

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG_0022

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

ähnlich werden wir bei den komplizierteren Gruppen zu Systemen kongruenter parallelgestellter Gitter kommen. Offenbar ist das Auftreten verschiedener Skalen und Gitter durch das Vorhandensein von Drehungen bedingt. In der Tat wird in unserem Fall die eine Skala durch jede Gruppendrehung in die andere verwandelt; nur die Skalen der Drehpunkte selbst bilden eine Ausnahme.

Da sich nun der Punkt wegen seiner allseitigen Symmetrie nicht zur Wiedergabe von Drehungen eignet, ist es anschaulicher, nicht zu Punkten, sondern zu anderen einfachen Figuren die Gesamtheit aller Äquivalenten aufzuzeichnen. Die einfachste Figur, die keine allseitige Symmetrie besitzt, besteht aus einem „Zeiger“, d. h. einem Punkt mit einer hindurchgehenden Richtung. In Abb. 71 *a, b* sind Systeme äquivalenter Zeiger für die Gruppe $I, 2, \beta$ gezeichnet; man erhält zwei verschiedene Typen von

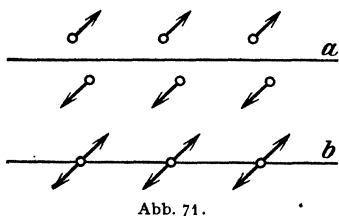


Abb. 71.

Figuren, je nachdem man den Zeiger eines Punktes allgemeiner Lage oder eines Drehpunktes zugrunde legt. Im ersten Fall erweist sich besonders der Vorteil, den die Einführung der Zeiger bringt: Die beiden Skalen sind durch verschiedene Zeigerrichtung voneinander unterschieden, während alle Zeiger derselben Skala gleichgerichtet sind.

§ 12. Die krystallographischen Bewegungsgruppen der Ebene. Reguläre Punkt- und Zeigersysteme. Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen.

Wir wenden uns nun zum Fall *II*, also zu Gruppen, die zwei nichtparallele Translationen enthalten. Es stellt sich heraus, daß alle diese Gruppen im Gegensatz zu den Gruppen vom Typus *I* stets auf Punktsysteme führen, daß wir sie also gemäß S. 52 als krystallographische Gruppen zu bezeichnen haben. Damit steht es im Zusammenhang, daß alle diese Gruppen endliche Fundamentalbereiche besitzen. Bei der Betrachtung dieser Gruppen stoßen wir in erster Linie wieder auf die ebenen Punktgitter. Wie wir schon erwähnten, bilden die Figuren äquivalenter Punkte und Zeiger stets entweder ein solches Punktgitter oder lassen sich als Systeme aus mehreren parallelgestellten kongruenten Gittern auffassen.

Wir hatten auf S. 55 den Fall *II* in zwei Unterfälle eingeteilt. Wir wollen zuerst den einfacheren Unterfall *II, 1* behandeln, in dem die Gruppe keine Drehungen enthält, dagegen zwei nichtparallele Translationen. In diesem Fall zeigt es sich nun, daß die zu einem Punkt äquivalenten Punkte stets ein ebenes Punktgitter bilden.

Zum Beweis gehe ich von einem beliebigen Punkt P aus und suche eine solche Translation t der Gruppe, die P in einen möglichst

nahen äquivalenten Punkt Q überführt (Abb. 72). Dann liefern die zu t parallelen Translationen eine Skala weiterer zu P äquivalenter Punkte auf der Geraden PQ . Nun gibt es nach Voraussetzung noch Translationen, die nicht zu PQ parallel sind, also gibt es noch außerhalb der Geraden PQ äquivalente Punkte zu P ; unter diesen suche ich mir wieder einen möglichst nahe bei P gelegenen Punkt R heraus, und t' sei die Translation aus unserer Gruppe, die P in R überführt. Dann ist jedenfalls $PR \cong PQ$. Ist S der Punkt, in den Q durch t' übergeht, so bilden die Punkte $PQRS$ ein Parallelogramm, und es ist ersichtlich, daß das durch dieses Parallelogramm erzeugte Gitter aus lauter äquivalenten Punkten besteht. Denn alle diese Punkte entstehen aus P , indem ich erst t (oder t^{-1}) und dann t' (oder t'^{-1}) je eine bestimmte Anzahl von Malen anwende. Ich behaupte nun, daß es keine weiteren zu P äquivalenten Punkte mehr geben kann, daß also auch alle in der Gruppe vorkommenden Translationen sich aus t und t' zusammensetzen lassen. Denn im entgegengesetzten Falle enthielte die Gruppe eine Translation u , die P in einen Punkt U überführte, der nicht zum Gitter gehörte. Dann könnte ich ein bestimmtes zu $PQRS$ kongruentes Gitterparallelogramm $P'Q'R'S'$ (Abb. 72) ausfindig machen, das U enthielte. Von den

