

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG_0018

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Dichteste Kugellagerung . .	$D = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,740$	} Jede Kugel wird von	} 12	} anderen berührt
Kubische Kugellagerung . .	$D = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,513$			
Tetraedrische Kugellagerung	$D = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{64} \cdot \frac{4}{3} \pi = 0,340$			
Dünnste (?) Kugellagerung .	$D = 0,123$			

Andersartige Untersuchungen werden nötig, wenn man die Forderung nach regelmäßiger Anordnung der Kreise oder Kugeln fallen läßt und z. B. nur verlangt, daß möglichst viele gleichgroße Kreise (Kugeln) in jedem hinreichend großen Gebiet der Ebene (des Raumes) enthalten sind. Für den Fall der Ebene ist bewiesen worden, daß die Kreise dann von selbst gitterförmig angeordnet sein müssen. Im drei- und mehrdimensionalen Raum ist die Frage noch nicht geklärt.

§ 8. Krystalle als regelmäßige Punktsysteme.

Die Theorie diskontinuierlicher regelmäßiger Punktgebilde findet eine wichtige Anwendung in der Krystallographie. Das regelmäßige Äußere und die Spaltbarkeit der Krystalle läßt erwarten, daß hier die einzelnen Atome oder Molekeln, als Punkte aufgefaßt, eine Figur bilden, die kongruent zu sich selbst über den ganzen Raum fortgesetzt werden kann. Eine durch solche Fortsetzung entstehende Figur heißt Punktsystem. Wir geben später eine exaktere Erklärung dieses Begriffs und werden zeigen, daß es nur endlich viele wesentlich verschiedene Punktsysteme gibt. Es entstehen nun zwei zum Teil mathematische, zum Teil physikalische Aufgaben. Zunächst ist für jede Krystallart das zugehörige Punktsystem anzugeben. Sodann ist das verschiedene physikalische Verhalten der Krystallarten auf geometrische Eigenschaften der zugehörigen Punktsysteme zurückzuführen.

Die ersten Versuche, auf diese Weise zu einer bestimmten Ansicht über die Krystallstruktur zu kommen, gehen auf BRAVAIS (1848) zurück. Eine feste empirische Grundlage erhielt seine Theorie aber erst, nachdem das LAUESCHE Verfahren der Beugung der Röntgenstrahlen an den Krystallen (1913) es ermöglicht hatte, nicht nur das Vorhandensein der Krystallgitter, sondern sogar ihren genauen Aufbau empirisch festzustellen.

Die größte Vorstellung, die man sich von einem Atom bilden kann, besteht offenbar darin, daß man das Atom als einen Punkt mit ebensoviel „Beinchen“ ansieht, als das Atom Valenzen hat; dabei nimmt man an, daß diese die Valenzen vorstellenden Beinchen so symmetrisch wie möglich im Raum angeordnet sind, solange kein Grund für eine Abweichung von der Symmetrie ersichtlich ist. Die Verbindung einzelner

Atome zu einer Molekel denkt man sich dann so, daß je zwei Beine verschiedener Atome miteinander zusammenfallen.

Wasserstoff (H), Sauerstoff (O), Stickstoff (N) und Kohlenstoff (C) sind z. B. ein- bzw. zwei-, drei- und vierwertig. Wir können uns also diese Atome als je einen Punkt mit einem bzw. zwei, drei oder vier

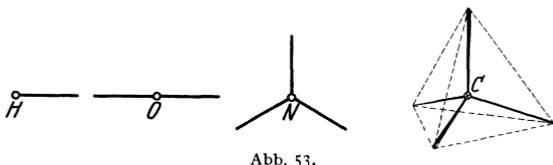


Abb. 53.

