

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0025

LOG Titel: Drittes Kapitel. Konfigurationen.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Eine nähere Betrachtung lehrt, daß die Tetraedergruppe eine Untergruppe der Oktaedergruppe ist; ähnlich hatten wir auch bei den diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der Ebene die einen als Untergruppen anderer erkannt. Die Beziehung zwischen den Gruppen T und O hat die anschauliche Konsequenz, daß ich in einen Würfel ein reguläres Tetraeder einbeschreiben kann, so daß dessen Ecken Würfecken sind und die Kanten des Tetraeders Diagonalen der Würfelflächen werden. Man kann zwei verschiedene derartige Tetraeder in den Würfel hineinstellen (Abb. 102).

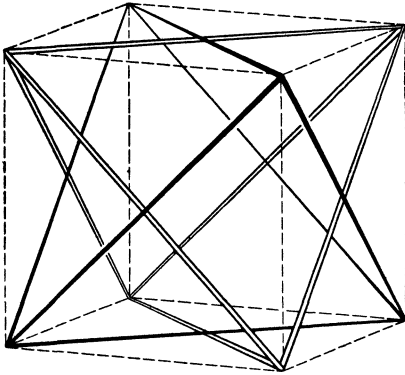


Abb. 102.

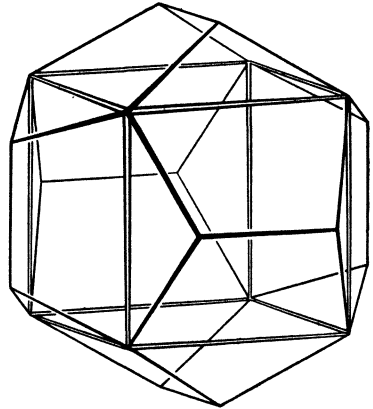


Abb. 103.

Ebenso erweist sich nun die Oktaedergruppe als Untergruppe der Ikosaedergruppe. Aus diesem Grunde kann man einen Würfel in ein Dodekaeder in gleicher Weise hineinstellen wie ein Tetraeder in einen Würfel (Abb. 103). Die nähere Betrachtung zeigt, daß es fünf solche Würfel in jedem Dodekaeder gibt; je eine Kante jedes Würfels liegt auf jeder Fläche des Dodekaeders, und je zwei Würfel stoßen in jeder Ecke zusammen.

Drittes Kapitel.

Konfigurationen.

Wir werden in diesem Kapitel geometrische Tatsachen kennenlernen, zu deren Formulierung und Beweis wir keine Strecken und Winkel auszumessen oder zu vergleichen brauchen. Man könnte meinen, daß sich ohne Längen- und Winkelmessung gar keine wesentlichen Eigenschaften einer Figur mehr bestimmen ließen und nur noch ungenaue Aussagen übrigblieben. In der Tat hat man lange Zeit nur die metrische Seite der Geometrie erforscht. Erst bei der wissenschaftlichen Begrün-

ding der perspektivischen Malerei wurde man auf Fragen von der Art geführt, wie wir sie im folgenden behandeln wollen. Projiziert man nämlich eine ebene Figur von einem Punkt aus in eine andere Ebene, so werden die Längen und Winkel verändert; auch können parallele Geraden in nichtparallele Geraden übergehen. Trotzdem müssen wesentliche Eigenschaften der Figur erhalten bleiben, da wir die Projektion sonst nicht als richtiges Bild empfinden würden.

So führte das Verfahren des Projizierens zu einer neuen Theorie, die ihres Ursprungs wegen projektive Geometrie genannt wurde. Seit dem 19. Jahrhundert nimmt die projektive Geometrie eine zentrale Stellung in der geometrischen Forschung ein. Es gelang durch die Einführung der homogenen Koordinaten, die Sätze der projektiven Geometrie auf algebraische Gleichungen zurückzuführen, ähnlich wie das die cartesischen Koordinaten für die Sätze der Metrik leisten. Die analytische projektive Geometrie ist aber vor der metrischen durch weit größere Symmetrie und Allgemeinheit ausgezeichnet, und wenn man umgekehrt höhere algebraische Beziehungen geometrisch deuten will, so bringt man sie gewöhnlich in homogene Form und deutet die Veränderlichen als homogene Koordinaten, weil die metrische Deutung in einem cartesischen System zu unübersichtlich würde. Man kann sogar die Metrik als einen speziellen Teil der projektiven Geometrie auffassen.

Die elementaren Gebilde der projektiven Geometrie sind die Punkte, die Geraden und die Ebenen. Die elementaren Aussagen der projektiven Geometrie betreffen die einfachste mögliche Beziehung zwischen diesen drei Gebilden, nämlich ihre vereinigte Lage oder *Incidenz*. Unter Incidenz faßt man die folgenden Relationen zusammen: Ein Punkt liegt auf einer Geraden, ein Punkt liegt in einer Ebene, eine Gerade liegt in einer Ebene. Äquivalent damit sind offenbar die drei Aussagen, daß eine Gerade durch einen Punkt geht, daß eine Ebene durch einen Punkt geht und daß eine Ebene durch eine Gerade geht. Um nun diese drei Paare von Aussagen auf eine symmetrische Form zu bringen, hat man den Begriff der Incidenz eingeführt: Eine Gerade ist incident mit einem Punkt, eine Ebene ist incident mit einem Punkt, eine Ebene ist incident mit einer Geraden.

Die Aussagen über Incidenz sind die bei weitem wichtigsten der projektiven Geometrie. Es werden jedoch noch zwei weitere Grundvorstellungen verwendet, die sich nicht aus dem Incidenzbegriff ableiten lassen. So muß man zwei verschiedene Arten unterscheiden, wie vier Punkte auf einer Geraden angeordnet werden können; ferner braucht man den Begriff der Stetigkeit, durch den die Gesamtheit aller Punkte einer Geraden mit der Gesamtheit aller Zahlen verknüpft wird. Mit dieser Aufzählung sind die Grundbegriffe der projektiven Geometrie erschöpft.

Wir wollen ein besonders instruktives Teilgebiet der projektiven Geometrie betrachten: die Konfigurationen. Dabei werden sich auch Ausblicke auf verschiedene andere geometrische Fragen eröffnen. Es sei erwähnt, daß eine Zeitlang die Konfigurationen als das wichtigste Gebiet der ganzen Geometrie angesehen wurden¹.

§ 15. Vorbemerkungen über ebene Konfigurationen.

Eine ebene Konfiguration ist ein System von p Punkten und g Geraden, die in einer Ebene derart liegen, daß jeder Punkt des Systems mit der gleichen Anzahl γ von Geraden des Systems incident ist und daß ebenso jede Gerade des Systems mit der gleichen Anzahl π von Punkten des Systems inciidiert. Eine solche Konfiguration wird mit dem Symbol $(p_\gamma g_\pi)$ bezeichnet. Die vier Zahlen p, g, π, γ sind nicht ganz willkürlich. Nach unserer Forderung gehen nämlich durch alle p Punkte insgesamt γp Geraden des Systems. Hierbei wird jede Gerade π mal gezählt, da sie ja durch π Punkte geht. Die Anzahl g der Geraden ist somit gleich $\gamma p / \pi$. Wir sehen also, daß für jede Konfiguration die Beziehung bestehen muß:

$$p\gamma = g\pi.$$

Ein Punkt und eine hindurchgehende Gerade bilden die einfachste Konfiguration, ihr Symbol ist $(1_1 1_1)$. Das Dreieck ist die nächste einfache Konfiguration $(3_2 3_2)$. Ziehen wir in der Ebene vier Geraden, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen, so erhalten wir sechs Schnittpunkte $ABCDEF$ (Abb. 104). Die bekannte Figur des vollständigen Vierseits, die sich so ergibt, ist also eine Konfiguration $(6_2 4_3)$. Die Gleichung $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$ bestätigt unsere allgemeine Formel. Bei dieser Konfiguration sind im Gegensatz zu den ersten beiden trivialen Fällen nicht alle Verbindungsgeraden von Konfigurationspunkten auch Konfigurationsgeraden; ebenso brauchen im allgemeinen nicht alle Schnittpunkte von Konfigurationsgeraden auch Konfigurationspunkte zu sein.

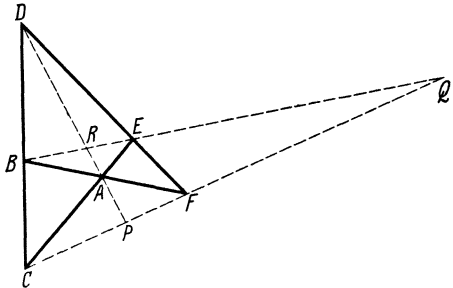


Abb. 104.

Um alle Verbindungsgeraden von Konfigurationspunkten in Abb. 104 zu erhalten, haben wir noch die drei Diagonalen AD, BE, CF zu ziehen. Dabei treten die Ecken PQR des Diagonaldreiecks als neue Schnittpunkte auf. Es wäre denkbar, daß man durch Ziehen weiterer Verbindungsgeraden weitere Schnittpunkte erhält.

