Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0020

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343 reiche Betrachtung. Wir wollen trotzdem diese Betrachtung vollständig durchführen, weil wir dabei die Methoden kennenlernen, die auch für den räumlichen Fall typisch sind.

§ 10. Ebene Bewegungen und ihre Zusammensetzung; Einteilung der ebenen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen.

Eine Abbildung einer Ebene auf sich wird im folgenden als ebene Bewegung bezeichnet, wenn man die Endlage aus der Anfangslage durch eine *stetige* Bewegung der als starr gedachten Ebene erreichen kann, und zwar so, daß dabei die Bahnen aller Punkte der Ebene *in ihr selbst* verlaufen. Im übrigen soll aber eine ebene Bewegung nur durch Ausgangs- und Endlage gekennzeichnet sein, ohne Rücksicht darauf, wie im jeweils vorliegenden Falle der Übergang wirklich vollzogen wurde; natürlich kann er auf sehr verschiedene Art geschehen, auch so, daß die Bahnkurven teilweise die Ebene verlassen, oder daß Verzerrungen eintreten, die sich zum Schluß wieder aufheben. Wir fordern nur die *Möglichkeit* eines Übergangs, wie er zu Anfang beschrieben wurde. Es wird eine unserer ersten Aufgaben sein, für jede vorgelegte ebene Bewegung eine möglichst einfache Art des Übergangs zu finden.

Die einfachsten ebenen Bewegungen sind die Parallelverschiebungen oder Translationen, bei denen jeder Punkt in der gleichen Richtung und um die gleiche Strecke in der Ebene fortbewegt wird und jede Gerade zu sich selbst parallel bleibt.

Ein weiterer bekannter Typus ebener Bewegungen sind die Drehungen der Ebene um irgendeinen Punkt um einen bestimmten Winkel. Dabei wird die Richtung jeder Geraden um diesen Winkel gedreht[1], und außer dem Drehpunkt selbst bleibt kein Punkt der Ebene ungeändert.

Auch bei einer beliebigen andern von der Identität verschiedenen ebenen Bewegung kann es höchstens einen Punkt geben, der ungeändert bleibt. Wenn wir nämlich zwei Punkte der Ebene festhalten, so bleibt außer der identischen Abbildung nur eine einzige Abbildung der Ebene auf sich übrig, die durch starre Bewegung erzeugt werden kann; sie entsteht, wenn die Ebene um die Verbindungsgrade der beiden festgehaltenen Punkte um 180° gedreht wird. Dieser Übergang gehört nicht zu der eingangs beschriebenen Art. Auch läßt sich die Abbildung nicht durch einen solchen Übergang herstellen. Denn bei ihr wird ein rechtsherum umlaufener Kreis stets in einen linksherum umlaufenen Kreis verwandelt, während eine ebene Bewegung aus Stetigkeitsgründen nie einen Umlaufsinn umkehren kann. Aus dieser Überlegung ergibt

[1] Für Geraden, die durch den Drehpunkt gehen, ist das evident. Für jede andere Gerade folgt es daraus, daß sie eine durch den Drehpunkt gehende Parallele besitzt, und daß parallele Geraden bei jeder Bewegung parallel bleiben.

sich, daß eine ebene Bewegung durch die Abbildung zweier Punkte vollständig bestimmt ist. Denn zwei ebene Bewegungen, die beide irgend zwei Punkte in gleicher Weise abbilden, können sich nur durch eine ebene Bewegung unterscheiden, die zwei Punkte festläßt, d. h. gar nicht.