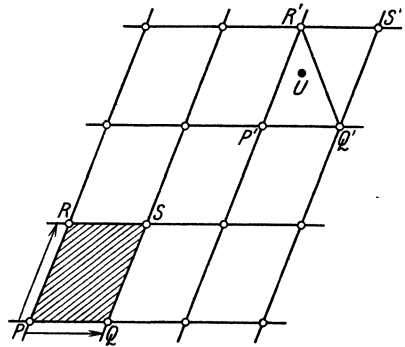


Abb. 72.

beiden kongruenten Dreiecken $P'Q'R'$ und $S'Q'R'$ müßte eines, etwa das erste, U enthalten. Nun müßte aber in der Gruppe die Translation $P' \rightarrow U$ vorkommen, die sich ja aus der Gruppentranslation $P' \rightarrow P$ und u zusammensetzen läßt. Das führt zu einem Widerspruch. Denn da nach unserer früheren Betrachtung $PR \cong PQ$ sein muß, so ist im Dreieck $P'Q'R'$ der Punkt R' am weitesten von P' entfernt. Die Translation $P' \rightarrow U$ wäre also kürzer als die Translation t' , die P in R , also P' in R' überführt. Deshalb müßte die Translation $P' \rightarrow U$ zu t parallel sein, und U müßte auf der Strecke $P'Q'$ liegen. Dann wäre aber die Translation $P' \rightarrow U$ auch kürzer als t , während doch t als eine der kürzesten in der Gruppe vorkommenden Translationen ausgewählt war. Entsprechend verläuft der Beweis, wenn man annimmt, U läge im Dreieck $S'Q'R'$. Dann hat man statt der Translation $P' \rightarrow U$ die Translation $S' \rightarrow U$ zu betrachten, was in gleicher Weise zu einem Widerspruch führt.

Die zueinander äquivalenten Punkte der Gruppen II, I bilden also stets Punktgitter, und wendet man die Gruppe auf einen Zeiger anstatt

auf einen Punkt an, so erhält man ein Gitter aus parallelgestellten Zeigern (Abb. 73).

Wenn wir uns jetzt zur letzten noch übrigen Kategorie *II, 2* wenden, wo also auch Drehungen zugelassen sind, so haben wir auf das soeben abgeleitete Ergebnis in jedem Fall zurückzugreifen. Denn auch die Gruppen *II, 2* enthalten wie *II, 1* zwei nichtparallele Translationen.

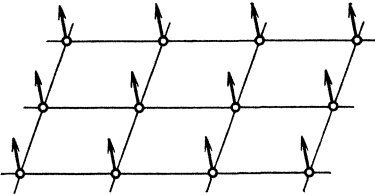


Abb. 73.

Die Gesamtheit der in einer Gruppe *II, 2* enthaltenen Translationen muß daher notwendig eine Untergruppe vom Typ *II, 1* sein. Wenn man also unter den Punkten, die in einer Gruppe *II, 2* zu einem beliebigen Punkt P äquivalent sind, nur diejenige Gesamtheit betrachtet, die aus P durch eine Translation hervorgehen, so erhält man ein Punktgitter. Die in der Gruppe enthaltenen Drehungen müssen dieses Gitter entweder in sich überführen oder aber einen Punkt des Gitters in einen nicht im Gitter enthaltenen Punkt Q verwandeln. Die Translationen der Gruppe erzeugen aber aus Q wieder ein Gitter, das zum Gitter von P kongruent und parallelorientiert ist und dessen Punkte sämtlich äquivalent zu Q und P sind. Durch dieses Verfahren, das offenbar so lange fortgesetzt werden kann, als es noch unverbrauchte zu P äquivalente Punkte gibt, kann ich aber nur endlich viele verschiedene Gitter erhalten, denn andernfalls könnte die Gruppe nicht diskontinuierlich sein. Diese Überlegung zeigt, daß es nur verhältnismäßig wenige Gruppen *II, 2*

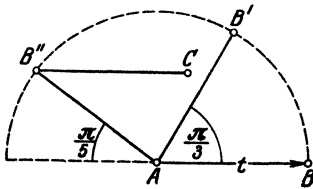


Abb. 74.

geben kann und daß die zugehörigen Punktsysteme stets aus parallelgestellten kongruenten Gittern bestehen.