¹ Eine ausführliche Darstellung dieses Gebiets gibt das Buch von F. LEVI, Geometrische Konfigurationen (Leipzig 1929).

dungsgeraden und Hinzufügen weiterer Schnittpunkte zu einer Konfiguration käme, bei der analog wie beim Dreieck die Verbindungsgeraden zweier Konfigurationspunkte stets Konfigurationsgeraden und die Schnittpunkte zweier Konfigurationsgeraden stets Konfigurationspunkte sind. Es läßt sich aber zeigen, daß außer dem Dreieck eine solche Konfiguration überhaupt nicht existiert. Wenn wir im Vierseit unbegrenzt Verbindungsgeraden ziehen und die neuentstehenden Schnittpunkte hinzurechnen, so läßt sich sogar zeigen, daß schließlich in beliebiger Nähe jedes Punktes der Ebene solche Schnittpunkte zu liegen kommen. Man nennt die so entstehende Figur ein MÖBIUSSCHES NETZ. Man kann sie zur Definition der projektiven Koordinaten verwenden.

Späterer Anwendung wegen erinnern wir an die Bedeutung des Vierseits für die Konstruktion harmonischer Punkte. Vier Punkte

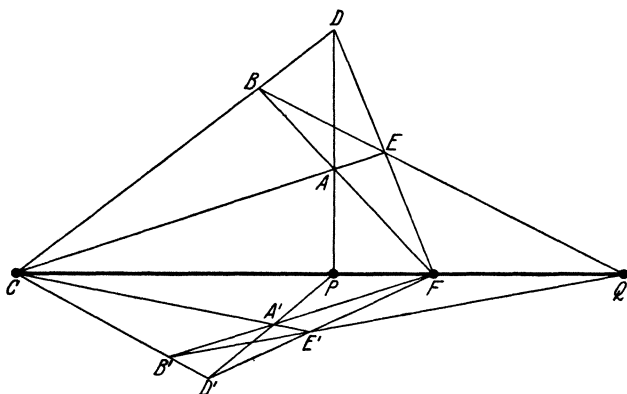


Abb. 105.

$CPFQ$ einer Geraden heißen harmonisch, oder Q heißt der vierte harmonische Punkt zu CPF , wenn sich ein Vierseit konstruieren läßt, in dem diese Punkte durch dieselben Incidenzen bestimmt sind wie in Abb. 104. Es ist ein wegen seiner Einfachheit grundlegender Satz der projektiven Geometrie, daß es zu drei Punkten einer Geraden stets genau einen vierten harmonischen gibt. Wenn man also wie in Abb. 105 die Punkte CPF in zweierlei verschiedenen Weisen zu Vierseiten ergänzt, so müssen nach diesem Satz¹ beide Konstruktionen auf denselben Punkt Q führen.

Wir wollen im folgenden hauptsächlich diejenigen Konfigurationen betrachten, bei denen ebenso viele Punkte vorkommen wie Geraden, für die also gilt: $p = g$. Wegen der Relation $p\gamma = \pi g$ ist dann auch $\gamma = \pi$, so daß die symbolische Bezeichnung der Konfiguration stets die Form $(p_\gamma p_\gamma)$ hat. Wir wollen dafür die kürzere Bezeichnung (p_γ) ein-

¹ Er ist eine unmittelbare Folge des in § 19 besprochenen DESARGUESCHEN Satzes.

führen. Wir wollen ferner stets die naheliegende Forderung stellen, daß die Konfiguration zusammenhängend ist und nicht in getrennte Figuren zerlegt werden kann.

Die Fälle $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$ sind von geringer Bedeutung. Für $\gamma = 1$ ergibt sich nur die triviale Konfiguration eines Punktes mit einer hindurchgehenden Geraden. Denn gäbe es mehrere Punkte in einer solchen Konfiguration, so müßte sie zerfallen, da keine Konfigurationsgerade mehr als einen Punkt enthalten darf. Der Fall $\gamma = 2$ wird durch die ebenen geschlossenen Polygone verwirklicht, und da in einer Konfiguration (p_2) durch jeden Punkt zwei Geraden gehen und auf jeder Geraden zwei Punkte liegen sollen, so erkennt man, daß jede Konfiguration (p_2) auch notwendig aus den Ecken und Seiten eines p -Ecks bestehen muß.

Der Fall $\gamma = 3$ führt dagegen zu vielen interessanten Konfigurationen. In diesem Fall muß die Anzahl p der auftretenden Punkte (und Geraden) mindestens sieben betragen. Denn durch einen Punkt der Konfiguration gehen drei Geraden, und auf jeder von ihnen müssen noch zwei weitere Konfigurationspunkte liegen. Wir werden im folgenden nur die Fälle $7 \leq p \leq 10$ ausführlicher behandeln.

§ 16. Die Konfigurationen (7₃) und (8₃).

Um eine Konfiguration (p_γ) aufzustellen, gehen wir am einfachsten folgenden Weg: Wir numerieren die p Punkte mit den Zahlen 1 bis p , und genau so die p Geraden mit den Zahlen (1) bis (p); sodann stellen wir ein rechteckiges Schema von $p\gamma$ Punkten auf, bei welchem in jeder Kolonne die γ Punkte untereinanderstehen sollen, die auf einer Geraden liegen; so ergeben sich p Kolonnen, die den p Geraden entsprechen.

Wir erhalten also für die Konfiguration (7₃) das Schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & p & & \\
 & & & & \overline{\hspace{2cm}} & & \\
 & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \\
 \gamma \left\{ \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Bei der Ausfüllung des Schemas müssen wir folgende drei Forderungen berücksichtigen: Erstens darf jede Kolonne nur verschiedene Ziffern enthalten, da sonst auf einer Geraden weniger als drei Punkte liegen würden; zweitens dürfen zwei Kolonnen nie in zwei Ziffern übereinstimmen, da sonst die betreffenden Geraden zusammenfallen müßten. Schließlich muß jede Ziffer im Ganzen dreimal vorkommen, da durch jeden Punkt drei Geraden hindurchgehen sollen. Diese drei Bedingungen sind jedenfalls notwendig, wenn ein Schema geometrisch realisierbar sein soll. Dagegen sind sie nicht hinreichend, wie wir bald an Beispielen sehen werden. Zur Verwirklichung eines Schemas gehören nämlich noch geo-

metrische oder algebraische Betrachtungen, die sich nicht ohne weiteres auf die arithmetische Aufstellung übertragen lassen. Wenn aber ein Schema überhaupt eine Konfiguration darstellt, so können wir mehrere Änderungen an dem Schema vornehmen, durch welche die Konfiguration nicht beeinflußt wird. So können wir in jeder Kolonne die vertikale Reihenfolge der Ziffern ändern, können die Reihenfolge der Kolonnen vertauschen, was nur einer Umnummerierung der Geraden gleichkommt, und können schließlich auch die Punkte beliebig umnummerieren. Da alle diese Änderungen die Konfiguration nicht beeinflussen, werden wir alle Schemata, die sich nur durch solche Veränderungen unterscheiden, als identisch ansehen.

Von diesem Standpunkt aus läßt sich ein, aber auch nur ein Schema (7_3) aufstellen. Die Punkte, die auf der ersten Geraden liegen, bezeichnen wir mit 1, 2, 3. Durch den Punkt 1 gehen dann noch zwei weitere Geraden, welche die Punkte 2 und 3 nicht mehr enthalten dürfen. Ich bezeichne die auf der zweiten Geraden liegenden Punkte mit 4 und 5, die auf der dritten mit 6 und 7. Damit haben wir alle vorkommenden Punkte numeriert und das Schema bis jetzt folgendermaßen ausgefüllt:

1	1	1
2	4	6
3	5	7

In den folgenden Kolonnen müssen die Ziffern 2 und 3 noch je zweimal, und zwar in verschiedenen Kolonnen vorkommen; wir schreiben sie deshalb in die oberste Reihe:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6
3	5	7

Zur Ausfüllung der acht noch freien Stellen dürfen wir nur noch die Ziffern 4, 5, 6, 7 benutzen, da die Ziffern 1, 2 und 3 schon verbraucht sind. Die Ziffer 4 muß noch zweimal vorkommen. Da sie nicht beide Male unter derselben Ziffer stehen darf, können wir sie an folgende Stellen schreiben:

2	2	3	3
4	.	4	.
.	.	.	.

Jede andere mögliche Anordnung ist von dieser nur unwesentlich verschieden. Ebenso muß 5 noch zweimal auftreten und darf nicht mehr mit 4 untereinanderstehen. Also dürfen wir ansetzen:

2	2	3	3
4	5	4	5
.	.	.	.

