Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0024

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343 strukturen. Geht man zu den Zeigersystemen über, so hat man in der Ebene und im Raum jeweils noch einen Zeiger hinzuzufügen; denn ein Zeiger in der Ebene gestattet noch eine Spiegelung an der Geraden, die den Zeiger enthält, und ebenso läßt im Raum die Figur aus zwei Zeigern verschiedener Länge noch eine Spiegelung an der Ebene der Zeiger zu. Im Raum hat man also drei Zeiger verschiedener Länge zugrunde zu legen, die von einem Punkt ausgehen und nicht in einer und derselben Ebene liegen.

Man kann die diskontinuierlichen Gruppen von Decktransformationen nicht nur geometrisch, sondern auch auf arithmetisch-algebraischem Wege bestimmen. Man wird dann im Fall der Ebene auf merkwürdige Relationen zwischen komplexen Zahlen geführt; im Raum hat man hyperkomplexe Zahlensysteme zugrunde zu legen.

Es wäre eine interessante Aufgabe, die hier angestellten Überlegungen auch auf mehrdimensionale Räume auszudehnen. Für die diskontinuierlichen Deckgruppen der mehrdimensionalen Kugeln liegen einige Ergebnisse vor, da man die Analoga der regulären Polyeder in den Räumen beliebiger Dimensionszahlen kennt; mit diesen mehrdimensionalen Gebilden werden wir uns noch im nächsten Kapitel beschäftigen. Ferner hat Bieberbach bewiesen, daß es für jedes n nur endlich viele diskontinuierliche krystallographische n-dimensionale Gruppen gibt, und daß in jeder solchen Gruppe n linear unabhängige Translationen vorkommen.

§ 14. Die regulären Polyeder.

Bei der Aufstellung der krystallographischen Klassen sind wir auf das reguläre Tetraeder und Oktaeder geführt worden. Wir wollen jetzt eine allgemeine Definition des regulären Polyeders geben und feststellen, welche weiteren regulären Polyeder außer dem Tetraeder und dem Oktaeder noch möglich sind.

Wir werden von einem regulären Polyeder verlangen, daß alle seine Ecken, alle seine Kanten und alle seine Flächen unter sich gleichberechtigt sind. Ferner wollen wir fordern, daß sämtliche Flächen reguläre Polygone sind.

Ein solches Polyeder muß zunächst frei von einspringenden Ecken und einspringenden Kanten sein. Denn da nicht alle Ecken und nicht alle Kanten einspringend sein können, so wären nicht alle Ecken oder nicht alle Kanten gleichberechtigt, wenn einspringende Ecken oder Kanten vorkämen. Daraus folgt, daß die Summe der Polygonwinkel, die in einer Ecke zusammenstoßen, kleiner sein muß als 2π. Denn sonst würden alle diese Polygone in eine Ebene fallen, oder es müßten einspringende Kanten von dieser Ecke auslaufen. Da ferner mindestens drei Polygone in einer Ecke zusammenstoßen müssen und da aus der Regularität die Gleichheit sämtlicher Polygonwinkel folgt, so müssen alle diese Winkel einen kleineren Wert haben als $2\pi/3$. Nun ist aber der Winkel im regulären Sechseck gerade $2\pi/3$, und bei wachsendem n wird der Winkel im regulären n-Eck immer größer. Also kommen nur reguläre Drei-, Vier- und Fünfecke als Grenzflächen eines regulären Polyeders in Frage. Da das reguläre Viereck, das Quadrat, lauter rechte Winkel hat, können nicht mehr als drei Quadrate in einer Ecke zusammenstoßen, ohne daß die Winkelsumme 2π erreicht; erst recht können nicht mehr als drei Fünfecke aneinanderstoßen. Nun ist die Gestalt eines regulären Polyeders vollständig bestimmt, wenn man die Anzahl der in einer Ecke zusammenstoßenden Flächen und deren Eckenzahl kennt. Demnach kann es höchstens je ein reguläres Polyeder geben, das von Quadraten oder von regulären Fünfecken begrenzt wird. Dagegen können drei, vier oder fünf gleichseitige Dreiecke in einer Ecke D zusammenstoßen, da erst sechs Dreiecke die Winkelsumme 2π ergeben. Das gleichseitige Dreieck kann also bei drei verschiedenen Polyedern als Grenzfläche auftreten, und wir haben insgesamt fünf Möglichkeiten für reguläre Polyeder gefunden. Diese Möglichkeiten lassen sich nun auch alle verwirklichen. Schon PLATO hat alle fünf regulären Polyeder gekannt und ihnen in seiner Ideenlehre große Bedeutung zugeschrieben. Sie werden deshalb auch die platonischen Körper genannt. Wir stellen die wichtigsten Angaben über die fünf regulären Polyeder in der folgenden Tabelle zusammen und geben in Abb. 95—99 deren Bilder in Parallelprojektion.