Wir teilen die Gruppen *II, 2* nach den bei ihnen vorkommenden Drehwinkeln ein. Alle diese Drehwinkel müssen die Form $2\pi/n$ haben, wo n eine ganze Zahl ist; denn die Drehungen um einen Punkt, die

in der Gruppe vorkommen, bilden eine diskontinuierliche Untergruppe vom Typ *I, 2, α* . Ich behaupte nun, daß n keine anderen von 1 verschiedenen Werte annehmen kann als 2, 3, 4, 6. Zum Beweis betrachte ich einen n -zähligen Drehpunkt A der Gruppe (Abb. 74) und wähle in der Gruppe eine möglichst kurze Translation t aus, die A in B überführen möge. Durch Drehung um A um $2\pi/n$ werde B nach B' gebracht. Nach Hilfssatz 2, S. 56 enthält dann die Gruppe auch die Translation t' , die A in B' überführt. Wir betrachten nun die Bewegung $t^{-1}t'$, die offenbar B nach B' bringt. Nach dem Additionssatz der Drehwinkel ist $t^{-1}t'$ eine Translation, und da t als eine möglichst kurze

Translation der Gruppe ausgewählt war, so folgt $BB' \geq AB$. Daher ist $\sphericalangle BAB' = \frac{2\pi}{n} \geq \frac{\pi}{3}$, also $n \leq 6$. Wir haben nun noch den Fall $n = 5$ auszuschließen. Zu diesem Zweck gehen wir indirekt vor und nehmen A als 5-zähligen Drehpunkt (Abb. 74) an. Durch Drehung um A um $2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ gehe B in B'' über. Dann enthielte die Gruppe die Translation t'' , die A in B'' überführt. Dann würde aber die Translation $t''t$ ersichtlich A in C überführen, und da C näher an A liegt als B , so gäbe es im Widerspruch zur Voraussetzung eine kürzere Translation als t in der Gruppe.

Somit können in den Gruppen $II, 2$ in der Tat nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Drehpunkte auftreten. Ist φ der kleinste in einer solchen Gruppe auftretende Drehwinkel, so haben wir die vier Unterfälle zu diskutieren:

$$\begin{aligned}
 II, 2, \alpha: & \quad \varphi = \pi, \\
 II, 2, \beta: & \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}, \\
 II, 2, \gamma: & \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \\
 II, 2, \delta: & \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß zu jedem dieser vier Fälle genau eine Gruppe gehört.

II, 2, α : Es muß in der Gruppe wenigstens einen 2-zähligen Drehpunkt A geben. Die Untergruppe der in der Gruppe enthaltenen Translationen liefert zu A als äquivalente weitere 2-zählige Drehpunkte die Punkte eines Gitters; $ABCD$ sei eines seiner erzeugenden Parallelogramme (Abb. 75). Wir können nun auf die Betrachtungen zurückgreifen, die wir über die Gruppen $I, 2, \beta$ angestellt hatten (S. 60, 61). Danach muß der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke irgend zweier Punkte des Gitters

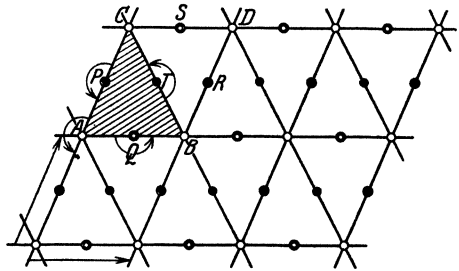


Abb. 75.

ebenfalls 2-zähliger Drehpunkt sein, und umgekehrt muß jeder 2-zählige Drehpunkt eine solche Verbindungsstrecke halbieren. Wir betrachten nun den Mittelpunkt Q von AB , den Mittelpunkt P von AC und den Mittelpunkt T von BC und AD . Alle diese Punkte sind paarweise inäquivalent. Sie sind nach dem soeben Gesagten sämtlich 2-zählige Drehpunkte und mit ihren zugehörigen Gittern erschöpfen sie auch alle 2-zähligen Drehpunkte, die in der Gruppe vorkommen. Wir haben also vier verschiedene Klassen von 2-zähligen Drehpunkten. Die Drehungen um diese Punkte und die Translationen des Gitters $ABCD$ erschöpfen alle Transformationen der Gruppe, da nach unserer Annahme

keine anderen als 2-zählige Drehpunkte vorkommen können. Als Fundamentalbereich können wir offenbar das Dreieck ABC verwenden.