An den ersten beiden der vier noch freien Plätze müssen die Ziffern 6 und 7 stehen, da alle übrigen Ziffern verbraucht sind und nicht beide Male die gleiche Ziffer unter derselben Ziffer 2 stehen darf. Da eine Vertauschung der Ziffern 6 und 7 keine wesentliche Änderung wäre, dürfen wir schreiben:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & . & . \end{array}$$

Für die letzten Felder ergibt sich jetzt zwangsläufig die Besetzung 7 6, so daß wir für die Konfiguration (7_3) in der Tat genau eine Möglichkeit erhalten:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

Wie wir schon erwähnten, folgt aus der Existenz dieses Schemas noch nicht, daß es eine Konfiguration (7_3) wirklich gibt. Gerade in unserem Fall stellt sich nun die Unmöglichkeit der Konfiguration heraus. Wenn wir nämlich nach den Methoden der analytischen Geometrie die Gleichungen der Geraden des Schemas aufzustellen suchen, so kommen wir auf ein Gleichungssystem, das einen Widerspruch enthält. Die Unmöglichkeit der Konfiguration läßt sich auch anschaulich einsehen. Ich zeichne zuerst (Abb. 106) die Geraden (1) und (2) des Schemas, nenne ihren Schnittpunkt 1, wie es das Schema vorschreibt, und nehme auf der Geraden (1) die Punkte 2 und 3 und auf der Geraden (2) die Punkte 4 und 5 willkürlich an. Sodann ziehe ich die Geraden (4) und (7), die durch die Punktepaare 24 und 35 festgelegt sind, und habe ihren Schnittpunkt 6 zu nennen. Ebenso sind durch die Punktepaare 25 und 34 die Geraden (5) und (6) und ihr Schnittpunkt 7 bestimmt. Hiermit sind alle Konfigurationspunkte festgelegt. Es zeigt sich nun aber, daß die drei Punkte 1, 6, 7, welche auf der letzten noch fehlenden Geraden (3) liegen sollen, nicht in eine Gerade fallen, so daß ich durch den Schnitt der Geraden (17) und (7) noch einen weiteren Punkt 6' erhalte. Man könnte zunächst meinen, das läge an der ungeeigneten Wahl der Punkte 2, 3, 4, 5. Wir erkennen aber in unserer Figur die harmonische Konstruktion von Abb. 104 wieder. 6' ist also der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten 3, 5, 6, kann daher nach einem elementaren Satz der projektiven Geometrie mit keinem dieser Punkte zusammenfallen.

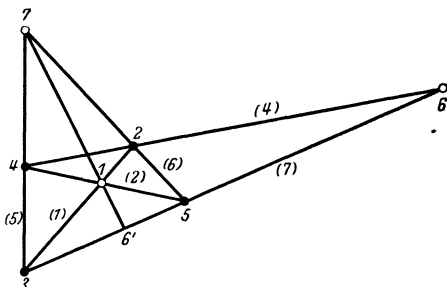


Abb. 106.

Wir wenden uns jetzt zu der Konfiguration (8_3) . Auf demselben Wege wie oben läßt sich zeigen, daß es auch hier im wesentlichen nur ein Schema gibt:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1	2	2	3	3	4
2	4	6	3	7	4	5	5
5	8	7	6	8	7	8	6

Diese Konfiguration kann man sich als zwei Vierecke 1234 und 5678 deuten, die einander zu gleicher Zeit ein- und umbeschrieben sind (Abb. 107). Es liegt nämlich auf der Geraden 12 der Punkt 5, auf 23 der Punkt 6, auf 34 der Punkt 7 und auf 41 der Punkt 8; genau so sind auch die Seiten 56, 67, 78, 85 mit den Punkten 4, 1, 2, 3 incident. Es leuchtet ein, daß eine derartige Konfiguration sich nicht zeichnen läßt.

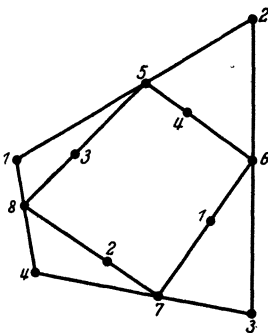


Abb. 107.

Die analytische Betrachtung des Schemas führt auf ein System von Gleichungen, die allerdings nicht wie die Gleichungen der Konfiguration (7_3) einen Widerspruch enthalten, die sich aber nur komplex und niemals rein reell auflösen lassen.

Die Konfiguration ist trotzdem nicht ohne geometrisches Interesse, sondern spielt in der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung ohne Doppelpunkt eine wichtige Rolle. Diese Kurven besitzen neun Wendepunkte, von denen aber höchstens drei reell sein können. Ferner läßt sich algebraisch zeigen, daß jede Gerade, die zwei dieser Wendepunkte verbindet, auch durch einen dritten Wendepunkt gehen muß. Vier Wendepunkte können dagegen nie auf einer Geraden liegen, weil eine Kurve dritter Ordnung von keiner Geraden in mehr als drei Punkten getroffen wird. Die Geraden durch die Wendepunkte bilden nun eine Konfiguration, und zwar ist $p = 9, \pi = 3$. Ferner ist $\gamma = 4$; denn greift man einen Wendepunkt heraus, so müssen die acht übrigen paarweise mit ihm auf einer Geraden liegen, so daß in der Tat durch jeden Punkt vier Geraden gehen. Für g ergibt sich aus der Formel $g = \frac{p\gamma}{\pi}$ der Wert 12. Die Konfiguration ist also vom Typ $(9_4 12_3)$. Sucht man das Schema einer solchen Konfiguration, so ergibt sich bis auf unwesentliche Abänderungen nur eine Möglichkeit:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	1	1	2	2	3	3	4	1	2	5	6
2	4	6	3	7	4	5	5	3	4	7	8
5	8	7	6	8	7	8	6	9	9	9	9

Läßt man nun in dieser Konfiguration den Punkt 9 und die durch ihn gehenden Geraden (9), (10), (11), (12) fort, so bleibt genau unser Schema (8₃) übrig. Ebenso kommt man auf die Konfiguration (8₃), wenn man einen beliebigen anderen der neun Punkte und die vier durchgehenden Geraden fortläßt. Denn alle Punkte der Konfiguration (9₄12₃) erweisen sich als gleichberechtigt.

§ 17. Die Konfigurationen (9₃).

Während wir in den Fällen $p = 7$ und $p = 8$ nur je ein Konfigurationsschema erhalten haben und eine reelle Verwirklichung dieser Schemata sich als unmöglich erwies, lassen sich im Fall $p = 9$ drei wesentlich verschiedene Schemata aufstellen, und alle drei können wir durch reelle Punkte und Geraden verwirklichen.

Bei weitem die wichtigste dieser Konfigurationen, überhaupt die wichtigste Konfiguration der Geometrie, ist die, welche BRIANCHON-PASCALSche Konfiguration genannt wird. Wir wollen für sie der Kürze halber das Symbol (9₃)₁ einführen und die zwei anderen Konfigurationen (9₃) mit (9₃)₂ und (9₃)₃ bezeichnen.

Das Schema von (9₃)₁ läßt sich folgendermaßen schreiben:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	7	6	5	6	7
3	5	7	8	9	8	9	9	8

Um eine solche Konfiguration zu zeichnen, nehmen wir zunächst die Punkte 8 und 9 willkürlich an (Abb. 108) und ziehen willkürlich die Geraden (4), (6), (9) durch 8 sowie die Geraden (5), (7), (8) durch 9. Von den neun Schnittpunkten, die so entstehen, gehören sechs der Konfiguration an, wir bezeichnen sie gemäß dem Schema mit 2, 3, 4, 5, 6, 7. Durch diese Punkte sind die noch fehlenden Geraden (1), (2), (3) festgelegt. Wir ziehen zunächst (1) durch 23 und (2) durch 45.

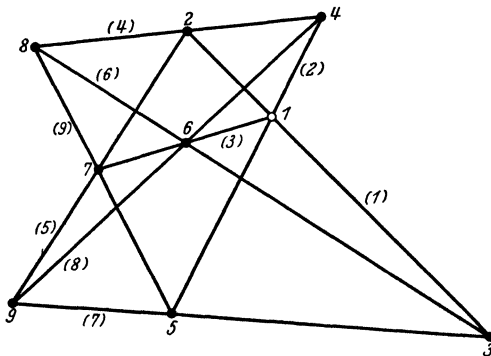


Abb. 108.

Den Schnittpunkt dieser Geraden haben wir mit 1 zu bezeichnen. Die noch fehlende Gerade (3) ist durch 67 festgelegt. Das Schema fordert, daß diese Gerade durch 1 geht. Wir finden nun, daß diese Incidenz von selbst erfüllt ist, trotz der ganz willkürlichen Wahl der Punkte 8 und 9 und der beiden Geradentripel durch diese Punkte.

Der geometrische Grund dieser überraschenden Erscheinung liegt in den Sätzen von BRIANCHON, die wir nunmehr behandeln wollen.

Wir gehen vom einschaligen Hyperboloid aus. Wie wir im ersten Kapitel gesehen haben, verlaufen auf ihm zwei Scharen von Geraden, so daß jede Gerade der einen Schar jede Gerade der anderen Schar schneidet, während zwei Geraden derselben Schar einander niemals treffen. Wir nehmen nun (Abb. 109) drei Geraden der einen Schar (doppelt ausgezogen) und drei Geraden der anderen Schar (einfach stark ausgezogen) heraus und bilden aus ihnen das räumliche Sechseck $ABCDEF$. Wir gehen, um es zu erhalten, zunächst auf einer Geraden der ersten Schar von A nach B . Durch B geht eine bestimmte Gerade der zweiten Schar, auf der wir nun bis zu einem Punkt C weitergehen. In C verfolgen wir wieder die hindurchgehende Gerade der ersten Schar bis zu einem Punkt D , gehen von dort auf einer Geraden der zweiten Schar bis zu E und schließlich auf einer Geraden der ersten Schar bis zu dem-

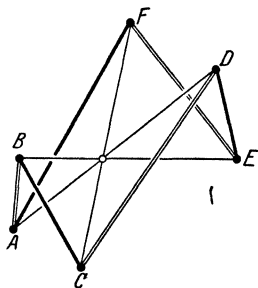


Abb. 109.

jenigen Punkt F dieser Geraden, in dem sie von der durch A gehenden Geraden der zweiten Schar getroffen wird. Die Seiten des Sechsecks gehören also abwechselnd der einen und der anderen Geradenschar an.