Die Übersicht über die ebenen Bewegungen wird nun außerordentlich durch die Tatsache vereinfacht, daß überhaupt jede solche Bewegung sich durch eine einzige Translation oder eine einzige Drehung erzeugen läßt. Um diese Behauptung zu beweisen, denke ich mir eine bestimmte ebene Bewegung b vorgegeben; wenn wir den trivialen Fall beiseite lassen, daß b die Identität ist, so kann ich einen Punkt A herausgreifen, der in einen anderen Punkt A' übergeht. B sei der Mittelpunkt der Strecke AA'. B kann entweder fest bleiben oder einen anderen Punkt B' zum Bildpunkt haben. Im ersten Fall (Abb. 58) ist meine Behauptung jedenfalls zutreffend. Dann ersetze ich nämlich die gegebene Bewegung b durch die Drehung um B um den Winkel π. Diese Drehung b' führt die Punkte A und B in dieselben Bildpunkte A' und B über wie b; da wir aber gesehen haben, daß eine ebene Bewegung durch zwei Punkte und ihre Bildpunkte schon gekennzeichnet ist, muß b' mit b übereinstimmen. Geht nun B in einen anderen Punkt B' über, so unterscheide ich wieder den Sonderfall, daß B' auf die Gerade AA' fällt, von dem allgemeineren Fall, daß AA' und BB' verschiedene Geraden sind. Im ersten Fall ist zu beachten, daß B' eindeutig bestimmt ist; der Abstand zwischen A und B muß ja bei der Bewegung b ungeändert bleiben. Da aber nach Konstruktion $AB = A'B$ ist, muß auch $A'B' = A'B$ sein. Dadurch und durch die Forderung $B' \neq B$ ist B' in der Tat eindeutig bestimmt (Abb. 59). Dann können wir aber b durch die Translation ersetzen, die A in A' überführt; denn diese Translation führt auch B in den vorgeschriebenen Bildpunkt B' über. Es bleibt also nur noch der letzte Fall zu erledigen. Dann errichte ich in B auf AB das Lot und errichte ebenso in B' auf $A'B'$ das Lot (Abb. 60). Da die beiden Lote nach unserer Voraussetzung und Konstruktion weder parallel sind noch zusammenfallen, besitzen sie einen Schnittpunkt M. Ich behaupte, daß ich b durch diejenige Drehung um M ersetzen kann, die A in A' überführt. Zum Beweise habe ich zu zeigen, daß dabei auch B in B' übergeht; das kommt darauf hinaus, daß die Dreiecke AMB und $A'MB'$ kongruent sind. Nun ist aber einerseits $AMB \cong A'MB$, da beide Dreiecke bei B rechtwinklig sind und gleiche Katheten haben, und andrerseits ist $A'B'M \cong A'BM$, da die

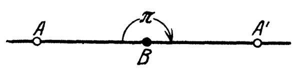

Abb. 58.

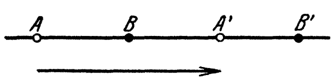

Abb. 59.

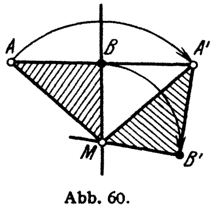

Abb. 60.

Dreiecke bei B und B' rechtwinklig sind, die Hypotenuse $A'M$ gemein haben und da, wie bereits erwähnt, $A'B' = AB = A'B$ ist.

Unser Resultat wird formal noch einfacher, wenn wir die Translationen als Drehungen um den Winkel Null und einen unendlich fernen Mittelpunkt ansehen. Anschaulich läßt sich diese Auffassung leicht rechtfertigen. Wenn ich nämlich eine Reihe von Drehungen betrachte, bei denen die Drehwinkel unbegrenzt abnehmen und bei denen sich der Drehpunkt unbegrenzt in einer bestimmten Richtung entfernt, so läßt es sich einrichten, daß diese Bewegungen sich immer weniger von einer bestimmten Translation unterscheiden, wenigstens innerhalb eines festen endlichen Gebiets.

Nach dieser Auffassung ist jede ebene Bewegung eine Drehung um einen bestimmten Winkel, der bei den Translationen gleich Null zu setzen ist. Wenn ich demnach zwei Drehungen hintereinander ausführe, muß ich das Resultat auch durch eine einzige Drehung ersetzen können, zu der wieder ein bestimmter Drehwinkel gehört. Es gilt nun der einfache *Satz von der Additivität der Drehwinkel:*

Eine Drehung um den Winkel α und eine Drehung um den Winkel β ergeben zusammengesetzt stets eine Drehung um den Winkel $\alpha + \beta$.

