kubische" Gitter, das derjenigen dichtesten Kugellagerung entspricht, bei der von Schicht zu Schicht immer derselbe Übergang gemacht wird (Abb. 47b, c, S. 41). Die andere Art der dichtesten Kugelpackung, bei der das System der Lücken von Schritt zu Schritt immer abwechselt (Abb. 47a, S. 41), tritt z. B. im Krystall des Magnesiums auf. Man nennt diese Anordnung die „hexagonal dichteste Kugelpackung".

§ 9. Reguläre Punktsysteme und diskontinuierliche Bewegungsgruppen.

Die Krystallographie führt uns auf die rein geometrische Frage, alle möglichen regelmäßigen Anordnungen von Objekten, z. B. Atomen, festzustellen. Da wir uns diese Objekte für viele Zwecke durch Punkte versinnbildlichen können, nennen wir eine derartige Anordnung ein reguläres Punktsystem. Im Sinne der vorangegangenen Überlegungen werden wir also das reguläre Punktsystem durch die folgenden drei Eigenschaften definieren:

1. Das reguläre ebene bzw. räumliche Punktsystem soll unendlich viele Punkte enthalten, und zwar soll die Zahl der in einem Kreis bzw. in einer Kugel liegenden Punkte mit der zweiten bzw. dritten Potenz des Radius ins Unendliche wachsen.

2. Das reguläre Punktsystem soll in jedem endlichen Gebiet nur endlich viele Punkte enthalten.

3. Das reguläre Punktsystem soll zu jedem seiner Punkte dieselbe Lagerung besitzen.

Die ersten zwei definierenden Eigenschaften sind ohne weiteres verständlich. Die dritte Eigenschaft läßt sich folgendermaßen näher erläutern: Ich ziehe von einem bestimmten Punkt des Systems aus die Verbindungslinien nach sämtlichen anderen Punkten des Systems und verfahre in der gleichen Weise mit irgendeinem anderen Punkt des Systems. Die dritte definierende Eigenschaft besagt dann, daß die beiden auf diese Weise entstandenen Streckengebilde einander kongruent sind, d. h. daß durch eine bestimmte Bewegung der Ebene oder des Raumes das eine Gebilde in das andere übergeführt werden kann. So könnte ich, wenn ich mich in einem bestimmten Punkt des Systems befände, nicht durch Messungen entscheiden, welcher Punkt des Systems das ist, da eben alle Punkte zueinander die gleiche Lage haben. Um die dritte Forderung zu erfüllen, brauche ich aber nicht erst die Verbindungslinien zu ziehen; ich brauche nur zu fordern, daß jeder Punkt des Systems in jeden anderen durch eine gewisse Bewegung der Ebene oder des Raumes derartig überführbar sein soll, daß sich an jeder Stelle, die vorher mit einem Systempunkt besetzt war, auch nach der Bewegung ein Systempunkt befindet und umgekehrt. Wir sagen von einer solchen Bewegung, daß sie das Punktsystem unverändert oder invariant läßt, und nennen jede derartige Bewegung eine *Deckbewegung* des Systems. Mit Hilfe dieses Begriffs kann ich die dritte definierende Eigenschaft folgendermaßen umformen:

3. Jeder Punkt des regulären Punktsystems soll in jeden anderen durch eine Deckbewegung des Systems überführbar sein.

Aus unserer Definition des regulären Punktsystems ergibt sich, daß die Punktgitter, die wir durch ihre Erzeugung aus dem Parallelogramm bzw. dem Parallelepiped definiert hatten, zu den Punktsystemen gehören. Die Einführung eines neuen, übergeordneten Begriffes ist dadurch gerechtfertigt, daß es Punktsysteme wie z. B. das Diamantgerüst gibt, die keine Punktgitter sind.

Wir wollen nun darangehen, die Gesamtheit aller verschiedenen regulären Punktsysteme aufzustellen. Es zeigt sich dabei, daß zu den Punktgittern nur noch Gebilde hinzukommen, die, ähnlich wie das Diamantgerüst, aus mehreren ineinandergeschobenen kongruenten und parallelgestellten Gittern bestehen. Zunächst erscheinen die Eigenschaften, durch die die Punktsysteme definiert sind, als so allgemein, daß man nicht glauben sollte, es ließe sich über diese Gebilde überhaupt eine geometrische Übersicht gewinnen. In Wahrheit aber ist diese Übersicht dennoch möglich; wir gelangen zu ihr, indem wir die Deckbewegungen des Systems ins Auge fassen.