In Abb. 76 und 77 sind die Figuren aus äquivalenten Zeigern gezeichnet, die man erhält, je nachdem man von einem Punkt allgemeiner Lage (Abb. 76) oder einem Drehpunkt (Abb. 77) ausgeht. Im ersten Fall erhalten wir zwei ineinandergestellte Gitter, die durch entgegengesetzte Zeigerrichtung unterschieden sind. Im zweiten Fall rücken die Gitter in eins zusammen, da in jedem Drehpunkt zwei Zeiger ansetzen. Betrachtet man statt der Zeiger nur die Punkte, so liefern beide Figuren je ein reguläres Punktsystem; aber dann unterscheidet sich das System Abb. 77

nicht mehr von dem zu Abb. 72 gehörigen System, dem ebenen

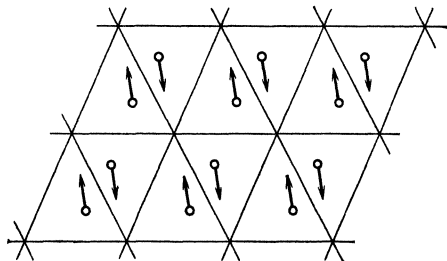


Abb. 76.

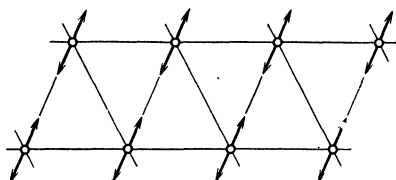


Abb. 77.

allgemeinen Punktgitter. Wenn wir umgekehrt zum ebenen allgemeinen Punktgitter die zugehörige Gruppe von Deckbewegungen suchen, so ergibt sich nicht etwa $II, 1$, sondern stets $II, 2, \alpha$, da wir ja in Abb. 75 das Parallelogramm $ABCD$ ganz beliebig wählen dürfen und das zugehörige Gitter durch die Bewegungen der Gruppe in sich übergeführt wird. Die Betrachtung der Zeiger statt der Punkte führt also hier zu klareren Unterscheidungen.

II, 2, β . Nach unserer Annahme ist $2\pi/3$ der kleinste vorkommende Drehwinkel. Ich behaupte, daß die Drehungen um $\pm \frac{2\pi}{3}$ auch die einzigen sind. Denn von anderen Winkeln käme nur π in Frage; nach dem Additionssatz würde aber eine Drehung um π und eine Drehung um $-\frac{2\pi}{3}$ eine Drehung um $\pi/3$ ergeben, und ein solcher Drehwinkel darf in der Gruppe nicht vorkommen. Es gibt daher in der Tat ausschließlich 3-zählige Drehpunkte in der Gruppe.

Sei A ein 3-zähliger Drehpunkt (Abb. 78) und $A \rightarrow B$ eine möglichst kurze in der Gruppe enthaltene Translation. Geht B durch Drehung um A um $2\pi/3$ in C über, so ist nach Hilfssatz 2 auch die Translation $A \rightarrow C$ in der Gruppe enthalten. Das Gitter der Untergruppe der Translationen muß sich aus dem Parallelogramm $ABCD$ erzeugen lassen, da in seinem Innern nach unserer Konstruktion keine anderen Gitterpunkte mehr liegen können. Die Diagonale AD zerlegt $ABCD$ in zwei gleichseitige Dreiecke. Das Translationsgitter der Gruppe muß also

das der dichtesten Kreislagerung sein und kann nicht wie im Fall $II, 2, \alpha$ beliebig angenommen werden (ebenso werden wir auch in den folgenden beiden Fällen sehen, daß die zugehörigen Translationsgitter spezielle Gestalt haben müssen). Die Drehung (d) $AB \rightarrow AC$ und hierauf die Translation (t) $A \rightarrow B$ führen zusammengesetzt (dt) AB in BD über (Abb. 78). dt muß also eine Drehung d' um den Mittelpunkt M des Dreiecks ABD sein mit $2\pi/3$ als Drehwinkel.

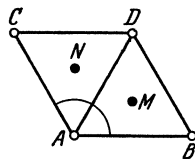


Abb. 78.

M ist also ebenfalls 3-zähliger Drehpunkt der Gruppe. Ferner wird AC durch $d'' = td'$ über BD nach DA befördert, also ist d'' die Drehung um $-2\pi/3$ um den Mittelpunkt N des Dreiecks ACD ; demnach ist auch N 3-zähliger Drehpunkt. Ebenso wie A führen auch M und N zu Gittern, deren sämtliche Punkte 3-zählige Drehpunkte sind. Ich behaupte, damit sind alle Drehungen der Gruppe erschöpft. Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß zwei 3-zählige Drehpunkte E und F nie einen kürzeren Abstand haben können als AM . Nun ergeben die Drehungen $d^{-1}d'$ offenbar t . Ebenso erzeugen zwei entgegengesetzte Drehungen um E und F eine Translation, und deren Länge müßte sich zum Abstand EF verhalten wie die Länge von t zum Abstand AM . Da nach Voraussetzung keine Translation der Gruppe kürzer ist als t , kann somit auch EF nicht kürzer sein als AM . Es gibt daher in der Tat keine anderen Drehpunkte als die Punkte der zu A, M, N gehörigen drei Gitter. Da die Drehungen um A jedes dieser Gitter in sich überführen und nicht ein Gitter ins andere, so sind die Punkte A, M, N inäquivalent. Die Gruppe $II, 2, \beta$ besitzt demnach drei verschiedene Klassen von Drehpunkten (Abb. 79). Die Punkte jeder Klasse