Wir beweisen nun, daß sich die Diagonalen AD , BE und CF dieses Sechsecks in einem Punkt schneiden. Betrachten wir zunächst AD und BE . Da die Sechseckseiten AB und DE zu verschiedenen Geradenscharen der Fläche gehören, schneiden sie einander. Die vier Punkte A, B, D, E liegen daher in einer Ebene, und daraus folgt, daß auch AD und BE einander schneiden. Genau so läßt sich zeigen, daß auch die beiden anderen Paare von Diagonalen einen Schnittpunkt besitzen. Wenn nun drei Geraden einander paarweise schneiden, so liegen sie entweder in einer Ebene oder, wenn nicht, so müssen sie alle durch denselben Punkt gehen. Lägen die drei Diagonalen des Sechsecks $ABCDEF$ in einer Ebene, so würde das Sechseck selbst in dieser Ebene liegen, und seine Seiten müßten einander paarweise schneiden; das ist unmöglich, da z. B. die Geraden AB und CD derselben Schar angehören, also einander nicht schneiden dürfen. Somit müssen die drei Diagonalen in der Tat durch einen Punkt gehen.

Dieser Satz der räumlichen Geometrie führt uns zu den BRIANCHONschen Sätzen der ebenen Geometrie. Wir betrachten dazu das einschalige Hyperboloid von einem Punkt P aus, von dem wir zunächst annehmen wollen, daß er nicht auf der Fläche liegt. Das Hyperboloid besitzt dann einen Kegelschnitt als Umriß, und zwar kann dieser Kegelschnitt eine Hyperbel (Abb. 110) oder auch eine Ellipse sein (Abb. 111). Das Gebiet auf der einen Seite des Umrisses erscheint dabei unbedeckt,

während die andere Seite doppelt bedeckt erscheint. Die beiden Blätter des Bildes hängen längs des Umrißkegelschnitts zusammen. Die Geraden, die auf der Fläche verlaufen, erscheinen im Bilde teils verdeckt, teils unverdeckt, sie treten also von dem einen Blatt ins andere und müssen daher den Umriß treffen. Andererseits können sie diese Kurve nicht schneiden, da ja deren eine Seite unbedeckt bleibt. Demnach müssen die Geraden als Tangenten des Umrisses erscheinen. Unser räumliches Sechseck verwandelt sich also in ein ebenes Sechseck, dessen Seiten einen Kegelschnitt berühren; wir werden dadurch auf den Satz der ebenen Geometrie geführt:

Die Diagonalen eines Sechsecks, das einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, schneiden sich in einem Punkte.

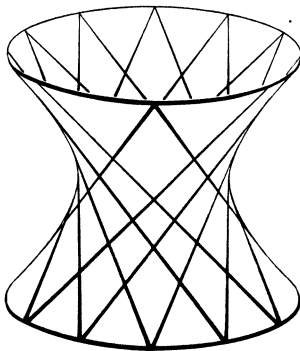


Abb. 110.

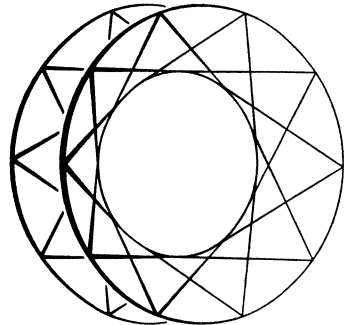


Abb. 111.

Bewiesen haben wir den Satz allerdings erst für solche Kegelschnitte, die als Umriss eines einschaligen Hyperboloids auftreten, also zunächst nur für gewisse Hyperbeln und Ellipsen. Der Umrißkegelschnitt kann aber auch eine Parabel sein; die Sehstrahlen, die den Umriß liefern, bilden nämlich den Tangentialkegel der Fläche von P aus, also einen Kegel zweiter Ordnung (S. 11), wenn wir daher die Bildebene so legen, daß sie einer Erzeugenden dieses Kegels parallel läuft, wird das Bild der Fläche in dieser Ebene von einer Parabel umrissen; denn der Umriß ist die Schnittkurve der Bildebene mit dem Kegel, und das ist in diesem Falle eine Parabel (S. 11, 12, 7).

Wir wollen nunmehr den Augenpunkt P in die Fläche selbst verlegen. Dann sehen wir diejenigen beiden Geraden der Fläche, die durch P gehen, als zwei Punkte; alle übrigen Geraden der Fläche erscheinen uns auch weiterhin als Geraden. Da jede Gerade der einen Schar die durch den Augenpunkt gehende Gerade der anderen Schar schneidet, so sehen wir jene eine Schar als ein Strahlenbüschel, als dessen Spitze uns die durch P gehende Gerade g der anderen Schar erscheint. Ebenso sehen wir auch die zweite Schar als ein Strahlenbüschel. Seine Spitze

ist von der des anderen Büschels verschieden, da sie das Bild einer von g verschiedenen durch P gehenden Geraden ist. Somit können wir aus dem Satz über das räumliche Sechseck die Folgerung ziehen:

Die Diagonalen eines ebenen Sechsecks, dessen Seiten abwechselnd durch je zwei feste Punkte gehen, schneiden sich in einem Punkt.

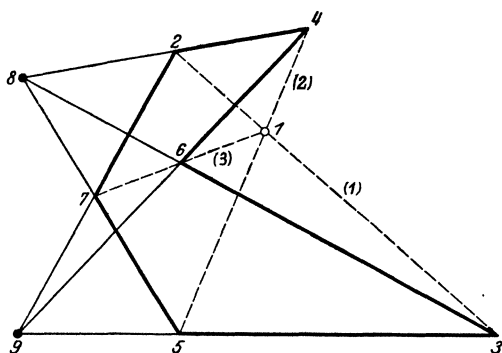


Abb. 112.

Diagonalen treffen, wird auch als BRIANCHONSCHER Punkt bezeichnet.

Durch unsere räumliche Konstruktion haben wir allerdings die BRIANCHONSCHEN Sätze nicht vollständig bewiesen. Es wäre denkbar, daß nicht jedes BRIANCHONSCHES Sechseck durch Projektion eines der von uns betrachteten räumlichen Sechsecke erzeugt werden könnte. Es läßt sich jedoch zeigen, daß tatsächlich jedes ebene Sechseck, das die Voraussetzung eines der BRIANCHONSCHEN Sätze erfüllt, sich zu einer räumlichen Figur ergänzen läßt, wie wir sie betrachtet haben.

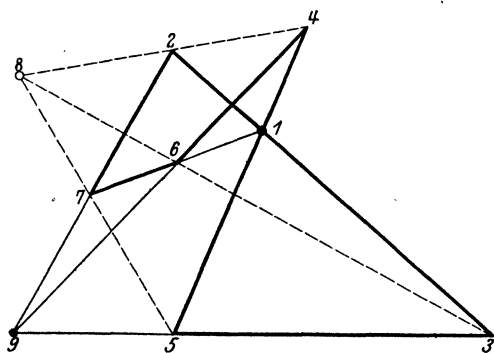


Abb. 113.

Der letzte BRIANCHONSCHES Satz steht nun in engem Zusammenhang mit der Konfiguration $(9_3)_1$ und gibt uns die Erklärung dafür, daß bei der Konstruktion dieses Gebildes die letzte Incidenz stets von selbst erfüllt ist. In der Bezeichnung von Abb. 112 und 108 bilden nämlich die Punkte 246357 ein Sechseck, dessen Seiten abwechselnd durch die Punkte 8 und 9 laufen, und die Geraden (1), (2), (3) sind die Diagonalen 23, 45, 67 dieses Sechsecks. (3) muß daher durch den Schnittpunkt 1 der Geraden (1) und (2) gehen, und 1 ist der BRIANCHONSCHES Punkt des Sechsecks.

Bei unserer Konstruktion haben die Punkte der Konfiguration $(9_3)_1$ eine verschiedene Bedeutung; 246357 bilden das Sechseck, 8 und 9

Diese Sätze über die Tangentensechsecke einer der drei Kegelschnitttypen oder eines in ein Punktepaar entarteten Kegelschnitts werden nach ihrem Entdecker die Sätze von BRIANCHON genannt. Der Punkt, in dem sich die drei

die Voraussetzung eines der BRIANCHONSCHEN Sätze erfüllt, sich zu einer räumlichen Figur ergänzen läßt, wie wir sie betrachtet haben.

Der letzte BRIANCHONSCHES Satz steht nun in engem Zusammenhang mit der Konfiguration $(9_3)_1$ und gibt uns die Erklärung dafür, daß bei der Konstruktion dieses Gebildes die letzte Incidenz stets von selbst erfüllt ist. In der Bezeichnung von Abb. 112 und 108 bilden nämlich die Punkte 246357 ein Sechseck, dessen Seiten abwechselnd durch die Punkte 8 und 9 laufen, und die Geraden (1), (2), (3) sind die Diagonalen 23, 45, 67 dieses Sechsecks. (3) muß daher durch den Schnittpunkt 1 der Geraden (1) und (2) gehen, und 1 ist der BRIANCHONSCHES Punkt des Sechsecks.

sind die beiden Punkte, durch die seine Seiten gehen, und 1 ist der BRIANCHONSche Punkt. Diese Asymmetrie liegt aber nicht im Wesen der Konfiguration, sondern nur an unserer Willkür. Wir können nämlich auch einen der beiden Punkte 8 und 9 als BRIANCHONSchen Punkt ansehen; es genügt, das für den Punkt 8 zu veranschaulichen (Abb. 113), da wir aus Abb. 112 sehen, daß 8 und 9 gleichberechtigt sind. Ebenso können wir jeden der Punkte 246357 zum BRIANCHONSchen Punkt machen; wegen der Gleichberechtigung dieser Punkte genügt es wiederum, dies am Punkt 2 aufzuzeigen (Abb. 114).