Die Gesamtheit aller Deckbewegungen eines Punktsystems hat zwei charakteristische Eigenschaften, die ihre Untersuchung wesentlich erleichtern: erstens ergeben zwei Deckbewegungen hintereinander ausgeführt stets wieder eine Deckbewegung, und zweitens ist diejenige Bewegung, die irgendeine Deckbewegung des Systems rückgängig macht, stets selber eine Deckbewegung. Jede Gesamtheit von Abbildungen, die die entsprechenden beiden Eigenschaften besitzt, wird in der Mathematik eine *Gruppe* von Abbildungen genannt. Um die beiden Eigenschaften bequem rechnerisch verwerten zu können, wollen wir jede Abbildung mit einem Buchstaben, z. B. a, b bezeichnen; die Abbildung, die entsteht, wenn ich erst a und dann b ausführe, soll dann stets durch das Symbol ab gekennzeichnet sein. Die Abbildung, die a rückgängig macht, bezeichnen wir mit a^{-1}, sie wird auch die zu a *inverse* Abbildung genannt. Wenn wir beide Eigenschaften, durch die eine Gruppe definiert wird, kombinieren, werden wir z. B. auf die Abbildung aa^{-1} geführt. Diese Operation läßt offenbar alle Punkte ungeändert. Trotzdem ist es bequem, sie als einen Sonderfall einer Abbildung mitzuzählen. Wir nennen sie die identische Transformation oder die Identität und bezeichnen sie mit dem Buchstaben e. Bei der symbolischen Zusammensetzung der Abbildungen spielt e eine entsprechende Rolle wie die Eins beim Multiplizieren von Zahlen. Es ist stets $ae = ea = a$.

Wenn ich auf einen Punkt des Punktsystems alle möglichen Deckbewegungen des Systems anwende, so besagt die dritte definierende Eigenschaft der Punktsysteme, daß ich dabei aus diesem einen Punkt sämtliche anderen Punkte des Systems erhalte. Aus der Definition der Deckbewegung folgt andererseits, daß dabei nie ein Systempunkt in einen Punkt übergehen kann, der dem System nicht angehört; denn sonst würde die Bewegung das System nicht invariant lassen. Gegenüber einer gegebenen Abbildungsgruppe nennt man allgemein einen Punkt zu einem anderen *äquivalent*, wenn der eine Punkt aus dem anderen durch eine Abbildung der Gruppe hervorgeht. Demnach besteht das Punktsystem aus der Gesamtheit aller zu einem festen Punkt äquivalenten Punkte gegenüber der Gruppe von Deckbewegungen. Nach der zweiten definierenden Eigenschaft der Punktsysteme gibt es also zu einem Punkt des Systems nur endlich viele äquivalente Punkte in jedem endlichen Gebiet. Man nennt nun allgemein eine Abbildungsgruppe *diskontinuierlich*, wenn es zu jedem Punkt in jedem endlichen Gebiet nur endlich viele gegenüber der Gruppe äquivalente Punkte gibt. Hiernach muß die Gruppe der Deckbewegungen eines Punktsystems stets diskontinuierlich sein. Zwar wäre es an sich zulässig, daß ein Punkt, der dem System nicht angehört, unendlich viele äquivalente Punkte in einem endlichen Gebiet hätte. Es ist aber anschaulich evident und auch leicht streng zu beweisen, daß dann auch Punkte des Systems selbst unendlich viele äquivalente Punkte in einem endlichen Gebiet haben müßten.

Wir haben also die Gruppen von Deckbewegungen eines Punktsystems ausschließlich unter den diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der Ebene und des Raumes zu suchen und die Punktsysteme wiederum ausschließlich unter den Systemen der zu irgendeinem Punkt gegenüber einer solchen Gruppe äquivalenten Punkte. Auf diesem scheinbaren Umweg läßt sich nun die Untersuchung gerade am einfachsten durchführen. Es stellt sich nämlich heraus, daß es überhaupt nur endlich viele wesentlich verschiedene diskontinuierliche Bewegungsgruppen in der Ebene und im Raum gibt.