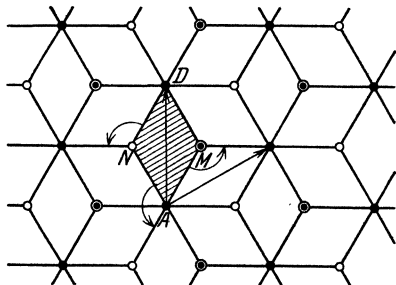


Abb. 79.

lassen sich als Mittelpunkte eines Systems regulärer Sechsecke auffassen, die die Ebene einfach und lückenlos überdecken und deren Ecken abwechselnd mit den Drehpunkten der anderen beiden Klassen besetzt sind. Man erhält auf diese Weise drei Systeme regulärer Sechsecke, die in bestimmter Weise übereinanderliegen. Übrigens läßt sich diese Figur als eine Orthogonalprojektion dreier übereinanderliegender Schichten des Graphitgerüsts (Abb. 56, S. 48) auffassen.

Als Fundamentalbereich ist in Abb. 79 der Rhombus $AMND$ gewählt¹, ferner sind in dieser Figur zwei Translationen eingetragen, aus denen sich das Translationsgitter der Gruppe erzeugen läßt.

¹ Dasselbe System aneinandergrenzender Rhomben wird im Aufbau der Bienenwabe verwandt.

Betrachtet man ein System äquivalenter Zeiger, die nicht von einem Drehpunkt ausgehen (Abb. 80), so erhält man drei ineinandergestellte Gitter, von denen jedes durch eine bestimmte Zeigerstellung gekennzeichnet ist. Erzeugende Parallellogramme dieser Gitter sind nicht eingetragen, weil die Figur sonst unübersichtlich würde.

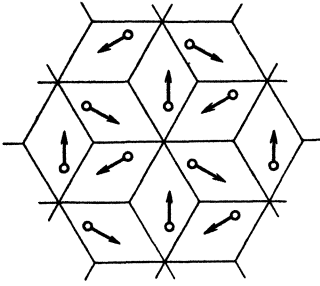


Abb. 80.

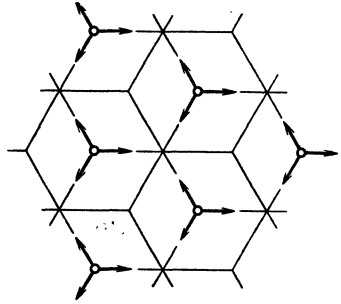


Abb. 81.

Geht man von einem Drehpunkt aus (Abb. 81), so fallen die drei Gitter in eins zusammen, da von jedem Punkt drei Zeiger ausgehen müssen.

II, 2, γ . Der kleinste Drehwinkel der Gruppe ist $\pi/2$. Es kann also 2- und 4-zählige Drehpunkte geben. Andere Drehwinkel können nicht auftreten, denn eine Drehung um $2\pi/3$ ließe sich nach dem Additionssatz mit einer Drehung um π zu einer Drehung um $\pi/3$ zusammensetzen, im Widerspruch damit, daß kein kleinerer Drehwinkel als $\pi/2$ vorkommen soll.

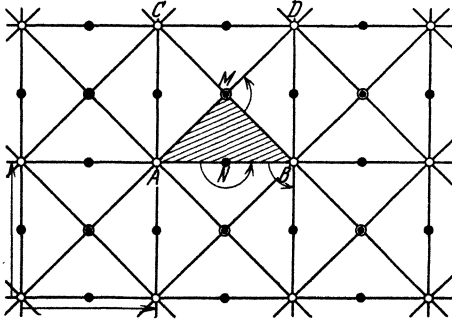


Abb. 82.