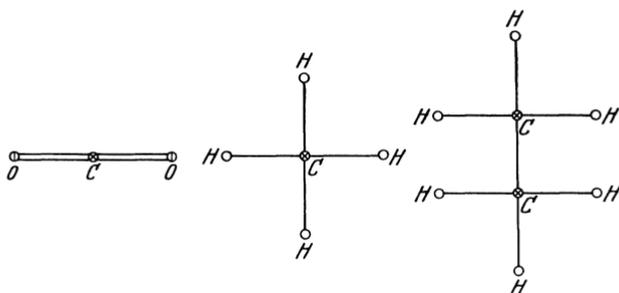


Abb. 54.

Beinen vorstellen (Abb. 53). Bei H, O und N verlangt die Symmetrie, daß alle Beine in einer Ebene liegen. Aus demselben Grund werden wir bei C erwarten, daß die vier Beine nach den Ecken eines regulären Tetraeders gerichtet sind, in dessen Mittelpunkt sich das Atom befindet.

Als Beispiel von Molekeln betrachten wir Kohlendioxyd (CO_2), Methan (CH_4), Äthan (C_2H_6). Abb. 54 gibt ein Schema des Zusammenhangs der Atome („Strukturformel“), ohne Rücksicht auf deren wahre räumliche Lagerung. Eine mögliche und nach neueren Untersuchungen wahrscheinliche räumliche Anordnung der Atome in den Molekeln des Methans und des Äthans gibt Abb. 55 wieder (VAN t'HOFF 1874). Beim Äthan-

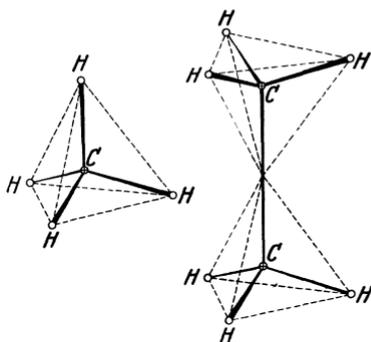


Abb. 55.

modell ist das eine Tetraeder gegen das andere noch drehbar zu denken um die Verbindungsgerade der beiden C-Atome als Achse.

Nun liegt die Frage nahe, ob sich auf dieselbe Art wie die Molekel nicht auch ganze Krystalle durch immer weitere Angliederung von Atomen erzeugen lassen. Die Möglichkeit eines solchen Aufbaus soll

zunächst in dem einfachsten Fall gezeigt werden, daß der Krystall nur aus einem einzigen Element besteht. Ich wähle dazu den Diamanten, der bekanntlich reiner Kohlenstoff ist. Die Aufgabe ist also, lauter C-Atome, die aus je einem Punkt mit vier Beinen bestehen, so ineinanderzuschachteln, daß in möglichst symmetrischer Weise jeder Punkt mit vier anderen Punkten durch zwei zusammenfallende Beine verbunden ist. Die Frage, ob sich ein solches Gerüst aufbauen läßt, ist rein geometrisch. Ein solches Gerüst existiert nun in der Tat; die Atome sind so anzuordnen wie die Kugelmittelpunkte bei der tetraedrischen Lagerung; denn nach der in § 7 ausgeführten Konstruktion hat dann jeder Punkt grade vier nächste Nachbarpunkte, zu denen er so liegt wie der Mittelpunkt eines regulären Tetraeders zu den Ecken (vgl. Abb. 50

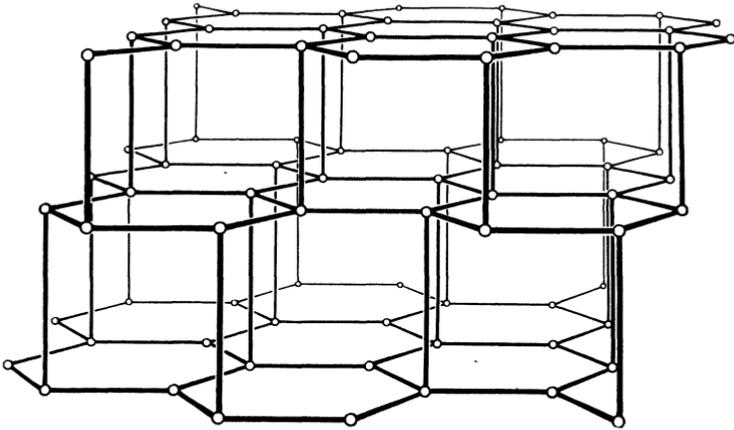


Abb. 56.

bis 52, S. 43 bis 45). In dieser rein geometrisch abgeleiteten Weise ist nun der Diamant tatsächlich aus seinen Atomen aufgebaut, wie die modernen Untersuchungen der beiden BRAGGS zeigen. Die Entfernung benachbarter Punkte beträgt dabei nach diesen Messungen $1,53 \cdot 10^{-8}$ cm*.