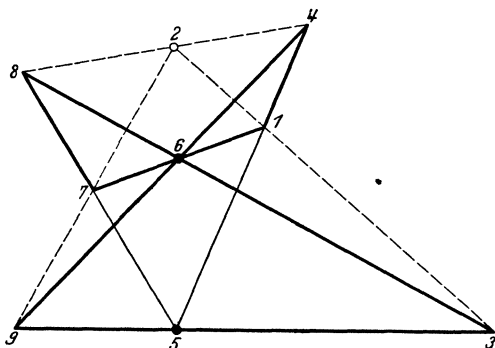


Abb. 114.

Wegen dieser inneren Symmetrie wird $(9_3)_1$ als *reguläre* Konfiguration bezeichnet. Ähnlich wie bei den Punktsystemen und den Polyedern kommt man bei den Konfigurationen auf den Begriff der Regularität durch das Studium gewisser Abbildungen einer Konfiguration auf sich selbst, die man Automorphismen nennt und die eine analoge Rolle spielen wie die Decktransformationen bei den Punktsystemen und Polyedern. Man erhält einen Automorphismus einer Konfiguration,

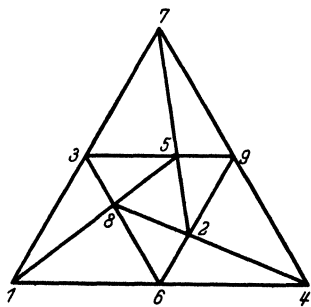


Abb. 115.

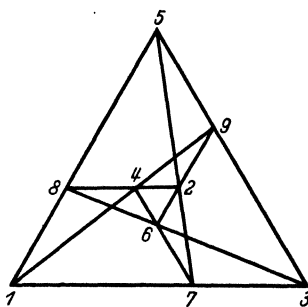


Abb. 116.

wenn man ihre Punkte unter sich und ihre Geraden unter sich so vertauschen kann, daß bei dieser Vertauschung keine Incidenz verlorengeht oder neu hinzukommt. Es ist leicht zu erkennen, daß die Automorphismen eine Gruppe bilden. Regulär heißt nun eine Konfiguration, wenn diese Gruppe „transitiv“ ist, d. h. so viele Abbildungen enthält, daß man jeden beliebigen Punkt der Konfiguration durch einen Automorphismus in jeden beliebigen anderen Punkt der Konfiguration überführen kann.

Zum Studium der Automorphismen genügt das abstrakte Schema der Konfiguration; man kann in diesem Sinne zeigen, daß die Konfigurationsschemata (7_3) und (8_3) regulär sind. Ebenso $(9_4 12_3)$ (S. 90).

Wenden wir uns nun zu den beiden anderen Konfigurationen (9_3) . Sie werden in den Abb. 115 und 116 dargestellt. Um zu erkennen, worin

die drei Konfigurationen sich unterscheiden, können wir folgendermaßen vorgehen: Da bei jeder Konfiguration (p_3) jeder Punkt mit genau sechs anderen durch Konfigurationsgeraden verbunden ist, muß es im Fall $p=9$ zu jedem Konfigurationspunkt zwei weitere geben, die mit ihm nicht verbunden sind. So sind bei $(9_3)_1$ die Punkte 8

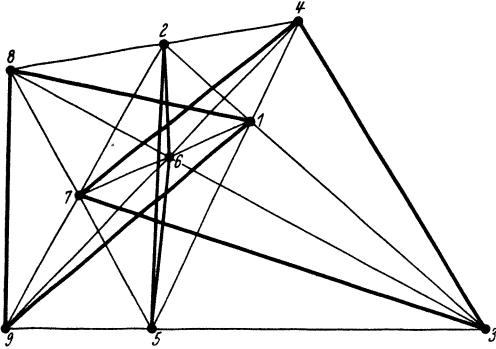


Abb. 117.

und 9 nicht mit 1 verbunden. Da 8 und 9 auch untereinander nicht verbunden sind, so schließen sich 1 8 9 zu einem Dreieck unverbundener Punkte zusammen. Ebenso bilden 2 5 6 und 3 4 7 solche Dreiecke (Abb.117). Wenn wir nun dasselbe Verfahren auf $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ anwenden und die Strecken zwischen unverbundenen Punkten wieder zu Polygonen zusammensetzen, so ergibt sich für $(9_3)_2$ ein Neuneck (Abb. 118) und für $(9_3)_3$ ein Sechseck und ein Dreieck (Abb. 119). Daraus ergibt sich

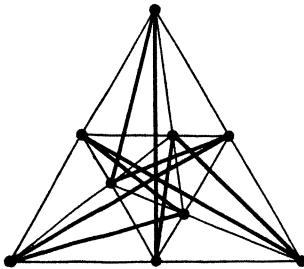


Abb. 118.

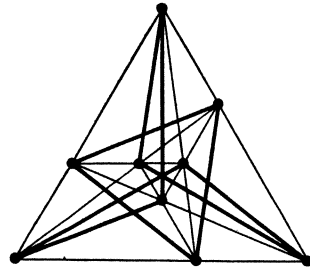


Abb. 119.

zunächst, daß die drei Abb. 108, 115 und 116 wirklich verschiedene Konfigurationen darstellen und sich nicht bloß durch andere Lage der Punkte unterscheiden. Ferner können wir schließen, daß $(9_3)_3$ sicher nicht regulär ist. Denn ein Automorphismus kann einen Punkt des Sechsecks offenbar nur in einen Punkt des Sechsecks und niemals in einen Punkt des Dreiecks überführen. Dagegen läßt bei $(9_3)_2$ die regelmäßige Anordnung der unverbundenen Punkte vermuten, daß diese Konfiguration regulär ist; die genauere Betrachtung des Schemas bestätigt das.

Wenn wir analog wie $(9_3)_1$ auch die beiden anderen Konfigurationen schrittweise zu konstruieren versuchen, so stellt sich heraus, daß in diesen Fällen die letzte Incidenz nicht von selbst erfüllt ist, sondern nur dann, wenn wir schon bei früheren Schritten spezielle Anordnungen treffen. Hierin liegt der Grund, warum $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ keine so prinzipielle Bedeutung haben wie $(9_3)_1$. Diese Konfigurationen bringen keinen allgemeinen projektiv-geometrischen Satz zum Ausdruck. Abb. 120 gibt ein Beispiel, in dem die letzte Gerade von $(9_3)_2$ sich nicht zeichnen läßt.

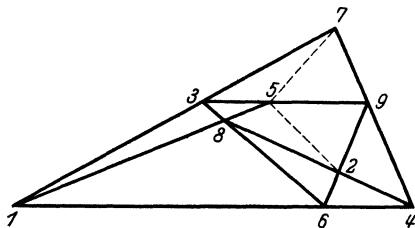


Abb. 120.

Die Hilfskonstruktionen, die bei $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ nötig sind, zeichnen sich aber durch eine Besonderheit aus. Sie lassen sich nämlich mit alleiniger Hilfe des Lineals durchführen, so daß alle drei Konfigurationen (9_3) mit dem Lineal allein konstruierbar sind. Analytisch drückt sich das darin aus, daß alle Elemente der Konfiguration sich durch sukzessive Auflösung linearer Gleichungen bestimmen lassen, deren Koeffizienten rationale Ausdrücke in den jeweils schon berechneten Bestimmungsgrößen der Konfiguration sind. Nun sind zwar die Gleichungen gerader Linien stets linear. Um

aber das Gleichungssystem einer Konfiguration zu gewinnen, müssen wir einige der Koeffizienten durch Elimination aus anderen Gleichungen berechnen, da ja einige Konfigurationsgeraden durch die früher konstruierten festgelegt sind. Im allgemeinen werden diese Eliminationen auf Gleichungen höheren Grades führen. Das muß z. B. bei (8_3) eintreten, da wir sonst nicht auf komplexe Elemente stoßen würden. Demgegenüber erweisen sich bei den Konfigurationen (9_3) alle Hilfsgleichungen als linear, und daraus folgt eben, daß diese drei Konfigurationen sämtlich im Reellen konstruiert werden können, und zwar mit dem Lineal allein.

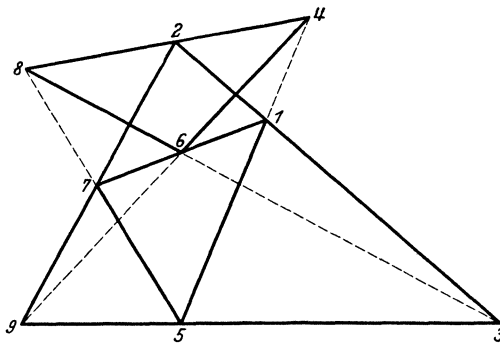


Abb. 121.

Wir können uns die Elemente der Konfigurationen (9_3) auf mannigfache Weise angeordnet denken. So lassen sie sich in allen drei Fällen als je drei Dreiecke auffassen, von denen das erste dem zweiten, das zweite dem dritten und das dritte dem ersten einbeschrieben ist. Ein solches System von Dreiecken bilden z. B. 157, 239, 468 in Abb. 121,

258, 369, 147 in Abb. 122 und 147, 258, 369 in Abb. 123. In ähnlicher Weise hatten wir (8_3) als System zweier wechselseitig unbeschriebener

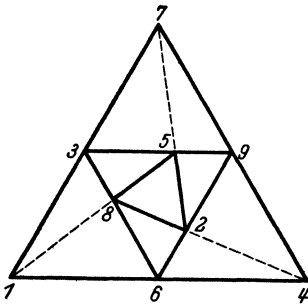


Abb. 122.