Wir führen nun die Untersuchung ähnlich wie im vorigen Fall. Sei A irgendein 4-zähliger Drehpunkt (Abb. 82) und $A \rightarrow B$ eine möglichst kurze Translation der Gruppe. Geht B durch Drehung um A um $\pi/2$ in C über, so ist auch $A \rightarrow C$ eine in der Gruppe vorkommende

Translation. Das Translationsgitter der Gruppe muß sich also aus dem Quadrat $ABCD$ erzeugen lassen, da dieses Gitterpunkte zu Ecken hat und keine weiteren Gitterpunkte mehr enthalten kann. Wie im vorigen Fall ist also das Translationsgitter nicht beliebig, sondern hat eine besondere symmetrische Gestalt. Wenn wir nun zu den Translationen nur noch die Drehungen um π , aber nicht die um $\pi/2$ hinzunehmen, so erhalten wir eine Untergruppe, und diese muß den Typus **II, 2, α** haben. Die Mittelpunkte der Quadrate, z. B. M , sowie die

Mittelpunkte der Quadratseiten, z. B. N , bilden zusammen mit den Quadratecken das vollständige System der Drehpunkte in der Untergruppe. Ausschließlich unter diesen Punkten haben wir aber auch die 2- und 4-zähligen Drehpunkte der vollen Gruppe zu suchen, da diese Punkte ja in der Untergruppe als 2-zählig mitberücksichtigt sein müssen. Betrachten wir nun die Drehung (d) $AB \rightarrow AC$ und die Translation (t) $A \rightarrow B$, so führt $d' = dt$ offenbar AB in BD über, d' ist daher die Drehung um M um $\pi/2$, und demnach sind die Quadratmittelpunkte sämtlich 4-zählige und nicht nur 2-zählige Drehpunkte. Ebenso wie im vorigen Fall können wir schließen, daß keine anderen 4-zähligen Drehpunkte mehr vorkommen. $d^{-1}d'$ ist nämlich die kürzeste in der Gruppe enthaltene Translation t , also können zwei 4-zählige Drehpunkte keinen kürzeren Abstand haben als AM , wir können daher zu den Gittern von A und M keine 4-zähligen Drehpunkte mehr hinzufügen. Da diese beiden Gitter durch jede der bisher betrachteten Bewegungen in sich und nicht ineinander übergeführt werden, sind A und M inäquivalent. Dagegen erkennt man, daß alle 2-zähligen Drehpunkte äquivalent sind. Wir haben also eine einzige Klasse 2-zähliger Drehpunkte, bestehend aus zwei ineinandergeschobenen Quadratgittern, und zwei Klassen 4-zähliger Drehpunkte, aus je einem Gitter bestehend. Als Fundamentalbereich läßt sich das Dreieck AMB verwenden.

Das Zeigersystem, das zu einem Punkt allgemeiner Lage gehört (Abb. 83), besteht aus vier Quadratgittern, jedes durch eine bestimmte Zeigerrichtung gekennzeichnet. Ein 2-zähliger Drehpunkt (Abb. 84) liefert zwei Gitter verschiedener Zeigerrichtung, ein 4-zähliger Drehpunkt nur ein einziges (Abb. 85). Wenn dabei wie in dieser Figur die Pfeile paarweise aufeinanderzeigen, können wir die Figur als regelmäßige ebene Anordnung gleichartiger 4-wertiger Atome deuten.

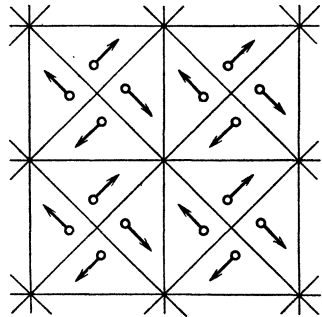


Abb. 83.

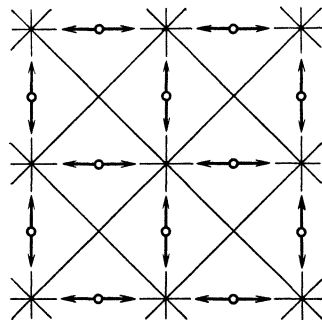


Abb. 84.

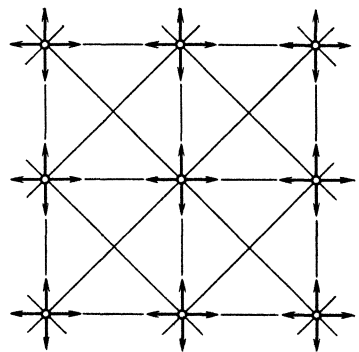


Abb. 85.

II, 2, δ . In diesem Fall ist die Mannigfaltigkeit der Drehungen am größten. Denn da 6-zählige Drehpunkte zugelassen sind, können auch 2- und 3-zählige vorkommen. Dagegen sind 4-zählige Drehpunkte ausgeschlossen, denn mit einer Drehung um $\pi/2$ und einer Drehung um $\pi/3$ enthielte die Gruppe notwendig eine Drehung um $\pi/6$, und dieser Drehwinkel kann in keiner krystallographischen ebenen Bewegungsgruppe auftreten.

