Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0023

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Aufgabe, die wir uns in § 9 gestellt haben, ist nunmehr vollständig gelöst. Wir haben die sämtlichen überhaupt möglichen krystallographischen Bewegungsgruppen der Ebene aufgestellt und dabei gefunden, daß es nur fünf solche Gruppen gibt. Die allgemeinsten Punkt- und Zeigersysteme erhalten wir, wenn wir in jeder Gruppe von einem Punkt allgemeiner Lage ausgehen. Denn die Punktsysteme aus Drehpunkten der komplizierteren Gruppen kehren in den Punktsystemen aus Punkten allgemeiner Lage wieder, wenn wir einfachere Gruppen zugrunde legen. Dagegen liefern die Zeigersysteme bei den Drehpunkten neuartige Figuren.

Zugleich haben wir die Lösung eines mit dem vorigen verwandten Problems gefunden, nämlich auf welche verschiedenen Arten man die Ebene aus kongruenten endlichen Bereichen derart zusammensetzen kann, daß der ganze Aufbau durch eine Deckbewegung in sich übergeführt werden kann, und daß jeder Baustein durch eine Deckbewegung mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann. Die Gruppe dieser Deckbewegungen muß eine diskontinuierliche sein, und zwar eine krystallographische, weil die Anzahl der Bausteine innerhalb eines Kreises mit dem Quadrat des Radius ins Unendliche wächst. Es gibt daher nur zwei Möglichkeiten. Entweder läßt keine von der Identität verschiedene Deckbewegung einen Baustein ungeändert; dann muß der Baustein einen Fundamentalbereich bilden. Oder es gibt Bausteine, die durch eine Deckbewegung in sich übergehen; dann bildet die Gesamtheit der Deckbewegungen dieser Art eine diskontinuierliche Untergruppe, die ersichtlich keine Translationen enthält, also aus Drehungen um einen bestimmten Punkt bestehen muß (*I*, *2*, *α*). In diesem Fall hat der Baustein zentrale Symmetrie und muß sich aus Fundamentalbereichen zusammensetzen lassen. Ein Beispiel für diesen Fall liefert der Aufbau der Ebene aus kongruenten regulären Sechsecken oder Quadraten, der bei vielen Fußböden verwandt wird.

Ein anderes und schwierigeres Problem ist das „Parkettierungsproblem“; es erfordert, die Ebene aus endlichen kongruenten Bausteinen zusammenzusetzen, dagegen wird nicht verlangt, daß der Bau Deckbewegungen gestattet.

§ 13. Die krystallographischen Klassen und Gruppen räumlicher Bewegungen. Gruppen und Punktsysteme mit spiegelbildlicher Symmetrie.

Auch im Raum gibt es nur endlich viele krystallographische Bewegungsgruppen; ihre Anzahl ist aber weit größer als in der Ebene. Um diese Gruppen bestimmen zu können, muß man, wie in der Ebene, zunächst die einzelnen Bewegungen geometrisch kennzeichnen. Man kann auch im Raum jede beliebige Bewegung durch eine Bewegung von bestimmtem einfachen Typus ersetzen. Betrachtet man zunächst Bewegungen, die einen Punkt fest lassen, so läßt sich beweisen, daß dann auch eine durch diesen Punkt gehende Gerade Punkt für Punkt fest bleiben muß und daß die Bewegung durch eine Drehung um einen bestimmten Winkel um diese Gerade als Achse ersetzt werden kann. Räumliche Bewegungen, die keinen Punkt fest lassen, sind z. B. die Translationen.

Man kann nun zeigen, daß jede beliebige Bewegung des Raumes sich aus einer bestimmten Drehung und einer bestimmten Translation in der Richtung der Drehungsachse zusammensetzen läßt; man kann auch die Drehungen und Translationen selbst als solche zusammengesetzte Bewegungen ansehen, indem man annimmt, daß der eine Bestandteil der Bewegung sich auf die Identität reduziert. Denkt man sich nun bei der allgemeinsten Bewegung die Drehung und die Translation zu gleicher Zeit und mit konstanter Geschwindigkeit ausgeführt, so erhält man eine schraubenförmige Fortbewegung des Raumes. Die allgemeinste Bewegung des Raumes wird deshalb als Schraubung bezeichnet, wobei man die Translationen und Drehungen als Grenzfälle von Schraubungen auffassen kann. Bei manchen Problemen ist es übrigens auch zweckmäßig, die Translationen ähnlich wie im Fall der Ebene als Drehungen mit verschwindend kleinem Drehwinkel um eine unendlich ferne Achse anzusehen.

