

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0021

LOG Titel: § 11. Die diskontinuierlichen ebenen Bewegungsgruppen mit unendlichem Fundamentalberiech.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Nach diesem Satz können z. B. bei den Gruppen der Gattung *I* keine anderen Drehwinkel vorkommen als π , falls überhaupt Translationen in der Gruppe vorhanden sind. Denn sonst gäbe es mit jeder Translationsrichtung eine andere, die ihr nicht parallel ist.

§ 11. Die diskontinuierlichen ebenen Bewegungsgruppen mit unendlichem Fundamentbereich.

Wir wollen zunächst den Fall *I* erledigen, der die einfachsten Gruppen liefert. Zunächst nehmen wir den Unterfall *I, 1*; dann haben wir es also mit Gruppen zu tun, die keine Drehung enthalten. Wir gehen nun von einem beliebigen Punkt *A* aus (Abb. 62). Da in endlicher Entfernung von *A* nur endlich viele ihm äquivalente Punkte liegen, muß es auch einen solchen Punkt A_1 unter ihnen geben, der den kleinsten möglichen Abstand von *A* hat; es kann natürlich mehrere solcher Punkte kleinsten Abstands von *A* geben; ich denke mir einen herausgegriffen. Die Bewegung *a* in der Gruppe, die *A* in A_1 überführt, muß eine Translation sein, da ja nach Voraussetzung keine Drehungen in der Gruppe

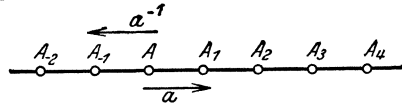


Abb. 62.

vorkommen. Verlängere ich die Strecke AA_1 um sich selbst über A_1 hinaus bis A_2 , so muß auch A_2 mit *A* äquivalent sein. A_2 entsteht nämlich aus *A* durch die Translation aa . Ebenso liegen auf der Geraden AA_1 noch weitere *A* äquivalente Punkte A_3, A_4, \dots in immer gleichem Abstand voneinander, die aus *A* entstehen, wenn ich *a* beliebig oft wiederhole. Ebenso liegen auch auf der anderen Seite von *A* auf der Geraden AA_1 noch unendlich viele äquidistante Punkte A_{-1}, A_{-2}, \dots , die zu *A* äquivalent sind und die aus *A* entstehen, wenn ich a^{-1} einmal oder mehrmals anwende. Ich behaupte nun, daß diese Skala auf der Geraden AA_1 auch alle zu *A* äquivalenten Punkte vollständig erschöpft. Denn alle Translationen, die in der Gruppe vorkommen, müssen nach Voraussetzung zu AA_1 parallelgerichtet sein. Jeder beliebige zu *A* äquivalente Punkt muß also auf der Geraden AA_1 liegen. Fiele nun ein solcher Punkt *A'* nicht auf einen Teilpunkt der Skala, so müßte er ins Innere eines Intervalls $A_n A_{n+1}$ fallen (Abb. 63). Die Strecke $A_n A'$ wäre also kürzer als AA_1 . Nun kann ich aber durch eine in der Gruppe enthaltene Translation A_n in *A* überführen, und dabei ginge *A'* in einen Punkt A'' über, der näher an *A* läge als A_1 . Das steht im Widerspruch damit, daß wir zu Beginn A_1 als einen zu *A* äquivalenten Punkt kleinsten Abstands von *A* ausgewählt hatten.

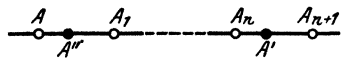


Abb. 63.

Wir haben durch diese Überlegung den Fall *I, 1* vollständig erledigt; denn wir haben zu einem beliebigen Punkt die sämtlichen äquivalenten

gefunden und damit auch alle Bewegungen, die überhaupt in der Gruppe vorkommen. Es sind die Translationen a und a^{-1} , einmal oder mehrmals angewandt. Alle Gruppen der Gattung I, I sind also im wesentlichen identisch.