Es sei A ein 6-zähliger Drehpunkt der Gruppe (Abb. 86). Wir betrachten nun zunächst die Untergruppe, die aus den Translationen und den Drehungen um $2\pi/3$ besteht. Die Struktur dieser Untergruppe ist uns aus **II, 2, β** bekannt. In ihr tritt A als 3-zähliger Drehpunkt auf. Das Translationsgitter dieser Untergruppe ist das Gitter der gleichseitigen Dreiecke, und neben den Ecken, z. B. A, B, C , treten auch die Mittelpunkte der Dreiecke, z. B. M , als 3-zählige Drehpunkte auf.

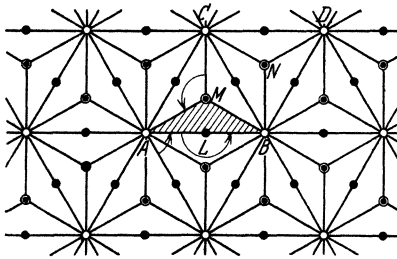


Abb. 86.

Daraus können wir aber schließen, daß auch in der ganzen Gruppe selbst die Translationen das gleiche Gitter bilden, da diese ja alle in der Untergruppe berücksichtigt sind. In der ganzen Gruppe ist nun A nicht 3-, sondern 6-zähliger Drehpunkt, daher müssen auch alle Gitterpunkte des Gitters von A 6-zählig sein.

Wenn es noch andere 6-zählige

Drehpunkte in der Gruppe gibt, können es nur die Dreiecksmitten sein, denn alle 6-zähligen Drehpunkte sind in der Untergruppe als 3-zählig mitberücksichtigt. Nun bewirken die beiden Drehungen um A und C um $+\pi/3$ und $-\pi/3$ die Translation $A \rightarrow B$. Da es keine kürzere Translation als diese in der Gruppe gibt, kann auch der Abstand 6-zähliger Drehpunkte nicht kürzer sein als AC ; folglich gibt es außer dem Gitter von A keine 6-zähligen Drehpunkte, und die Dreiecksmitten sind 3-zählig. Weitere 3-zählige Punkte kann es nicht geben, da sie alle in der Untergruppe berücksichtigt waren. Im Gegensatz zum Fall **II, 2, β** sind die 3-zähligen Drehpunkte sämtlich äquivalent, da z. B. M durch eine Drehung um B in N übergeführt wird.

Um nun noch die etwaigen 2-zähligen Drehpunkte aufzufinden, verfahren wir analog: Wir betrachten die Untergruppe, die aus den Translationen und den Drehungen um π besteht. Aus den Betrachtungen über den Fall **II, 2, α** ergibt sich, daß die Ecken des erzeugenden Gitterparallelogramms sowie deren Mittelpunkte und Seitenmittelpunkte, d. h. die Mittelpunkte der Seiten aller gleichseitigen Dreiecke, Drehungen um π gestatten. Die Ecken der Dreiecke haben wir schon als 6-zählige Drehpunkte berücksichtigt. Es bleiben also genau die Seitenmitten der

Dreiecke als Gesamtheit der 2-zähligen Drehpunkte übrig. Man erkennt, daß sie alle äquivalent sind. Es gibt also je eine Klasse 2-, 3- und 6-zähliger Drehpunkte. AMB ist ein Fundamentalbereich der Gruppe.

Das Zeigersystem eines Punktes allgemeiner Lage besteht aus sechs ineinandergeschobenen Gittern, von denen jedes durch eine Zeiger-

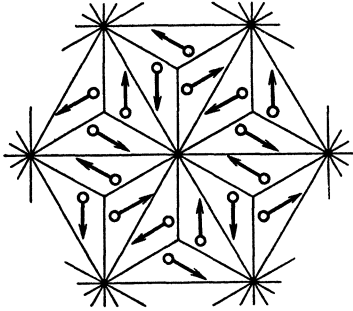


Abb. 87.

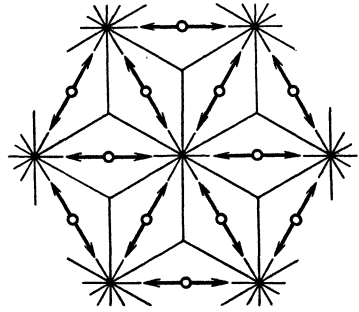


Abb. 88.

richtung gekennzeichnet ist. In Abb. 87 ist jedes dieser Gitter durch je drei parallele Zeiger vertreten, die je ein gleichseitiges Dreieck bilden. Geht man von einem 2-zähligen Drehpunkt aus (Abb. 88), so fallen die Gitter paarweise zu drei Gittern zusammen. Diese Figur gibt eine mögliche regelmäßige ebene Anordnung eines Komplexes aus zweierlei Atomen, von denen die eine Art 6-wertig und die andere Art 2-wertig ist.

