in deren Inneres vier kleinere kongruente Kugeln k_1 bis k_4 , die K von innen gerade in den Punkten berühren, in denen K von außen von den Nachbarkugeln der tetraedrischen Packung berührt wird. Da diese vier Punkte die Ecken eines regulären Tetraeders bilden, so gilt das gleiche von den Mittelpunkten der kleineren Kugeln.

Durch passende Wahl ihres Radius kann ich also erreichen, daß k_1 bis k_4 einander paarweise berühren, also jede dieser Kugeln von drei anderen berührt wird. Nun denke ich mir die entsprechende Konstruktion auch für alle anderen Kugeln der tetraedrischen Packung ausgeführt. Dann wird k_1 außer von k_2, k_3, k_4 noch von einer Kugel k_5 von außen berührt, nämlich an der Stelle, wo k_1 von innen K berührt; dort wird ja K von einer Kugel K' der tetraedrischen Packung berührt, und im selben

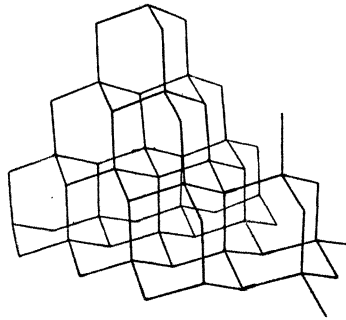


Abb. 52.

Punkt wird K' von innen von einer der kleineren Kugeln berührt; diese nennen wir k_5 . Natürlich gilt das Entsprechende von allen k_1 kongruenten Kugeln unserer Konstruktion, so daß diese in der Tat eine Lagerung bilden, bei der jede Kugel noch festliegt. Um die Dichte d der so erhaltenen Lagerung mit der Dichte D der tetraedrischen Lagerung zu vergleichen, genügt es offenbar, das Gesamtvolumen von k_1 bis k_4 mit dem Volumen von K zu vergleichen. Ist also r der Radius von k_1 , R der Radius von K , so erhält man:

$$\frac{d}{D} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 4 \frac{r^3}{R^3}.$$

Aus der Konstruktion folgt nun elementar die Beziehung: $R = (\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1)r$, und hieraus ergibt sich $d = \frac{4}{(\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1)^3} D = 0,3633 D$. Die Packung ist also bedeutend dünner als die tetraedrische. Man hat Gründe, anzunehmen, daß sie die dünnste ist. In der folgenden Tabelle sind die charakteristischen Konstanten der vier betrachteten Kugellagerungen zusammengestellt.

Dichteste Kugellagerung . .	$D = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,740$	} Jede Kugel wird von	} 12	} anderen berührt
Kubische Kugellagerung . .	$D = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,513$			
Tetraedrische Kugellagerung	$D = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{64} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,340$			
Dünnste (?) Kugellagerung .	$D = 0,123$			

Andersartige Untersuchungen werden nötig, wenn man die Forderung nach regelmäßiger Anordnung der Kreise oder Kugeln fallen läßt und z. B. nur verlangt, daß möglichst viele gleichgroße Kreise (Kugeln) in jedem hinreichend großen Gebiet der Ebene (des Raumes) enthalten sind. Für den Fall der Ebene ist bewiesen worden, daß die Kreise dann von selbst gitterförmig angeordnet sein müssen. Im drei- und mehrdimensionalen Raum ist die Frage noch nicht geklärt.

§ 8. Krystalle als regelmäßige Punktsysteme.

Die Theorie diskontinuierlicher regelmäßiger Punktgebilde findet eine wichtige Anwendung in der Krystallographie. Das regelmäßige Äußere und die Spaltbarkeit der Krystalle läßt erwarten, daß hier die einzelnen Atome oder Molekeln, als Punkte aufgefaßt, eine Figur bilden, die kongruent zu sich selbst über den ganzen Raum fortgesetzt werden kann. Eine durch solche Fortsetzung entstehende Figur heißt Punktsystem. Wir geben später eine exaktere Erklärung dieses Begriffs und werden zeigen, daß es nur endlich viele wesentlich verschiedene Punktsysteme gibt. Es entstehen nun zwei zum Teil mathematische, zum Teil physikalische Aufgaben. Zunächst ist für jede Krystallart das zugehörige Punktsystem anzugeben. Sodann ist das verschiedene physikalische Verhalten der Krystallarten auf geometrische Eigenschaften der zugehörigen Punktsysteme zurückzuführen.

Die ersten Versuche, auf diese Weise zu einer bestimmten Ansicht über die Krystallstruktur zu kommen, gehen auf BRAVAIS (1848) zurück. Eine feste empirische Grundlage erhielt seine Theorie aber erst, nachdem das LAUESCHE Verfahren der Beugung der Röntgenstrahlen an den Krystallen (1913) es ermöglicht hatte, nicht nur das Vorhandensein der Krystallgitter, sondern sogar ihren genauen Aufbau empirisch festzustellen.

Die größte Vorstellung, die man sich von einem Atom bilden kann, besteht offenbar darin, daß man das Atom als einen Punkt mit ebensoviel „Beinchen“ ansieht, als das Atom Valenzen hat; dabei nimmt man an, daß diese die Valenzen vorstellenden Beinchen so symmetrisch wie möglich im Raum angeordnet sind, solange kein Grund für eine Abweichung von der Symmetrie ersichtlich ist. Die Verbindung einzelner