Außer dem Diamanten existiert noch ein zweiter Krystall, der nur aus C-Atomen zusammengesetzt ist, nämlich der Graphit. Die Messung ergibt, daß beim Graphit die Beine der C-Atome nicht symmetrisch liegen und nicht einmal gleich lang sind. Ein Bein ist nämlich auf $3,41 \cdot 10^{-8}$ cm verlängert, während die drei übrigen Beine auf $1,45 \cdot 10^{-8}$ cm verkürzt sind. Diese drei liegen annähernd in einer Ebene. Ob und wieweit sie von der ebenen Lage abweichen, ist experimentell nicht genügend geklärt, für die folgende Darstellung genügt die Annahme, daß sie genau in einer Ebene liegen. Dann läßt sich das Gerüst

* Auch der Wurtzitkrystall (ZnS) hat die Atomanordnung der tetraedrischen Kugelpackung. Die Zn- und die S-Atome bilden je eins der beiden Gitter, aus denen wir S. 43, Abb. 50 jenes Punktsystem aufgebaut haben.

des Graphits folgendermaßen beschreiben: Ich konstruiere ein ebenes System von regulären Sechsecken, deren Ecken von Atomen besetzt sind (Abb. 56). In dieser ebenen Anordnung sind je drei Valenzen jedes Atoms verbraucht. Damit nun die Schicht mit der darüber- und der darunterliegenden Schicht zusammenhängt, müssen die Beine der noch freien vierten Valenz abwechselnd nach oben und nach unten gerichtet sein. Dann sind in der Tat alle drei Schichten kongruent, und die Punkte der mittleren Schicht liegen abwechselnd mit einem Punkt der unteren und einem der oberen Schicht in einer Vertikalen. Auf dieselbe Weise läßt sich das Gerüst nach allen Seiten unbegrenzt fortsetzen.

Die beiden für den Diamanten und den Graphit aufgestellten Punktsysteme erklären einige Verschiedenheiten im physikalischen Verhalten beider Krystalle; z. B. die bei weitem größere Spaltbarkeit und Kompressibilität des Graphits. Die Erklärung anderer Unterschiede stößt dagegen auf bedeutende Schwierigkeiten.

Ein Beispiel für einen Krystall, der aus verschiedenen Atomen zusammengesetzt ist, gibt das Kochsalz (NaCl). Der Krystall des Kochsalzes ist ein Würfelgitter, dessen Ecken abwechselnd mit einem Cl-Atom und einem Na-Atom besetzt sind (Abb. 57). Die Entfernung benachbarter Gitterpunkte beträgt $2 \cdot 10^{-8}$ cm, ist also größer als das kürzere und kleiner als das längere Bein des C-Atoms beim Graphit. Im Kochsalzkrystall besitzt jeder Gitterpunkt sechs Nachbarpunkte. Die Na- und Cl-Atome sind aber einwertig. Also entspricht der Krystall nicht der früher besprochenen Valenztheorie. Auch allgemein besteht kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen den Valenzen der Atome, die einen Krystall aufbauen, und der Anzahl der Nachbarpunkte eines Punktes. Daß beim Diamanten beide Zahlen übereinstimmen, ist ein Sonderfall.