Wir hatten nämlich zu Beginn erwähnt, daß der Drehwinkel an der Richtungsänderung einer beliebigen Geraden gemessen werden kann. Dieser Satz gilt auch für die Translationen in unserer neuen Definition, da die Translationen alle Richtungen ungeändert lassen. Danach ist der Satz evident. Aus ihm folgt z. B., daß zwei Drehungen um entgegengesetzt gleiche Winkel und um verschiedene Drehpunkte stets eine Translation ergeben. Denn der Drehwinkel der zusammengesetzten Bewegung ist Null, und die Identität kann nicht entstehen, da keiner der beiden Drehpunkte fest bleibt.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns wieder zu den diskontinuierlichen ebenen Bewegungsgruppen. Wir können sie nämlich jetzt in einfacher Weise einteilen. Wir haben nur anzugeben, was für Translationen vorkommen und welche Drehwinkel und Drehpunkte auftreten. Es erweist sich als zweckmäßig, die Translationen an erster Stelle zu berücksichtigen. Wir machen also die Fallunterscheidung:

I. Alle in der Gruppe vorkommenden Translationen haben parallele Richtungen.

II. Es gibt in der Gruppe zwei Translationen, deren Richtungen nicht parallel sind.

Der Fall *I* soll auch diejenigen Gruppen umfassen, die überhaupt keine Translationen enthalten.

Zur Unterteilung der beiden Fälle ziehen wir nunmehr die Drehungen heran. Wir unterscheiden: *1.* Gruppen, die keine Drehungen enthalten, *2.* Gruppen, die Drehungen enthalten.

Außer durch Aufstellung der in einer Gruppe vorhandenen Drehungen und Translationen kann man jede Gruppe auch durch eine einfache geometrische Figur kennzeichnen, den *Fundamentalbereich*. Als Fundamentalbereich einer Gruppe bezeichnet man jedes zusammenhängende Gebiet, das in seinem Innern kein Paar äquivalenter Punkte enthält und das sich nicht weiter vergrößern läßt, ohne diese Eigenschaft zu verlieren. Solche Fundamentalbereiche spielen bei allen diskontinuierlichen Abbildungsgruppen eine wichtige Rolle, nicht nur bei den Bewegungsgruppen. Im allgemeinen ist es keine einfache Aufgabe, einen Fundamentalbereich für eine gegebene Gruppe zu bestimmen, oder überhaupt die Existenz eines Fundamentalbereichs für eine Gattung von Gruppen zu beweisen. Für die ebenen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen lassen sich aber in jedem Fall leicht Fundamentalbereiche konstruieren. Es zeigt sich, daß im Fall *I* jeder Fundamentalbereich sich ins Unendliche erstreckt, während im Fall *II* die Fundamentalbereiche stets endlich sind.

Wir wollen noch einige zwischen den Drehungen und Translationen einer Gruppe stets geltenden Beziehungen erwähnen, die wir mehrfach verwenden werden und die wir deshalb als Hilfssätze numerieren:

1. Hilfssatz: Kommt in einer Gruppe eine Drehung um einen Punkt P um den Winkel α vor und ist Q zu P äquivalent, so enthält die Gruppe auch eine Drehung um Q um denselben Winkel α.

Beweis: Nach Voraussetzung enthält die Gruppe eine Bewegung b, die P in Q überführt, sowie die Drehung d um P um α. Unter Anwendung der im vorigen Paragraphen erklärten Symbolik betrachten wir nun die Bewegung $b^{-1}db$, die nach den beiden Gruppenpostulaten ebenfalls der Gruppe angehört. Diese Bewegung muß eine Drehung um den Winkel α sein, denn ist β der Drehwinkel von b, so ist der Drehwinkel von $b^{-1}db$ nach dem Additionssatz der Drehwinkel: $-\beta + \alpha + \beta = \alpha$. Der Drehpunkt muß aber Q sein; denn Q wird durch b^{-1} in P übergeführt, P bleibt bei d fest, und P wird durch b wieder nach Q zurückgebracht.

2. Hilfssatz: Enthält eine Gruppe eine Drehung um den Winkel α und eine Translation t, so enthält sie auch die Translation t', deren Richtung mit der von t den Winkel α bildet und die der Größe nach mit t übereinstimmt.