Um einen Fundamentalbereich aufzustellen, können wir einfach von einer Geraden ausgehen, die nicht parallel AA_1 ist, also etwa dem Lot auf dieser Strecke. Durch a wird diese Gerade auf eine ihr parallele Gerade abgebildet, und der Streifen zwischen den Parallelen ist offenbar ein Fundamentalbereich¹ (Abb. 64). Denn zwei innere Punkte dieses Streifens sind nie äquivalent. Da andererseits die beiden begrenzenden Geraden des Streifens einander äquivalent sind, so kann ich dem Streifen nirgends ein Stück anfügen, ohne daß das so vergrößerte Gebiet ein Paar von äquivalenten Punkten enthielte. Ich kann aber auf andere Weise den Fundamentalbereich noch beliebig abändern, ohne

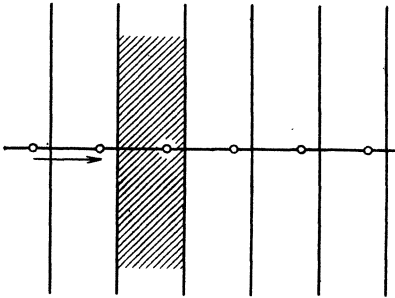


Abb. 64.

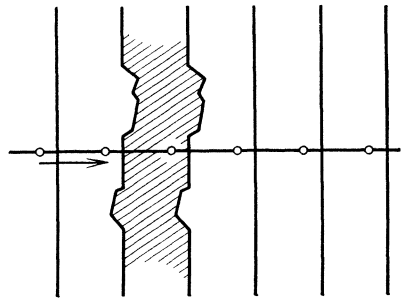


Abb. 65.

daß er seine Eigenschaft verliert. Ich brauche nur auf der einen Seite ein Stück anzusetzen und auf der anderen Seite ein äquivalentes Stück fortzulassen (Abb. 65). Diese Art von Abänderung lassen auch die Fundamentalbereiche aller weiter zu betrachtenden Gruppen und überhaupt aller Abbildungsgruppen zu. Man wählt unter diesen vielen Möglichkeiten stets einen Fundamentalbereich von möglichst einfacher Gestalt aus.

Wenn ich den ganzen Fundamentalbereich der Translation a unterwerfe, so erhalte ich einen kongruenten angrenzenden Streifen. Ich kann auf diese Weise die ganze Ebene mit den Fundamentalbereichen der Gruppe einfach und lückenlos überdecken. Diese Erscheinung tritt auch bei allen anderen im folgenden zu betrachtenden Gruppen ein, und man kann allgemein beweisen, daß die Fundamentalbereiche beliebiger diskontinuierlicher Abbildungsgruppen sich stets einfach und

¹ Dabei hat man festzusetzen, daß etwa die Punkte der linken Grenzgeraden mit zum Fundamentalbereich gehören, die der rechten dagegen nicht; andernfalls würden entweder äquivalente Punkte zum Bereich gehören, oder derselbe wäre noch unvollständig.

lückenlos aneinanderschließen. Allerdings brauchen sie nicht immer die ganze Ebene zu erfüllen, wie wir in einem späteren Kapitel an einem Beispiel sehen werden (S. 228).

Die Gruppe $I, 1$ führt nicht auf ein reguläres Punktsystem, da die einem festen Punkt äquivalenten Punkte eine gradlinige Skala bilden, also die erste definierende Forderung des Punktsystems unerfüllt lassen.

Trotzdem war die Betrachtung dieser Gruppen für das Studium der Punktsysteme nicht ohne Bedeutung. Wenn wir nämlich in einer beliebig kompliziert gebauten diskontinuierlichen Bewegungsgruppe die Gesamtheit aller Translationen betrachten, die irgendeiner in der Gruppe enthaltenen Translation parallelgerichtet sind, so bildet diese Gesamtheit von Translationen wieder eine Gruppe, denn beide Gruppenpostulate sind erfüllt; man bezeichnet eine Gruppe, die in einer umfassenderen Gruppe enthalten ist, als eine Untergruppe der umfassenderen Gruppe. Nun muß jede Untergruppe einer diskontinuierlichen Gruppe selbst diskontinuierlich sein. Wir können daher schließen, daß die herausgegriffene Gesamtheit von Translationen eine Gruppe $I, 1$ ist und die von uns angegebene Struktur besitzt, einerlei von welcher umfassenderen Gruppe wir ausgehen. Diese und ähnliche Schlußweisen werden im folgenden wiederholt zur Anwendung kommen.