Name des Polyeders	Art der begrenzenden Polygone	Anzahl der			
		Ecken	Kanten	Flächen	in einer Ecke zusammenstoßenden Flächen
Tetraeder (Abb. 95)	Dreieck	4	6	4	3
Oktaeder (Abb. 96)	,,	6	12	8	4
Ikosaeder (Abb. 97)	,,	12	30	20	5
Würfel (Hexaeder) (Abb. 98)	Viereck	8	12	6	3
Dodekaeder (Abb. 99) . . .	Fünfeck	20	30	12	3

Die regulären Polyeder stehen alle zur Kugel in einer ähnlichen Beziehung, wie wir für das Tetraeder und das Oktaeder schon im vorigen Paragraphen angegeben haben. Sie lassen sich alle in eine Kugel einbeschreiben, und jedes dieser Polyeder führt zu einer diskontinuierlichen Bewegungsgruppe der Kugel, bei der die Ecken des Polyeders ein System äquivalenter Punkte bilden. Wenn wir nun in allen Ecken des Polyeders die Tangentialebenen an die Kugel legen, so müssen diese Ebenen ein zweites Polyeder begrenzen, das bei den Bewegungen der Gruppe ebenfalls in sich selbst übergeht; wir werden erwarten, daß das neugefundene Polyeder ebenfalls regulär ist, und nach dieser Konstruktion müssen einander die fünf Polyeder paarweise entsprechen. Führt man

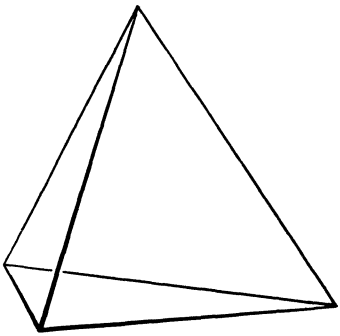

Abb. 95.

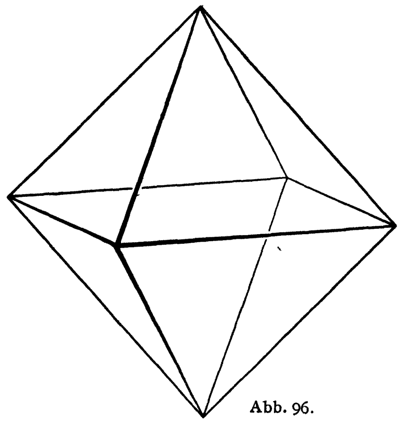

Abb. 96.