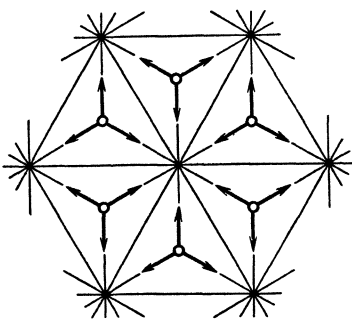


Abb. 89.

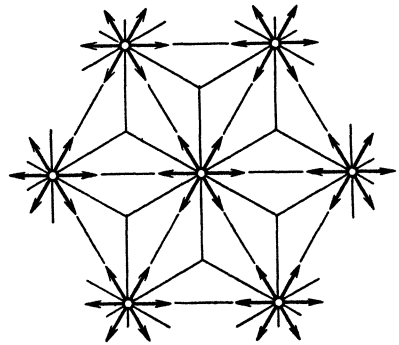


Abb. 90.

Wenn wir alle Zeiger um $\pi/2$ drehen, kommen wir auf eine Anordnung, bei der 2- und 3-wertige Atome verknüpft sind. Das Zeigersystem der 3-zähligen Drehpunkte (Abb. 89) besteht aus zwei Gittern. Bei der in der Figur angenommenen Zeigerstellung ergibt sich eine Anordnung aus 3- und 6-wertigen Atomen. Das Zeigersystem der 6-zähligen Drehpunkte (Abb. 90) bildet ein einziges Gitter, das wir in der gezeichneten Zeigerstellung als regelmäßige ebene Anordnung 6-wertiger gleichartiger Atome auffassen können.

Die Aufgabe, die wir uns in § 9 gestellt haben, ist nunmehr vollständig gelöst. Wir haben die sämtlichen überhaupt möglichen krystallographischen Bewegungsgruppen der Ebene aufgestellt und dabei gefunden, daß es nur fünf solche Gruppen gibt. Die allgemeinsten Punkt- und Zeigersysteme erhalten wir, wenn wir in jeder Gruppe von einem Punkt allgemeiner Lage ausgehen. Denn die Punktsysteme aus Drehpunkten der komplizierteren Gruppen kehren in den Punktsystemen aus Punkten allgemeiner Lage wieder, wenn wir einfachere Gruppen zugrunde legen. Dagegen liefern die Zeigersysteme bei den Drehpunkten neuartige Figuren.

Zugleich haben wir die Lösung eines mit dem vorigen verwandten Problems gefunden, nämlich auf welche verschiedenen Arten man die Ebene aus kongruenten endlichen Bereichen derart zusammensetzen kann, daß der ganze Aufbau durch eine Deckbewegung in sich übergeführt werden kann, und daß jeder Baustein durch eine Deckbewegung mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann. Die Gruppe dieser Deckbewegungen muß eine diskontinuierliche sein, und zwar eine krystallographische, weil die Anzahl der Bausteine innerhalb eines Kreises mit dem Quadrat des Radius ins Unendliche wächst. Es gibt daher nur zwei Möglichkeiten. Entweder läßt keine von der Identität verschiedene Deckbewegung einen Baustein ungeändert; dann muß der Baustein einen Fundamentalbereich bilden. Oder es gibt Bausteine, die durch eine Deckbewegung in sich übergehen; dann bildet die Gesamtheit der Deckbewegungen dieser Art eine diskontinuierliche Untergruppe, die ersichtlich keine Translationen enthält, also aus Drehungen um einen bestimmten Punkt bestehen muß ($I, 2, \alpha$). In diesem Fall hat der Baustein zentrale Symmetrie und muß sich aus Fundamentalbereichen zusammensetzen lassen. Ein Beispiel für diesen Fall liefert der Aufbau der Ebene aus kongruenten regulären Sechsecken oder Quadraten, der bei vielen Fußböden verwandt wird.

Ein anderes und schwierigeres Problem ist das „Parkettierungsproblem“; es erfordert, die Ebene aus endlichen kongruenten Bausteinen zusammenzusetzen, dagegen wird nicht verlangt, daß der Bau Deckbewegungen gestattet.

§ 13. Die krystallographischen Klassen und Gruppen räumlicher Bewegungen. Gruppen und Punktsysteme mit spiegelbildlicher Symmetrie.

Auch im Raum gibt es nur endlich viele krystallographische Bewegungsgruppen; ihre Anzahl ist aber weit größer als in der Ebene. Um diese Gruppen bestimmen zu können, muß man, wie in der Ebene, zunächst die einzelnen Bewegungen geometrisch kennzeichnen. Man kann auch im Raum jede beliebige Bewegung durch eine Bewegung von be-