Bei der Zusammensetzung zweier Schraubungen im Raum gilt kein so einfaches allgemeines Gesetz, wie es in der Ebene der Additionssatz der Winkel bei Zusammensetzung von Drehungen darstellt. Es gibt aber zwei speziellere Sätze, die für die Zwecke der räumlichen Krystallographie ausreichen; zunächst ergeben nämlich zwei Translationen zusammengesetzt stets wieder eine Translation, und zweitens unterscheiden sich Schraubungen um parallele Achsen und gleiche Drehungswinkel nur um eine Translation. Als Drehungswinkel einer Schraubung ist dabei der Winkel der Drehung anzusehen, die den einen Bestandteil der Schraubung bildet.

Nach dem ersten Gesetz bilden die in einer räumlichen Bewegungsgruppe enthaltenen Translationen stets eine Untergruppe. Wie in der Ebene ist die Struktur dieser Untergruppe maßgebend dafür, ob eine diskontinuierliche räumliche Bewegungsgruppe krystallographisch ist, d. h. auf ein räumliches Punktsystem führt, oder nicht. Sind nämlich alle Translationen der Gruppe einer festen Ebene parallel, so besitzt die Gruppe stets unendliche Fundamentalbereiche und kann auf kein Punktsystem führen. Besitzt dagegen die Gruppe drei Translationen, deren Richtungen nicht sämtlich einer und derselben Ebene parallel sind, so ist sie eine krystallographische Gruppe. Die zu einem Punkt P äquivalenten Punkte bezüglich der Untergruppe der Translationen bilden dann stets ein räumliches Punktgitter. Wenn es außerdem in der Gruppe noch eine Schraubung gibt, die P in einen dem Gitter nicht angehörenden Punkt Q überführt, so bestimmt die Untergruppe der Translationen auch zu Q ein Gitter aus lauter zu Q und P äquivalenten Punkten. Wegen der Diskontinuität der Gruppe kann es nur endlich viele solche Gitter geben; diese Einschränkung führt wie in der Ebene zur Übersicht aller möglichen Fälle. Zugleich ergibt sich, daß die regulären Punktsysteme im Raum sich aus endlich vielen kongruenten parallel ineinandergeschobenen räumlichen Punktgittern zusammensetzen lassen. Ein Beispiel dafür haben wir im System der Kugelmittelpunkte bei der tetraedrischen Lagerung schon kennengelernt.

Der zweite erwähnte Satz über die Schraubungen mit parallelen Achsen führt nun zu einem wichtigen geometrischen Verfahren, um die von einer Translation verschiedenen Bewegungen einer Gruppe zusammenzufassen. Zu diesem Zweck zeichne ich irgendeinen beliebigen Raumpunkt M aus. Zur Achse a jeder in der Gruppe vorkommenden Schraubung ziehe ich durch M die Parallele a_0, und jeder in der Gruppe vorkommenden Schraubung s um die Achse a ordne ich die Drehung s_0 um die Achse a_0 zu, die denselben Drehwinkel besitzt wie s. Dann können sich s und s_0 nur durch eine Translation unterscheiden. Nach diesem Verfahren entspricht jeder von einer Translation verschiedenen Bewegung der Gruppe G eine andere Bewegung, die den Punkt M fest läßt. Um die Zuordnung zu vervollständigen, lasse ich ferner allen Translationen aus G die Identität entsprechen. Auf diese Weise ist der Gruppe G ein System G_M von Abbildungen zugeordnet, die sämtlich M fest lassen. Ich behaupte, daß G_M eine Gruppe ist. Sind nämlich die Drehungen s_0 und t_0 aus G_M den Schraubungen s und t aus G zugeordnet, so läßt sich aus dem Gesetz über Schraubungen um parallele Achsen leicht schließen, daß $s_0 t_0$ gerade diejenige Drehung aus G_M ist, die st zugeordnet werden muß. Daher erfüllt das System G_M in der Tat die beiden Gruppenpostulate, daß mit s_0 und t_0 stets auch $s_0 t_0$ sowie s_0^{-1} dem System angehören.