Wir betrachten nun den Fall $I, 2$, also Gruppen, die Drehungen enthalten, aber keine zwei Translationen in nichtparallelen Richtungen. Dann haben wir zu unterscheiden, ob die Gruppe überhaupt eine Translation enthält oder nicht. Beginnen wir mit der einfacheren Möglichkeit — wir wollen sie als $I, 2, \alpha$, einordnen —, daß keine Translation vorhanden ist. Ich behaupte, daß dann alle Drehungen denselben Drehpunkt haben müssen. Denn gäbe es zwei Drehungen a, b mit den zwei verschiedenen Mittelpunkten A und B , so könnte die in der Gruppe enthaltene Bewegung $a^{-1}b^{-1}ab$ nach dem Additionssatz der Drehwinkel nur eine Translation oder die Identität sein. Wäre nun B' der Bildpunkt von B vermöge a (Abb. 66); dann wäre B' von B verschieden, weil B von A verschieden vorausgesetzt war und eine Drehung keinen Punkt außer dem Drehpunkt fest läßt. Wäre daher B'' das Bild von B' vermöge b , so wäre auch B'' von B' verschieden. Nun kann man aber leicht sehen, daß B' vermöge $a^{-1}b^{-1}ab$ gerade in B'' überginge. Also wäre die Bewegung $a^{-1}b^{-1}ab$ nicht die Identität, sondern eine Translation, entgegen der Voraussetzung, daß in der Gruppe keine Translationen vorkommen.

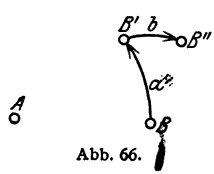


Abb. 66.

Sei nun A der (einzige) Drehpunkt der Gruppe und Q irgendein anderer Punkt. Dann liegen alle zu Q äquivalenten Punkte auf dem durch Q gehenden Kreise um A . Wegen der Diskontinuität der Gruppe kann es also nur endlich viele zu Q äquivalente Punkte geben, und da

die Gesamtheit dieser Punkte durch jede in der Gruppe enthaltene Drehung um A in sich übergeführt werden muß, so müssen die Punkte äquidistant auf der Kreisperipherie liegen (Abb. 67). Ist Q_1 unter diesen Punkten einer der beiden zu Q benachbarten Punkte, so ist $\sphericalangle Q A Q_1$ der kleinste Drehwinkel, der in der Gruppe vorkommt, und wenn die Anzahl der zu Q äquivalenten Punkte (Q eingerechnet) n beträgt, so hat dieser Winkel notwendig den Wert $2\pi/n$, und alle in der Gruppe enthaltenen Bewegungen bestehen aus Drehungen um A um die positiven und negativen Vielfachen dieses Winkels, von denen

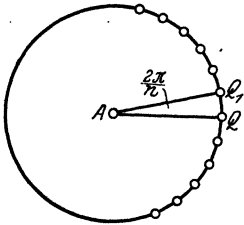


Abb. 67.

es nur endlich viele geometrisch verschiedene gibt. Damit ist der Fall $I, 2, \alpha$ erledigt. Als Fundamentalbereich eignet sich ein Winkelraum mit der Spitze in A und der Öffnung $2\pi/n$ (Abb. 68). Der Fundamentalbereich ist also wieder unendlich, und die Gruppe führt auf kein Punktsystem, da es zu jedem Punkt nur endlich viele äquivalente gibt, also die erste Forderung S. 50 nicht erfüllt ist.

Die Gruppe besitzt für die übrigen diskontinuierlichen ebenen Bewegungsgruppen eine ähnliche Bedeutung wie die vorher betrachtete.

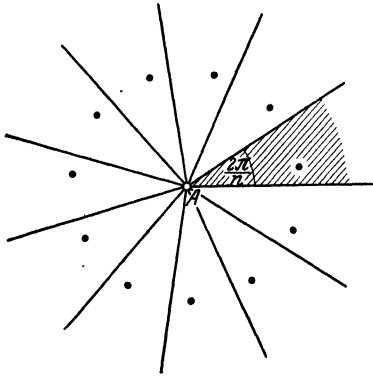


Abb. 68.