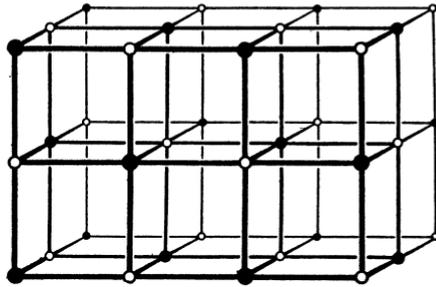


Abb. 57.

Besonders bemerkenswert ist, daß im Kochsalzgitter keine Punktepaare ausgezeichnet sind, die der NaCl -Molekel entsprechen könnten. Das Gitter setzt sich also unmittelbar aus den beiden Atomarten zusammen. Im Gegensatz dazu gibt es andere Krystalle, aus denen man ohne allzu große Willkür Molekeln oder wenigstens Komplexe von Atomen herausgreifen kann. Im Gitter des Kalkspats (CaCO_3) z. B. läßt sich der Atomkomplex CO_3 in der räumlichen Anordnung deutlich als zusammengehörig erkennen.

Während der Diamant die tetraedrische Kugellagerung verwirklicht, finden wir bei einer großen Anzahl Krystallen das „flächenzentriert

kubische“ Gitter, das derjenigen dichtesten Kugellagerung entspricht, bei der von Schicht zu Schicht immer derselbe Übergang gemacht wird (Abb. 47 b, c, S. 41). Die andere Art der dichtesten Kugelpackung, bei der das System der Lücken von Schritt zu Schritt immer abwechselt (Abb. 47 a, S. 41), tritt z. B. im Krystall des Magnesiums auf. Man nennt diese Anordnung die „hexagonal dichteste Kugelpackung“.

§ 9. Reguläre Punktsysteme und diskontinuierliche Bewegungsgruppen.

Die Krystallographie führt uns auf die rein geometrische Frage, alle möglichen regelmäßigen Anordnungen von Objekten, z. B. Atomen, festzustellen. Da wir uns diese Objekte für viele Zwecke durch Punkte versinnbildlichen können, nennen wir eine derartige Anordnung ein reguläres Punktsystem. Im Sinne der vorangegangenen Überlegungen werden wir also das reguläre Punktsystem durch die folgenden drei Eigenschaften definieren:

1. Das reguläre ebene bzw. räumliche Punktsystem soll unendlich viele Punkte enthalten, und zwar soll die Zahl der in einem Kreis bzw. in einer Kugel liegenden Punkte mit der zweiten bzw. dritten Potenz des Radius ins Unendliche wachsen.

2. Das reguläre Punktsystem soll in jedem endlichen Gebiet nur endlich viele Punkte enthalten.

3. Das reguläre Punktsystem soll zu jedem seiner Punkte dieselbe Lagerung besitzen.

Die ersten zwei definierenden Eigenschaften sind ohne weiteres verständlich. Die dritte Eigenschaft läßt sich folgendermaßen näher erläutern: Ich ziehe von einem bestimmten Punkt des Systems aus die Verbindungslinien nach sämtlichen anderen Punkten des Systems und verfähre in der gleichen Weise mit irgendeinem anderen Punkt des Systems. Die dritte definierende Eigenschaft besagt dann, daß die beiden auf diese Weise entstandenen Streckengebilde einander kongruent sind, d. h. daß durch eine bestimmte Bewegung der Ebene oder des Raumes das eine Gebilde in das andere übergeführt werden kann. So könnte ich, wenn ich mich in einem bestimmten Punkt des Systems befände, nicht durch Messungen entscheiden, welcher Punkt des Systems das ist, da eben alle Punkte zueinander die gleiche Lage haben. Um die dritte Forderung zu erfüllen, brauche ich aber nicht erst die Verbindungslinien zu ziehen; ich brauche nur zu fordern, daß jeder Punkt des Systems in jeden anderen durch eine gewisse Bewegung der Ebene oder des Raumes derartig überführbar sein soll, daß sich an jeder Stelle, die vorher mit einem Systempunkt besetzt war, auch nach der Bewegung ein Systempunkt befindet und umgekehrt. Wir sagen von einer solchen Bewegung, daß sie das Punktsystem unverändert