Durch die Struktur der Gruppe G_M ist G keineswegs eindeutig bestimmt; man kann aus der Struktur von G_M nichts über die in G enthaltenen Translationen schließen, z. B. allen Gruppen G, die nur aus Translationen bestehen, entspricht eine und dieselbe Gruppe G_M, die nur aus der Identität besteht. G_M liefert also eine Zusammenfassung von Gruppen, die sich nur durch ihre Translationen unterscheiden. Man nennt die Gesamtheit aller räumlichen Bewegungsgruppen, die auf eine und dieselbe Gruppe G_M führen, eine *Klasse räumlicher Bewegungsgruppen.* Wenn einer Klasse eine krystallographische Gruppe angehört, nennt man diese Klasse eine *krystallographische Klasse.* Dieser Begriff ist sowohl für die praktische Krystallographie als auch für die geometrische Bestimmung der Raumgruppen von großer Bedeutung.

Es ist nämlich viel leichter, zuerst alle möglichen krystallographischen Klassen aufzustellen und erst nachher für jede Klasse zu untersuchen, was für Gruppen ihr angehören können.

Da alle Bewegungen aus G_M den Punkt M fest lassen, führen sie auch die Oberfläche einer um M als Mittelpunkt geschlagenen Kugel in sich über, und man kann daher die Gruppen G_M als Bewegungsgruppen der Kugeloberfläche ansehen. Es tritt nun die große Vereinfachung ein, daß G_M stets diskontinuierlich sein muß, wenn G diskontinuierlich ist. Da die Diskontinuität von G etwas ganz anderes bedeutet als die Diskontinuität von G_M, so ist der genannte Satz keineswegs selbstverständlich. Er läßt sich aber bei den krystallographischen Gruppen leicht beweisen, indem man die zugehörigen Translationsgitter in Betracht zieht. Dieser Beweis soll hier übergangen werden.

Um alle krystallographischen Klassen von räumlichen Bewegungsgruppen zu finden, haben wir demnach nur noch die diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der Kugel zu untersuchen. Es tritt aber noch eine zweite Vereinfachung ein. Wie in der Ebene, so kann man auch im Raum schließen, daß in einer krystallographischen Bewegungsgruppe keine anderen Drehwinkel vorkommen können als die Vielfachen von π, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$. Wie es also in der Ebene nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Drehpunkte in den Gruppen gibt, so kann es (bei analoger Bezeichnungsweise) in den räumlichen krystallographischen Bewegungsgruppen nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Achsen geben. Das gleiche muß aber auch für die Gruppen G_M der krystallographischen Klassen gelten. Nach dieser Einschränkung bleiben nur elf Krystallklassen übrig; sie mögen hier aufgezählt werden.

Wir nehmen zunächst die Fälle, daß nur eine einzige n-zählige Achse in G_M vorhanden ist. Diese Klassen werden in der Krystallographie mit C_n bezeichnet. Wir haben die fünf Klassen (Abb. 91):

1. C_1 (Identität, Klasse der Translationsgruppen),
2. C_2,
3. C_3,
4. C_4,
5. C_6.

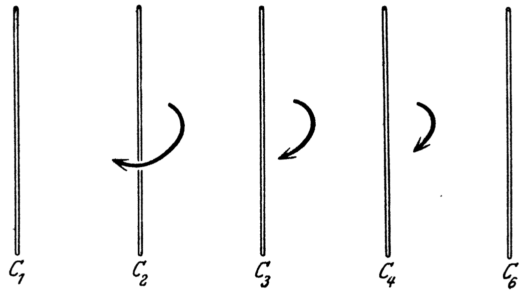

Abb. 91.