Kommt in einer beliebigen solchen Gruppe eine Drehung um einen Punkt A vor, so bildet die Gesamtheit der in der Gruppe enthaltenen Drehungen um A eine diskontinuierliche Untergruppe, muß also den Typus $I, 2, \alpha$ haben. Daraus folgt, daß die Drehwinkel aller dieser Drehungen aus den Vielfachen eines Winkels $2\pi/n$ bestehen müssen. Wir können also den Punkt A durch die ganze Zahl n charakterisieren und als n -zähligen Drehpunkt bezeichnen.

Nun haben wir unter den Gruppen vom Typus I nur noch den Fall $I, 2, \beta$ zu erledigen, daß also eine Drehung d und eine Translation t vorhanden sind und daß alle weiteren Translationen zu t parallel sind. Nach dem zweiten Hilfssatz (S. 56, 57) muß d den Drehwinkel π haben, es gibt daher nach der soeben eingeführten Ausdrucksweise nur 2-zählige Drehpunkte. Sei A_1 ein solcher Punkt (Abb. 69). Die Gesamtheit aller Translationen der Gruppe muß eine Gruppe vom Typ $I, 1$ bilden. Wir betrachten die geradlinige Skala A_1, A_2, \dots der zu A_1 äquivalenten Punkte, die dieser Untergruppe entspricht. Nach dem ersten Hilfssatz (S. 56) müssen alle diese Punkte 2-zählige Drehpunkte sein. Ich be-

haupte, daß außerdem die sämtlichen Mittelpunkte B_1, B_2, \dots der Strecken $A_n A_{n+1}$ 2-zählige Drehpunkte sind. Ist nämlich t die Translation, die A_1 in A_2 überführt und a_2 die Drehung um π um A_2 , so wird durch ta_2 das Punktepaar $A_1 A_2$ in $A_2 A_1$ übergeführt; denn durch t geht $A_1 A_2$ in $A_2 A_3$ über, und $A_2 A_3$ wird durch a_2 in $A_2 A_1$ verwandelt. Da die Drehung um B_1 um π ebenfalls $A_1 A_2$ in $A_2 A_1$ verwandelt, so muß ta_2 mit dieser Drehung identisch sein, also ist B_1 ein 2-zähliger Drehpunkt, und ebenso muß auch die ganze zu B_1 gehörige Skala, d. h. die Gesamtheit der Punkte B_n , aus 2-zähligen Drehpunkten bestehen. Außer diesen Drehpunkten A_n und B_n gibt es aber keine weiteren. Denn ist A irgendeiner der Punkte A_n und

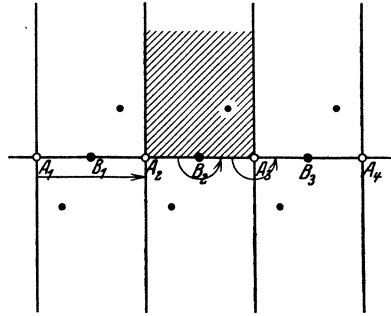


Abb. 69.

ist C irgendein beliebiger von A verschiedener Drehpunkt der Gruppe (Abb. 70), so muß C jedenfalls 2-zählig sein. Sei c die zugehörige Drehung um π , dann betrachte ich die Bewegung ac , wo a die Drehung um A um π bedeute. Ist A' das Bild von A bei c , so ist C der Mittelpunkt der Strecke AA' , und die Bewegung ac führt ebenfalls A in A' über. Nach dem Additionssatz der Drehwinkel muß ac aber eine Translation sein, demnach ist A' einer der Punkte, die aus A durch die in der Gruppe enthaltenen Translationen hervorgehen, d. h. A' ist einer der Punkte A_1, A_2, \dots , und C ist als Mittelpunkt von AA' notwendig einer der Punkte A_n oder B_n .

Damit haben wir einen vollständigen Überblick über die Gruppen $I, 2, \beta$. In Abb. 69 sind die beiden Klassen von Drehpunkten und ein geeigneter Fundamentbereich eingezeichnet. Es ist zu beachten, daß keiner der Punkte A_n einem der Punkte B_n äquivalent sein kann, da durch jede Drehung und jede Translation der Gruppe jede der beiden Skalen in sich übergeht.