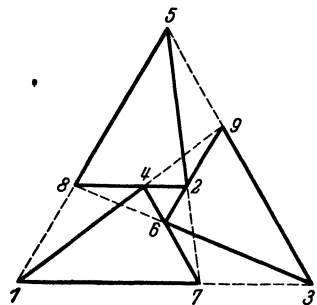


Abb. 123.

Vierecke gedeutet (Abb. 107, S. 90). Ferner kann man alle Konfigurationen (9_3) als Neunecke auffassen, die sich selbst ein- und um-

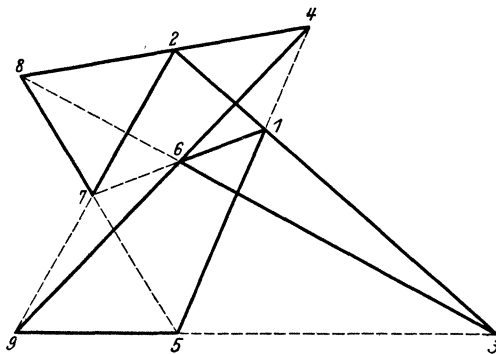


Abb. 124.

beschrieben sind. Solche Neunecke sind 2361594872 in Abb. 124, 1627384951 in Abb. 125 und 1473695281 in Abb. 126. Mit Hilfe geeigneter Automorphismen lassen sich in der Konfiguration $(9_3)_1$ noch mehrere andere Neunecke der gleichen Eigenschaft auffinden.

Die Aufstellung von p -Ecken, die sich selbst gleichzeitig ein und um-

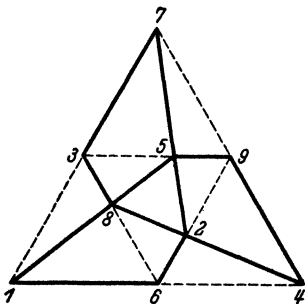


Abb. 125.

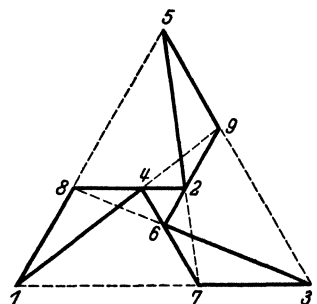


Abb. 126.

beschrieben sind, muß stets auf Konfigurationen (p_3) führen; denn auf jeder Polygonseite liegt außer den beiden Ecken, die sie verbindet, noch ein weiterer Eckpunkt des Polygons, und ebenso muß jeder Eckpunkt

auf drei Polygonseiten liegen. Wir haben dabei nur die Annahme gemacht, daß alle Seiten und Ecken des Polygons gleichberechtigt sind. Andernfalls könnten auf einer Polygonseite zwei oder mehr weitere Polygonecken liegen; dann müßte aber eine andere Polygonseite dafür leer ausgehen.

Auch (7_3) und (8_3) lassen sich als derartige p -Ecke deuten. In der Bezeichnungsweise unserer Schemata sind das Siebeneck 12457361 und das Achteck 126534871 sich selbst ein- und umbeschrieben.

Um eine weitere wichtige Eigenschaft der Konfigurationen kennenzulernen, müssen wir uns mit dem Dualitätsprinzip beschäftigen. Dieses Prinzip verleiht der projektiven Geometrie ihre besondere Übersichtlichkeit und Symmetrie. Es läßt sich anschaulich aus der Methode des Projizierens herleiten, die wir schon bei der Aufstellung der BRIANCHONSchen Sätze verwandt haben.

§ 18. Perspektive, unendlich ferne Elemente und ebenes Dualitätsprinzip.

Wenn wir auf einer vertikalen Tafel das Bild einer ebenen Landschaft zeichnen (Abb. 127), so erscheint das Bild der Ebene von einer Geraden h , dem Horizont, begrenzt, und zwei in der Ebene verlaufende

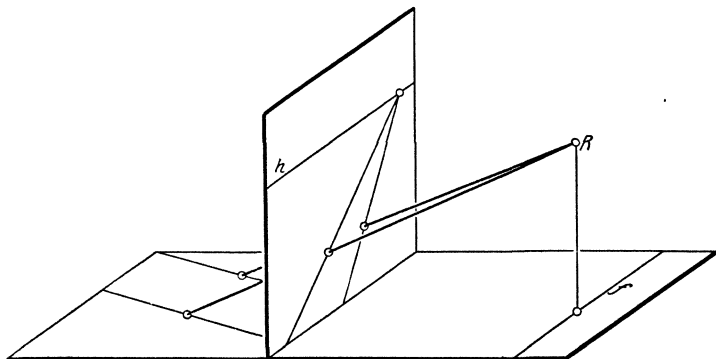


Abb. 127.

parallele Geraden, die nicht außerdem noch der Bildtafel parallel sind, erscheinen im Bild als zwei Geraden, die sich auf dem Horizont treffen. Ihr Treffpunkt wird in der Theorie des Zeichnens der Fluchtpunkt der Parallelen genannt.

Bei der Abbildung durch Zentralperspektive bleiben also die Parallelen gewöhnlich nicht parallel. Ferner sehen wir, daß diese Abbildung nicht umkehrbar eindeutig ist. In der Bildtafel wird durch die Punkte des Horizonts kein Punkt der Ebene dargestellt. Umgekehrt gibt es in der Ebene Punkte, die nicht abgebildet werden. Es sind das die

Punkte der Geraden f (Abb. 127), die senkrecht unter dem Betrachter R der Bildtafel parallel läuft.

Diese Erscheinung läßt sich einfacher beschreiben, wenn wir von den Punkten zu ihren Sehstrahlen übergehen. Jedem Punkt P der Ebene e (Abb. 128) entspricht dann eine Gerade $AP = \phi$, die den Punkt mit dem Augenpunkt A verbindet. Das Bild von P auf einer beliebigen Tafel t ist dann der Punkt P' , in dem die Gerade ϕ die Tafel trifft; durch die Angabe von ϕ ist die Abbildung also bestimmt. Durchläuft P eine Kurve in e , so durchläuft ϕ einen Kegel mit der Spitze A . Das Bild der Kurve auf t ist der Schnitt von t mit dem Kegel. Durchläuft P insbesondere eine Gerade g in e , so geht der Kegel in die Ebene γ über, die durch A und g geht. Während also den Punkten von e Geraden durch A entsprechen, führen die Geraden von e auf Ebenen durch A . Das Bild von g in t ist der Schnitt von t mit γ , also wieder eine Gerade g' .

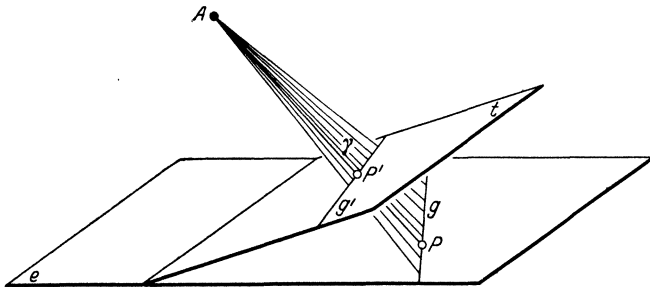


Abb. 128.

Es ist die wichtigste Eigenschaft der Zentralperspektive, daß Geraden stets durch Geraden abgebildet werden.

Wir haben die perspektivische Abbildung in zwei Teilabbildungen zerlegt, von denen die zweite als eine Umkehrung der ersten angesehen werden kann. Zuerst wurden die Punkte (P) und Geraden (g) einer Ebene durch die Geraden (ϕ) und Ebenen (γ) durch A ersetzt, hierauf die Geraden und Ebenen durch A wieder durch Punkte (P') und Geraden (g') einer anderen Ebene. Aus Symmetriegründen genügt es also, den ersten Schritt allein zu betrachten.

Diese Abbildung $e \rightarrow A$ ist nur in der angegebenen Richtung vollständig erklärt, in der Richtung $A \rightarrow e$ dagegen nicht. Unter den Geraden durch A nehmen bei der Abbildung diejenigen eine Sonderstellung ein, die e parallel sind. Sie entsprechen keinem Punkt von e , während die übrigen Geraden durch A zu einem bestimmten Punkt von e gehören, nämlich zu dem Punkt, in dem sie e treffen. Die Parallelen ϕ_u zu e durch A erfüllen eine bestimmte Ebene γ_u , nämlich die Parallelebene zu e durch A (vgl. Abb. 129). Unter allen durch A gehenden Ebenen ist es wiederum die Ebene γ_u , die bei der Abbildung $A \rightarrow e$ ausgezeichnet ist. Während nämlich die anderen durch A gehenden

Ebenen einer bestimmten Geraden g in e zugeordnet sind, in der sie e treffen, entspricht der Ebene γ_u keine solche Gerade, da sie e nicht trifft.