Untersucht man für diese endlich vielen Gruppen die Systeme der zu einem Punkt äquivalenten Punkte, so besitzen diese Systeme sicher die zweite und die dritte definierende Eigenschaft der Punktsysteme. Dagegen gibt es Gruppen, bei denen dann die erste Eigenschaft nicht besteht. Diese Gruppen werden wir also auszuscheiden haben. Die übrigbleibenden Gruppen und nur sie führen zu den Punktsystemen. Wegen der Bedeutung der Punktsysteme für die Krystallographie nennt man diejenigen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen, die auf Punktsysteme führen, die krystallographischen Bewegungsgruppen.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung der diskontinuierlichen Bewegungsgruppen. Wir wollen uns aber auf den Fall der Ebene beschränken; die analogen Untersuchungen im Raum sind so weitläufig, daß sie den Rahmen dieses Buches sprengen würden. Schon die ebenen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen erfordern eine ziemlich umfangreiche Betrachtung. Wir wollen trotzdem diese Betrachtung vollständig durchführen, weil wir dabei die Methoden kennenlernen, die auch für den räumlichen Fall typisch sind.

§ 10. Ebene Bewegungen und ihre Zusammensetzung; Einteilung der ebenen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen.

Eine Abbildung einer Ebene auf sich wird im folgenden als ebene Bewegung bezeichnet, wenn man die Endlage aus der Anfangslage durch eine *stetige* Bewegung der als starr gedachten Ebene erreichen kann, und zwar so, daß dabei die Bahnen aller Punkte der Ebene *in ihr selbst* verlaufen. Im übrigen soll aber eine ebene Bewegung nur durch Ausgangs- und Endlage gekennzeichnet sein, ohne Rücksicht darauf, wie im jeweils vorliegenden Falle der Übergang wirklich vollzogen wurde; natürlich kann er auf sehr verschiedene Art geschehen, auch so, daß die Bahnkurven teilweise die Ebene verlassen, oder daß Verzerrungen eintreten, die sich zum Schluß wieder aufheben. Wir fordern nur die *Möglichkeit* eines Übergangs, wie er zu Anfang beschrieben wurde. Es wird eine unserer ersten Aufgaben sein, für jede vorgelegte ebene Bewegung eine möglichst einfache Art des Übergangs zu finden.

Die einfachsten ebenen Bewegungen sind die Parallelverschiebungen oder Translationen, bei denen jeder Punkt in der gleichen Richtung und um die gleiche Strecke in der Ebene fortbewegt wird und jede Gerade zu sich selbst parallel bleibt.

Ein weiterer bekannter Typus ebener Bewegungen sind die Drehungen der Ebene um irgendeinen Punkt um einen bestimmten Winkel. Dabei wird die Richtung jeder Geraden um diesen Winkel gedreht[1], und außer dem Drehpunkt selbst bleibt kein Punkt der Ebene ungeändert.

Auch bei einer beliebigen andern von der Identität verschiedenen ebenen Bewegung kann es höchstens einen Punkt geben, der ungeändert bleibt. Wenn wir nämlich zwei Punkte der Ebene festhalten, so bleibt außer der identischen Abbildung nur eine einzige Abbildung der Ebene auf sich übrig, die durch starre Bewegung erzeugt werden kann; sie entsteht, wenn die Ebene um die Verbindungsgrade der beiden festgehaltenen Punkte um $180°$ gedreht wird. Dieser Übergang gehört nicht zu der eingangs beschriebenen Art. Auch läßt sich die Abbildung nicht durch einen solchen Übergang herstellen. Denn bei ihr wird ein rechtsherum umlaufener Kreis stets in einen linksherum umlaufenen Kreis verwandelt, während eine ebene Bewegung aus Stetigkeitsgründen nie einen Umlaufsinn umkehren kann. Aus dieser Überlegung ergibt

---

[1] Für Geraden, die durch den Drehpunkt gehen, ist das evident. Für jede andere Gerade folgt es daraus, daß sie eine durch den Drehpunkt gehende Parallele besitzt, und daß parallele Geraden bei jeder Bewegung parallel bleiben.