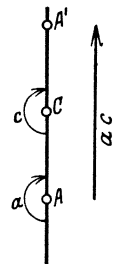


Abb. 70.

In Abb. 69 sind ferner einige einander äquivalente Punkte eingezeichnet, die von den Drehpunkten verschieden sind. Sie sind zickzackförmig angeordnet. Da sie in einem Streifen endlicher Breite Platz finden, erfüllen sie die erste Forderung nicht, die wir an die Punktsysteme gestellt haben; denn ihre Anzahl im Innern eines Kreises von wachsendem Radius nimmt offenbar nur proportional der ersten Potenz des Radius zu. Wie bei den ersten beiden Gruppen ist der Fundamentbereich unendlich.

Die Systeme äquivalenter Punkte, die nicht Drehpunkte sind, kann man sich als zwei kongruente und parallelgestellte Skalen vorstellen;

ähnlich werden wir bei den komplizierteren Gruppen zu Systemen kongruenter parallelgestellter Gitter kommen. Offenbar ist das Auftreten verschiedener Skalen und Gitter durch das Vorhandensein von Drehungen bedingt. In der Tat wird in unserem Fall die eine Skala durch jede Gruppendrehung in die andere verwandelt; nur die Skalen der Drehpunkte selbst bilden eine Ausnahme.

Da sich nun der Punkt wegen seiner allseitigen Symmetrie nicht zur Wiedergabe von Drehungen eignet, ist es anschaulicher, nicht zu Punkten, sondern zu anderen einfachen Figuren die Gesamtheit aller Äquivalenten aufzuzeichnen. Die einfachste Figur, die keine allseitige Symmetrie besitzt, besteht aus einem „Zeiger“, d. h. einem Punkt mit einer hindurchgehenden Richtung. In Abb. 71 *a*, *b* sind Systeme äquivalenter Zeiger für die Gruppe $I, 2, \beta$ gezeichnet; man erhält zwei verschiedene Typen von

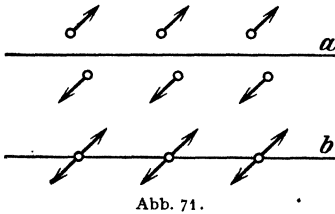


Abb. 71.

Figuren, je nachdem man den Zeiger eines Punktes allgemeiner Lage oder eines Drehpunktes zugrunde legt. Im ersten Fall erweist sich besonders der Vorteil, den die Einführung der Zeiger bringt: Die beiden Skalen sind durch verschiedene Zeigerrichtung voneinander unterschieden, während alle Zeiger derselben Skala gleichgerichtet sind.

§ 12. Die krystallographischen Bewegungsgruppen der Ebene. Reguläre Punkt- und Zeigersysteme. Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen.

Wir wenden uns nun zum Fall *II*, also zu Gruppen, die zwei nichtparallele Translationen enthalten. Es stellt sich heraus, daß alle diese Gruppen im Gegensatz zu den Gruppen vom Typus *I* stets auf Punktsysteme führen, daß wir sie also gemäß S. 52 als krystallographische Gruppen zu bezeichnen haben. Damit steht es im Zusammenhang, daß alle diese Gruppen endliche Fundamentalbereiche besitzen. Bei der Betrachtung dieser Gruppen stoßen wir in erster Linie wieder auf die ebenen Punktgitter. Wie wir schon erwähnten, bilden die Figuren äquivalenter Punkte und Zeiger stets entweder ein solches Punktgitter oder lassen sich als Systeme aus mehreren parallelgestellten kongruenten Gittern auffassen.

Wir hatten auf S. 55 den Fall *II* in zwei Unterfälle eingeteilt. Wir wollen zuerst den einfacheren Unterfall *II, 1* behandeln, in dem die Gruppe keine Drehungen enthält, dagegen zwei nichtparallele Translationen. In diesem Fall zeigt es sich nun, daß die zu einem Punkt äquivalenten Punkte stets ein ebenes Punktgitter bilden.

Zum Beweis gehe ich von einem beliebigen Punkt *P* aus und suche eine solche Translation *t* der Gruppe, die *P* in einen möglichst