Es ist nun zweckmäßig, diese Ausnahmefälle auf begrifflichem Wege zu beseitigen, indem man der Ebene e noch weitere Punkte P_u als „unendlich ferne“ Punkte zurechnet. Diese Punkte sind dadurch definiert, daß sie bei der Abbildung $A \rightarrow e$ die Bilder der Strahlen p_u sein sollen. Ihre Gesamtheit haben wir als das Bild der Ebene γ_u anzusehen. Wenn wir die Ausnahmestellung dieser Ebene gegenüber den anderen Ebenen durch A aufheben wollen, müssen wir ihr Bild als Gerade bezeichnen. Wir sagen daher, daß die unendlich fernen Punkte von e eine Gerade g_u , die unendlich ferne Gerade von e erfüllen¹. Nachdem wir die Ebene e in dieser Weise ergänzt haben, ist offenbar die Abbildung der Punkte und Geraden von e auf die Geraden und Ebenen durch A umkehrbar eindeutig und vollständig erklärt.

Die Zweckmäßigkeit dieser Definitionen zeigt sich, wenn wir nun die Zentralperspektive von e auf eine beliebige andere Ebene t betrachten. Auch der Ebene t haben wir in gleicher Weise wie e unendlich ferne Punkte zuzurechnen, die die unendlich ferne Gerade der Ebene t bilden. Wenn aber t nicht zufällig parallel zu e ist, entspricht bei der Abbildung $A \rightarrow t$ der unendlich fernen Geraden l_u von t nicht γ_u , sondern irgendeine andere Ebene λ durch A . λ trifft e in einer Geraden l . Bei der perspektivischen Abbildung $e \rightarrow t$ entsprechen also den Punkten der unendlich fernen Geraden der einen Ebene die Punkte einer gewöhnlichen Geraden in der anderen Ebene. Erst durch die Einführung der unendlich fernen Punkte wird die Zentralperspektive zu einer Abbildung, die die Punkte und Geraden einer Ebene umkehrbar eindeutig auf die Punkte und Geraden der Bildebene abbildet, und dabei erscheinen die unendlich fernen Punkte mit den endlichen als gleichberechtigt.

Wir wollen nun untersuchen, wie der Begriff der Incidenz zwischen Punkt und Gerade durch Hinzunahme der unendlich fernen Elemente erweitert werden muß. Wir gehen wieder von der Abbildung $e \rightarrow A$ aus. Ein *endlicher* Punkt P ist mit einer *endlichen* Geraden g in e dann und nur dann incident, wenn die zugehörigen p und γ incident sind. Wir verallgemeinern das auf *beliebige* Punkte und Geraden von e . Ein unendlich ferner Punkt P_u ist dann mit einer Geraden g incident zu nennen, wenn der Strahl p_u mit γ incident ist. Fällt γ mit γ_u zusammen, ist also g die unendlich ferne Gerade von e , so liefert das nichts Neues. Ist dagegen g eine endliche Gerade, so schneiden sich γ und γ_u in einer bestimmten Geraden p_u ; jede endliche Gerade besitzt daher genau einen unendlich fernen Punkt: ihren Schnittpunkt mit g_u . Ist g' eine Parallele zu g ,

¹ Die Bezeichnung „unendlich fern“ rührt daher, daß der Sehstrahl eines Punktes von e sich stets einem Strahl p_u nähert, wenn der Punkt sich in e in bestimmter Richtung unbegrenzt entfernt.

so ist das damit äquivalent, daß die zu g' gehörende Ebene γ' durch p_u geht (Abb. 129). Zwei Geraden sind also dann und nur dann parallel, wenn sie denselben unendlich fernen Punkt besitzen; das ist der Sinn der bisweilen gebrauchten, jedoch ohne weitere Erläuterung sinnlosen Redeweise: Parallelen schneiden sich im Unendlichen. Zugleich erkennen wir den Grund der zu

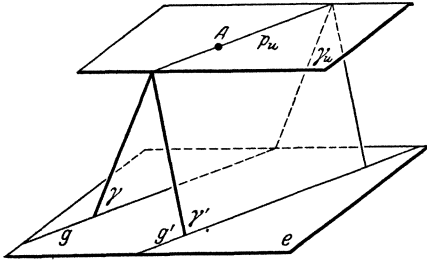


Abb. 129.

Beginn dieses Abschnitts erwähnten Tatsache, daß zwei Parallelen in ihrem auf dem Horizont gelegenen Fluchtpunkt zusammenzulaufen scheinen. Als Beispiel dafür, wie sich die geometrischen Begriffe durch die Einführung der unendlich fernen Elemente vereinfachen, erwähnen wir die

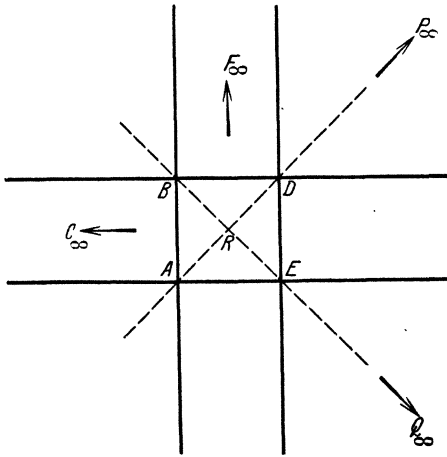


Abb. 130.

Kegelschnitte. Da sie, wie im ersten Kapitel bewiesen, durch Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel entstehen, so können sie alle als perspektive Bilder eines Kreises angesehen werden. Je nachdem kein oder ein oder zwei Projektionsstrahlen zur Bildebene parallel liefen, ergab sich eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel. Dafür

können wir jetzt sagen: Ein Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem er die unendlich ferne Gerade entweder gar nicht trifft oder sie in einem Punkte berührt oder sie in zwei Punkten schneidet. Bei Zentralprojektion auf eine andere Ebene entsteht dann ein Kegelschnitt, der den Horizont nicht trifft, berührt oder schneidet. Welcher Art dieser Kegelschnitt ist, hängt von der Stellung der Bildebene ab.

Auch sonst ist die Zentralprojektion ein wichtiges Hilfsmittel, um aus speziellen Figuren viel allgemeinere herzustellen; so kann die Figur des vollständigen Vierecks (S. 85) stets aus der nebenstehenden einfachen Abb. 130 abgeleitet werden.

Die Bedeutung der unendlich fernen Elemente besteht aber vor allem darin, daß durch sie die axiomatische Grundlegung der ebenen Geometrie abgeändert und wesentlich vereinfacht werden kann. Beschränkt man

sich nämlich auf die endlichen Punkte der Ebene, so wird die Incidenz zwischen Punkten und Geraden durch die folgenden Axiome eingeschränkt:

1. Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen stets eine mit ihnen incidente Gerade.
2. Zwei verschiedene Punkte bestimmen nur eine mit ihnen incidente Gerade.

Aus dem zweiten Axiom wird gefolgert: Zwei Geraden einer Ebene haben einen oder keinen Punkt gemeinsam. Denn hätten sie zwei oder mehr Punkte gemein, so müßten sie in eine einzige Gerade zusammenfallen.

Der Fall, daß zwei Geraden einer Ebene keinen Punkt gemeinsam haben, wird durch das euklidische Axiom der Parallelen erläutert und eingeschränkt:

Wenn in einer Ebene eine beliebige Gerade a und ein beliebiger Punkt A außerhalb a gegeben ist, so gibt es in der Ebene eine einzige Gerade b , die durch A läuft und a nicht schneidet; die Gerade b wird die Parallele zu a durch A genannt.

Wenn wir nun nicht bloß die endlichen Punkte betrachten, sondern die Ebene durch Hinzunahme der unendlich fernen Geraden zur „projektiven Ebene“ erweitern, so können wir statt der erwähnten drei Axiome die beiden folgenden Axiome zugrundelegen:

1. Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen eine und nur eine Gerade.
2. Zwei voneinander verschiedene Geraden bestimmen einen und nur einen Punkt.

Auf diese beiden Axiome ist die Incidenz von Punkten und Geraden in der projektiven Ebene zurückzuführen. Dabei sind die unendlich fernen Punkte und die unendlich ferne Gerade in keiner Weise von den anderen Punkten und Geraden unterschieden. Wenn wir die projektive Ebene durch ein Gebilde realisieren wollen, in dem die Gleichberechtigung aller Punkte und aller Geraden auch anschaulich zu erkennen ist, so können wir wieder auf das Bündel der Geraden und Ebenen durch einen festen Punkt zurückgreifen, indem wir die Geraden als „Punkte“ und die Ebenen als „Geraden“ ansehen. An diesem Modell ist die Gültigkeit der beiden genannten Axiome am leichtesten einzusehen.

Dieses Axiomenpaar hat nun die rein formale Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn man das Wort Gerade durch Punkt und das Wort Punkt durch Gerade ersetzt. Durch nähere Untersuchung ergibt sich, daß auch in den übrigen Axiomen der ebenen projektiven Geometrie diese beiden Worte vertauschbar sind, ohne daß der Inhalt des Axiomensystems sich ändert. Dann müssen die beiden Worte aber auch in allen aus diesen Axiomen abgeleiteten Lehrsätzen auswechselbar sein. Die Vertauschbarkeit der Punkte mit den Geraden wird als das Prinzip

der *Dualität* in der projektiven Ebene bezeichnet. Nach diesem Prinzip gehört zu jedem Lehrsatz ein zweiter, dem ersten dual entsprechender Satz, und ebenso gehört zu jeder Figur eine dual entsprechende Figur. Dabei entsprechen den Punkten einer Kurve eine Reihe von Geraden, die im allgemeinen eine zweite Kurve als Tangenten einhüllen. Eine nähere Betrachtung lehrt, daß die Geradenschar, die den Punkten eines Kegelschnittes dual entspricht, stets wieder einen Kegelschnitt einhüllt.