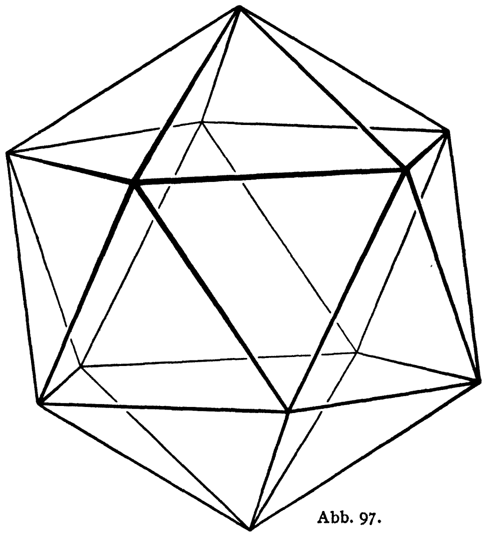

Abb. 97.

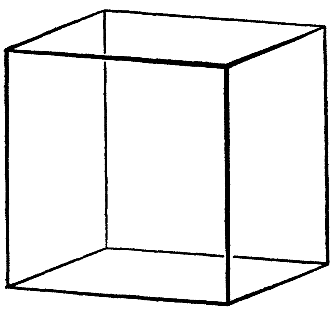

Abb. 98.

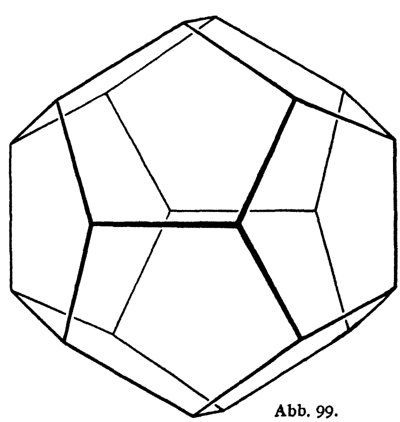

Abb. 99.

die Konstruktion beim Oktaeder durch, so erhält man in der Tat ein reguläres Polyeder, nämlich den Würfel; in Abb. 100 sind die beiden Polyeder in dieser gegenseitigen Lage gezeichnet. Die Gruppe O der Kugel hätten wir daher ebenso wie durch das Oktaeder auch durch den Würfel definieren können. Die gegenseitige Beziehung der beiden Körper kommt in der Tabelle darin zum Ausdruck, daß der eine soviel Ecken hat wie der andere Flächen, daß ferner beide Körper gleich viele Kanten haben und daß endlich in jeder Ecke des einen soviel Flächen zusammenstoßen, wie auf jeder Fläche des anderen Ecken liegen. Man kann daher das Oktaeder auch dem Würfel umbeschreiben (Abb. 101).

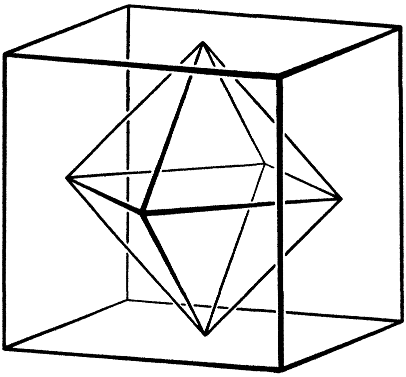

Abb. 100.

Wie die Tabelle zeigt, besteht die analoge Beziehung zwischen dem Dodekaeder und dem Ikosaeder. Beide Körper führen daher auf eine und dieselbe Gruppe der Kugel, die man gewöhnlich als Ikosaedergruppe bezeichnet. Durch die Betrachtungen aus der Krystallographie konnten wir diese Gruppe nicht auffinden, da in ihr die Zahl fünf eine Rolle spielt, während in den krystallographischen Klassen keine 5-zähligen Achsen vorkommen. Beim Tetraeder liefert die Konstruktion keinen anderen regulären Körper, sondern wieder ein Tetraeder.