Wir nehmen jetzt an, daß mehrere Achsen vorhanden sind, von denen höchstens eine mehr als 2-zählig ist. Diese ausgewählte n-zählige Achse wird als Hauptachse bezeichnet, die 2-zähligen Achsen als Nebenachsen. Dann läßt sich aus den Gruppenpostulaten leicht schließen, daß es genau n Nebenachsen geben muß, und daß sie alle auf der

Hauptachse senkrecht stehen und miteinander gleiche Winkel bilden müssen. Die zugehörigen Gruppen und Klassen werden mit dem Symbol D_n (Dieder) bezeichnet. Es gibt vier solche Klassen (Abb. 92):

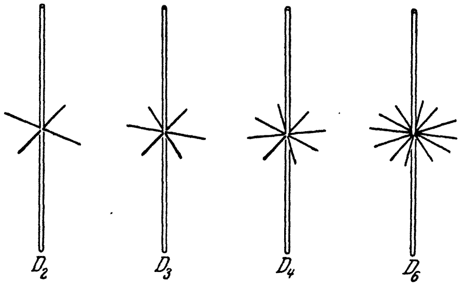

Abb. 92.

6. D_2, (3 gleichberechtigte Achsen).
7. D_3,
8. D_4,
9. D_6.

Man kann übrigens leicht einsehen, daß für $n = 3$ die Nebenachsen alle äquivalent sind, während sie sich in den übrigen Fällen abwechselnd auf zwei Klassen verteilen.

Es bleibt nur noch die Möglichkeit, daß es mehrere Achsen gibt, die mehr als 2-zählig sind. Eine nähere Betrachtung lehrt dann, daß die äquivalenten Punkte auf der Kugel entweder die Ecken eines regulären Tetraeders (T) oder die eines regulären Oktaeders (O) bilden müssen. Aus den Symmetrieeigenschaften dieser Polyeder folgt von selbst die Achsenverteilung; man erhält alle Achsen, indem man die Ecken, die Mittelpunkte der Flächen und die Mittelpunkte der Kanten mit dem Kugelmittelpunkt verbindet. Auf diese Weise liefert das Tetraeder die Klasse

10. T (Abb. 93).

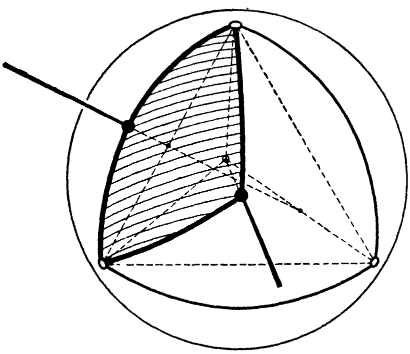

Abb. 93.

Verbindet man im Tetraeder den Kugelmittelpunkt mit einer Ecke, so geht diese Gerade auch durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche. Da diese ein gleichseitiges Dreieck ist und andererseits in jeder Ecke drei Flächen zusammenstoßen, erhalten wir *vier 3-zählige Achsen*. Verbinden wir ferner die sechs Kantenmitten des Tetraeders mit dem Kugelmittelpunkt, so erhalten wir nicht sechs, sondern nur drei Geraden, da sich die Mittelpunkte der Kanten paarweise diametral gegenüberliegen. Diese Achsen können, wenn das Tetraeder in sich übergehen soll, nur 2-zählig sein. Die Klasse T besitzt somit *drei 2-zählige Achsen*, die übrigens paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Um einen Fundamentalbereich auf der Kugel zu erhalten, können wir von einem sphärischen Dreieck ausgehen, das einer Fläche des Tetraeders entspricht. Ein solches Dreieck ist noch kein Fundamentalbereich, da es durch Drehung um eine 3-zählige Achse in sich selbst übergeht. Dagegen läßt sich das Dreieck offenbar aus drei Fundamentalbereichen aufbauen (Abb. 93).

Die Untersuchung der letzten Klasse,

11. O (Abb. 94),

verläuft analog. Die sechs Ecken des Oktaeders liegen einander paarweise gegenüber, und in jeder Ecke stoßen vier Flächen zusammen. Wir erhalten also *drei 4-zählige Achsen*. Ebenso liegen die acht Flächen des Oktaeders einander paarweise gegenüber; da sie sämtlich gleichseitige Dreiecke sind, liefern sie *vier 3-zählige Achsen*. Da endlich das Oktaeder zwölf Kanten besitzt und da diese einander paarweise gegenüberliegen, gibt es in der Klasse O *sechs 2-zählige Achsen*. Als Fundamentalbereich können wir wieder den dritten Teil eines sphärischen Dreiecks verwenden, das einer Oktaederfläche entspricht (Abb. 94).