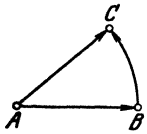

Abb. 61.

Beweis: d sei eine in der Gruppe vorkommende Drehung um α, ihr Drehpunkt sei A. A gehe durch t in B über, und B gehe durch d in C über (Abb. 61). Dann ist einfach $t' = d^{-1}td$. Die so definierte Bewegung gehört nämlich der Gruppe an und ist nach dem Additionssatz der Drehwinkel eine Translation. Wir haben nur noch zu zeigen, daß dabei A in C übergeht; in der Tat bleibt A während d^{-1} fest, geht durch t in B über und kommt von dort durch d nach C.

Nach diesem Satz können z. B. bei den Gruppen der Gattung *I* keine anderen Drehwinkel vorkommen als π, falls überhaupt Translationen in der Gruppe vorhanden sind. Denn sonst gäbe es mit jeder Translationsrichtung eine andere, die ihr nicht parallel ist.

§ 11. Die diskontinuierlichen ebenen Bewegungsgruppen mit unendlichem Fundamentalbereich.

Wir wollen zunächst den Fall *I* erledigen, der die einfachsten Gruppen liefert. Zunächst nehmen wir den Unterfall *I, 1*; dann haben wir es also mit Gruppen zu tun, die keine Drehung enthalten. Wir gehen nun von einem beliebigen Punkt A aus (Abb. 62). Da in endlicher Entfernung von A nur endlich viele ihm äquivalente Punkte liegen, muß es auch einen solchen Punkt A_1 unter ihnen geben, der den kleinsten möglichen Abstand von A hat; es kann natürlich mehrere solcher Punkte kleinsten Abstands von A geben; ich denke mir einen herausgegriffen. Die Bewegung a in der Gruppe, die A in A_1 überführt, muß eine Translation sein, da ja nach Voraussetzung keine Drehungen in der Gruppe vorkommen. Verlängere ich die Strecke AA_1 um sich selbst über A_1 hinaus bis A_2, so muß auch A_2 mit A äquivalent sein. A_2 entsteht nämlich aus A durch die Translation aa. Ebenso liegen auf der Geraden AA_1 noch weitere A äquivalente Punkte $A_3, A_4, \ldots$ in immer gleichem Abstand voneinander, die aus A entstehen, wenn ich a beliebig oft wiederhole. Ebenso liegen auch auf der anderen Seite von A auf der Geraden AA_1 noch unendlich viele äquidistante Punkte $A_{-1}, A_{-2}, \ldots$, die zu A äquivalent sind und die aus A entstehen, wenn ich a^{-1} einmal oder mehrmals anwende. Ich behaupte nun, daß diese Skala auf der Geraden AA_1 auch alle zu A äquivalenten Punkte vollständig erschöpft. Denn alle Translationen, die in der Gruppe vorkommen, müssen nach Voraussetzung zu AA_1 parallelgerichtet sein. Jeder beliebige zu A äquivalente Punkt muß also auf der Geraden AA_1 liegen. Fiele nun ein solcher Punkt A' nicht auf einen Teilpunkt der Skala, so müßte er ins Innere eines Intervalls A_nA_{n+1} fallen (Abb. 63). Die Strecke A_nA' wäre also kürzer als AA_1. Nun kann ich aber durch eine in der Gruppe enthaltene Translation A_n in A überführen, und dabei ginge A' in einen Punkt A'' über, der näher an A läge als A_1. Das steht im Widerspruch damit, daß wir zu Beginn A_1 als einen zu A äquivalenten Punkt kleinsten Abstands von A ausgewählt hatten.

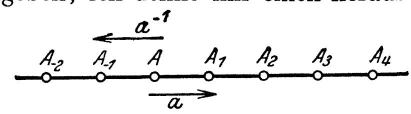

Abb. 62.

Abb. 63.

Wir haben durch diese Überlegung den Fall *I, 1* vollständig erledigt; denn wir haben zu einem beliebigen Punkt die sämtlichen äquivalenten