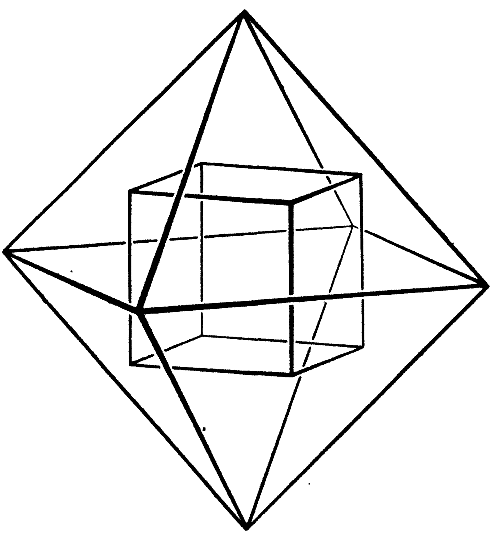

Abb. 101.

Im nächsten Kapitel werden wir im Dualitätsprinzip des Raumes eine allgemeinere Methode kennenlernen, die Punkte, Geraden und Ebenen einer Figur auf die Ebenen, Geraden und Punkte einer zweiten Figur zu beziehen. Nach diesem Prinzip entspricht der Würfel „dual“ dem Oktaeder, das Ikosaeder dem Dodekaeder und das Tetraeder sich selbst.

Eine nähere Betrachtung lehrt, daß die Tetraedergruppe eine Untergruppe der Oktaedergruppe ist; ähnlich hatten wir auch bei den diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der Ebene die einen als Untergruppen anderer erkannt. Die Beziehung zwischen den Gruppen T und O hat die anschauliche Konsequenz, daß ich in einen Würfel ein reguläres Tetraeder einbeschreiben kann, so daß dessen Ecken Würfelecken sind und die Kanten des Tetraeders Diagonalen der Würfelflächen werden. Man kann zwei verschiedene derartige Tetraeder in den Würfel hineinstellen (Abb. 102).

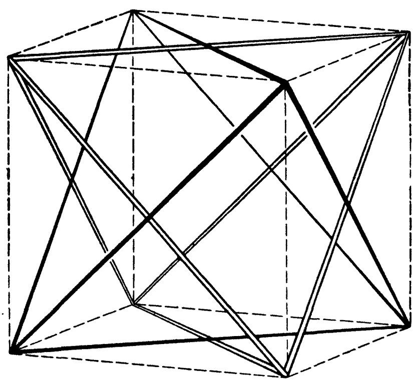

Abb. 102.

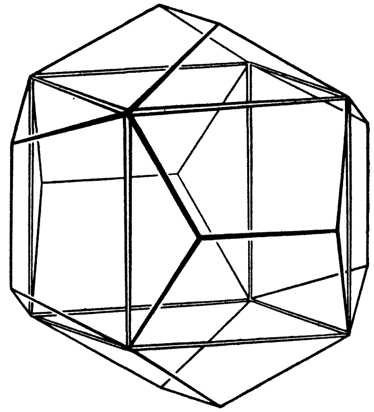

Abb. 103.

Ebenso erweist sich nun die Oktaedergruppe als Untergruppe der Ikosaedergruppe. Aus diesem Grunde kann man einen Würfel in ein Dodekaeder in gleicher Weise hineinstellen wie ein Tetraeder in einen Würfel (Abb. 103). Die nähere Betrachtung zeigt, daß es fünf solche Würfel in jedem Dodekaeder gibt; je eine Kante jedes Würfels liegt auf jeder Fläche des Dodekaeders, und je zwei Würfel stoßen in jeder Ecke zusammen.

Drittes Kapitel.

Konfigurationen.

Wir werden in diesem Kapitel geometrische Tatsachen kennenlernen, zu deren Formulierung und Beweis wir keine Strecken und Winkel auszumessen oder zu vergleichen brauchen. Man könnte meinen, daß sich ohne Längen- und Winkelmessung gar keine wesentlichen Eigenschaften einer Figur mehr bestimmen ließen und nur noch ungenaue Aussagen übrigblieben. In der Tat hat man lange Zeit nur die metrische Seite der Geometrie erforscht. Erst bei der wissenschaftlichen Begrün-