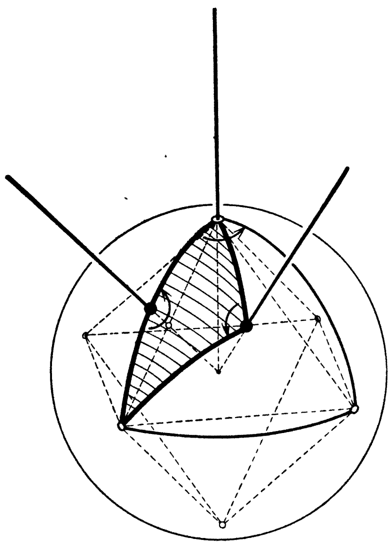

Abb. 94.

Die elf Klassen, die wir aufgestellt haben, führen zu insgesamt fünfundsechzig räumlichen krystallographischen Bewegungsgruppen. Die Übersicht über diese vielen Gruppen wird also durch die Einteilung in Klassen außerordentlich erleichtert. Man kann nun den Klassenbegriff auch schon in der Ebene in genau derselben Weise einführen. Dann erhält man diskontinuierliche Bewegungsgruppen der Kreisperipherie, und zwar sind das einfach die Identität und die Drehungen um Vielfache von π, $2\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/3$. Wir haben also nur fünf Klassen und in jeder Klasse nur eine krystallographische Bewegungsgruppe; bei den ebenen krystallographischen Bewegungsgruppen bringt demnach die Klasseneinteilung noch keinen Vorteil.

Wie in der Ebene, so führen auch im Raum die krystallographischen Bewegungsgruppen zu Punktsystemen, und sie stehen ferner im Zusammenhang mit dem Problem, den Raum aus kongruenten endlichen Bausteinen aufzubauen, so daß der Bau Deckbewegungen gestattet, die jeden Stein in jeden anderen überführen können. Dieses Problem ist noch nicht gelöst.

Für die Krystallchemie ist es zweckmäßig, neben den Punktsystemen auch Zeigersysteme zu betrachten. Im Raum kommt man aber nicht mit einem einzigen Zeiger aus, da diese Figur noch um die Zeigerrichtung drehbar ist. Eine Figur mit vollbestimmter Orientierung erhält man erst, wenn man einen Punkt mit zwei Zeigern verschiedener Länge und Richtung ausstattet.

Vergleicht man nun die empirisch bestimmten Krystallstrukturen mit dem geometrisch bestimmten Vorrat aller Zeigersysteme, so ergibt sich das überraschende Resultat, daß die Natur nicht nur diesen geometrischen Vorrat vollständig verbraucht, sondern daß es sogar noch viele Krystallstrukturen gibt, die durch unseren Begriff des regulären Punktsystems nicht erfaßt werden, obwohl alle Elemente gleichberechtigt sind. Wir haben nämlich in der dritten definierenden Eigenschaft der Punktsysteme die Gleichberechtigung aller Punkte dadurch gekennzeichnet, daß jeder Punkt des Systems in jeden anderen durch eine *Deckbewegung* überführbar sein soll. Man kommt zu einem allgemeineren Begriff des Punktsystems, wenn man unter den Decktransformationen des Systems auch *Spiegelungen* zuläßt; Spiegelungen der Ebene an einer ihrer Geraden und Spiegelungen des Raumes an einer seiner Ebenen. Auch diese allgemeineren Transformationen lassen alle Längen und Winkel ungeändert. Nur bewirken sie eine Vertauschung von rechts und links, und die Raumspiegelungen können nicht aus der Ausgangslage durch stetige Bewegung erzeugt werden. Faßt man alle Abbildungen des Raumes, die die Längen und Winkel ungeändert lassen, unter dem Namen Decktransformationen zusammen, so erhält man in den diskontinuierlichen Gruppen von Decktransformationen eine Gesamtheit, die die diskontinuierlichen Bewegungsgruppen mit umfaßt, aber noch zahlreiche weitere Gruppen enthält. Auch diese allgemeineren Gruppen sind vollständig bestimmt worden. Ihre Übersicht wird dadurch erleichtert, daß in jeder von ihnen die in ihr vorkommenden Bewegungen eine Untergruppe bilden, also eine Gruppe, deren Typus durch unsere früheren Betrachtungen bestimmbar ist. Ebenso läßt sich in der Ebene und im Raum die Einteilung in Klassen auf die Gruppen mit Spiegelungen übertragen. So wie die Schraubungen um parallele Achsen und gleiche Winkel unterscheiden sich nämlich auch die Spiegelungen an parallenen Ebenen bzw. Geraden nur durch eine Translation. Über die Gesamtheit von Klassen und Gruppen, die man auf diese Weise erhält, gibt die folgende kleine Tabelle eine Übersicht.

	Ebene		Raum	
	Krystallographische Gruppen	Krystallographische Klassen	Krystallographische Gruppen	Krystallographische Klassen
Bewegungen	5	5	65	11
Durch Spiegelung dazu . . .	12	5	165	21
Im ganzen	17	10	230	32

Erst die Hinzunahme der Spiegelungen liefert wirklich die vollständige Mannigfaltigkeit der in der Natur vorkommenden Krystallstrukturen. Geht man zu den Zeigersystemen über, so hat man in der Ebene und im Raum jeweils noch einen Zeiger hinzuzufügen; denn ein Zeiger in der Ebene gestattet noch eine Spiegelung an der Geraden, die den Zeiger enthält, und ebenso läßt im Raum die Figur aus zwei Zeigern verschiedener Länge noch eine Spiegelung an der Ebene der Zeiger zu. Im Raum hat man also drei Zeiger verschiedener Länge zugrunde zu legen, die von einem Punkt ausgehen und nicht in einer und derselben Ebene liegen.

Man kann die diskontinuierlichen Gruppen von Decktransformationen nicht nur geometrisch, sondern auch auf arithmetisch-algebraischem Wege bestimmen. Man wird dann im Fall der Ebene auf merkwürdige Relationen zwischen komplexen Zahlen geführt; im Raum hat man hyperkomplexe Zahlensysteme zugrunde zu legen.

Es wäre eine interessante Aufgabe, die hier angestellten Überlegungen auch auf mehrdimensionale Räume auszudehnen. Für die diskontinuierlichen Deckgruppen der mehrdimensionalen Kugeln liegen einige Ergebnisse vor, da man die Analoga der regulären Polyeder in den Räumen beliebiger Dimensionszahlen kennt; mit diesen mehrdimensionalen Gebilden werden wir uns noch im nächsten Kapitel beschäftigen. Ferner hat Bieberbach bewiesen, daß es für jedes n nur endlich viele diskontinuierliche krystallographische n-dimensionale Gruppen gibt, und daß in jeder solchen Gruppe n linear unabhängige Translationen vorkommen.

§ 14. Die regulären Polyeder.

Bei der Aufstellung der krystallographischen Klassen sind wir auf das reguläre Tetraeder und Oktaeder geführt worden. Wir wollen jetzt eine allgemeine Definition des regulären Polyeders geben und feststellen, welche weiteren regulären Polyeder außer dem Tetraeder und dem Oktaeder noch möglich sind.

Wir werden von einem regulären Polyeder verlangen, daß alle seine Ecken, alle seine Kanten und alle seine Flächen unter sich gleichberechtigt sind. Ferner wollen wir fordern, daß sämtliche Flächen reguläre Polygone sind.

Ein solches Polyeder muß zunächst frei von einspringenden Ecken und einspringenden Kanten sein. Denn da nicht alle Ecken und nicht alle Kanten einspringend sein können, so wären nicht alle Ecken oder nicht alle Kanten gleichberechtigt, wenn einspringende Ecken oder Kanten vorkämen. Daraus folgt, daß die Summe der Polygonwinkel, die in einer Ecke zusammenstoßen, kleiner sein muß als 2π. Denn sonst würden alle diese Polygone in eine Ebene fallen, oder es müßten einspringende Kanten von dieser Ecke auslaufen. Da ferner mindestens drei Polygone in einer Ecke zusammenstoßen müssen und da aus der Regularität die Gleichheit sämtlicher Polygonwinkel folgt, so müssen