Nach dem Dualitätsprinzip können wir nun aus den BRIANCHONSCHEN Sätzen eine Reihe weiterer Sätze herleiten, die nach ihrem Entdecker die Sätze von PASCAL genannt werden. Um die Dualität der beiden Satzgruppen deutlich hervortreten zu lassen, sollen sie in genau entsprechender Form nebeneinandergeschrieben werden:

Sätze von BRIANCHON.

1, 2, 3. Es sei ein Sechseck aus sechs Geraden gebildet, die Tangenten eines Kegelschnittes sind (Sechseck, das einem Kegelschnitt umbeschrieben ist). Dann schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkt.

4. Es seien sechs Gerade gegeben, von denen drei mit einem Punkt A und drei mit einem Punkt B incident sind. Ich greife sechs Schnittpunkte heraus, so daß sie mit den zugehörigen Verbindungslinien ein Sechseck bilden, dessen Seiten abwechselnd durch A und B gehen. Dann schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkt (BRIANCHONscher Punkt des Sechsecks).

Sätze von PASCAL.

1, 2, 3. Es sei ein Sechseck aus sechs Punkten gebildet, die auf einem Kegelschnitt liegen (Sechseck, das einem Kegelschnitt eingeschrieben ist). Dann liegen die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.

4. Es seien sechs Punkte gegeben, von denen drei mit einer Geraden a und drei mit einer Geraden b incident sind. Ich greife sechs Verbindungsgeraden heraus, so daß sie mit den zugehörigen Schnittpunkten ein Sechseck bilden, dessen Ecken abwechselnd auf a und b liegen. Dann liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden (PASCALSche Gerade des Sechsecks).

Die Figur, die zum letzten Satz von PASCAL gehört, muß offenbar der Konfiguration $(9_3)_1$ dual entsprechen. Nun ist allgemein die duale Figur zu einer Konfiguration $(p_\gamma g_\pi)$ wieder eine Konfiguration, und zwar vom Typus $(g_\pi p_\gamma)$. Die speziellen Konfigurationen, die wir mit (p_γ) bezeichnen, und nur diese Konfigurationen besitzen als duale Figur wieder eine Konfiguration desselben Typus. Nun wäre es denkbar, daß die Konfiguration des PASCALSchen Satzes, also die duale Figur zu $(9_3)_1$ eine der beiden anderen Konfigurationen (9_3) wäre. Es zeigt sich jedoch (Abb. 131), daß auch der PASCALSche Satz durch $(9_3)_1$ dargestellt wird. Deswegen hatten wir diese Konfiguration von vorn-

herein als die BRIANCHON-PASCALSche bezeichnet. $(9_3)_1$ ist also „dual invariant“. Ebenso wie den BRIANCHONschen Punkt können wir auch die PASCALSche Gerade ganz beliebig in der Konfiguration wählen.

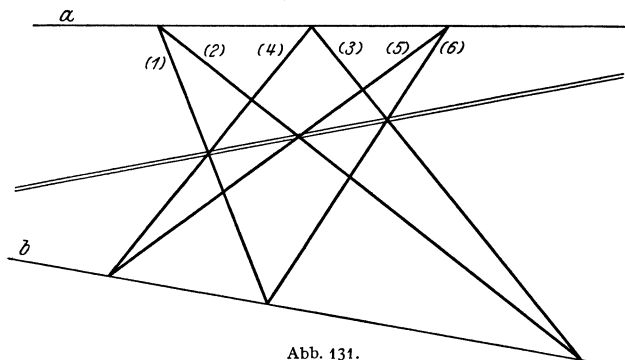


Abb. 131.

Aus dem letzten PASCALSchen Satz läßt sich mit Hilfe des Unendlichfernen ein Spezialfall ableiten, der ohne Zuhilfenahme dieses Begriffes in gar keinem erkennbaren Zusammenhang mit dem ursprünglichen Lehrsatz stehen würde. Wenn wir nämlich die PASCALSche Gerade ins Unendlichferne legen, erhalten wir den Lehrsatz (Abb. 132): Wenn die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden liegen, und außerdem zwei Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind, so muß auch das dritte Seitenpaar parallel sein.

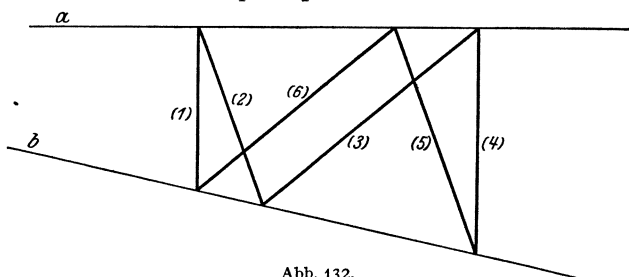


Abb. 132.

Dieser Spezialfall des PASCALSchen Satzes wird als der Satz von PAPPUS bezeichnet.

Nachdem wir gesehen haben, daß $(9_3)_1$ dual invariant ist, läßt sich leicht schließen, daß auch $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ dual invariant sein müssen. Denn sonst gäbe es nur die eine Möglichkeit, daß $(9_3)_2$ durch Anwendung des Dualitätsprinzips in $(9_3)_3$ überginge. Nun ist aber $(9_3)_2$ regulär, $(9_3)_3$ nicht. Also kann die eine dieser Figuren nicht zur anderen dual sein.

Wir gehen jetzt zu den Konfigurationen (10_3) über. Zum Verständnis der wichtigsten unter diesen Konfigurationen, der von DESARGUES, müssen wir die Einführung der unendlich fernen Elemente und das Dualitätsprinzip von der Ebene auf den Raum übertragen.

§ 19. Unendlich ferne Elemente und Dualitätsprinzip im Raum. DESARGUES'SCHER SATZ UND DESARGUES'SCHE KONFIGURATION (10₃).

Wir haben durch Projektion im Raum den Begriff der projektiven Ebene gewonnen. Auch der Raum als Ganzes wird nun in der projektiven Geometrie durch Hinzunahme unendlich ferner Elemente zu einem in mancher Hinsicht einfacheren Gebilde, dem „projektiven Raum“, umgestaltet, nur läßt sich in diesem Fall das Verfahren nicht mehr anschaulich, sondern nur noch abstrakt begründen. Wir denken uns zunächst nach dem früheren Prinzip auf allen Ebenen des gewöhnlichen Raumes die unendlich fernen Elemente eingeführt. Dann liegt es nahe, die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte und Geraden als eine Ebene, die „unendlich ferne Ebene“ des Raumes zu deuten. Diese Gesamtheit hat nämlich mit den gewöhnlichen Ebenen des Raumes die Eigenschaft gemein, von jeder Ebene in einer Geraden getroffen zu werden, der unendlich fernen Geraden jener Ebene. Mit jeder gewöhnlichen Geraden hat die unendlich ferne Ebene wie jede andere Ebene, die die Gerade nicht enthält, genau einen Punkt gemein, den unendlich fernen Punkt der Geraden. Ferner können zwei Ebenen dann und nur dann parallel sein, wenn sie dieselbe unendlich ferne Gerade besitzen¹.

Viele Erscheinungen der räumlichen Geometrie werden durch diese Auffassung vereinfacht. So können wir die Parallelprojektion als einen Spezialfall der Zentralprojektion ansehen, bei dem das Projektionszentrum ein unendlich ferner Punkt ist. Ferner läßt sich z. B. der Unterschied zwischen dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid dadurch kennzeichnen, daß das Hyperboloid die unendlich ferne Ebene in einem nichtausgearteten Kegelschnitt schneidet, während das Paraboloid die unendlich ferne Ebene in einem Geradenpaar von Erzeugenden schneidet. Diese Unterscheidung ist nämlich gleichbedeutend mit der auf S. 13 gegebenen Erklärung, daß drei windschiefe Geraden dann und nur dann auf einem Paraboloid und nicht auf einem Hyperboloid liegen, wenn sie einer festen Ebene parallel sind; denn das besagt, daß die drei Geraden eine unendlich ferne Gerade treffen, die auf der Fläche liegen muß, weil sie drei Punkte mit ihr gemein hat.

Im projektiven Raum sind alle Ebenen offenbar als projektive Ebenen anzusehen, in ihnen gilt also das ebene Dualitätsprinzip. Im Raum als Ganzem herrscht aber noch ein davon verschiedenes Dualitätsprinzip.

Um es zu erhalten, stellen wir analog wie in der Ebene die Axiomgruppe zusammen, durch die im projektiven Raum die Incidenz zwischen den Punkten, Geraden und Ebenen geregelt wird, wenn wir zwischen

¹ Denn die Parallelität einerseits, die Gemeinsamkeit der unendlich fernen Geraden andererseits sind beide mit der Eigenschaft gleichbedeutend, daß sich zu jeder Geraden der einen Ebene eine Parallele in der anderen Ebene ziehen läßt.

den endlichen und den unendlich fernen Gebilden keinen Unterschied machen. Diese Axiome lassen sich folgendermaßen formulieren:

1. Zwei Ebenen bestimmen eine und nur eine Gerade; drei Ebenen, die nicht durch eine Gerade gehen, bestimmen einen und nur einen Punkt.

2. Zwei sich schneidende Geraden bestimmen einen und nur einen Punkt und eine und nur eine Ebene.

3. Zwei Punkte bestimmen eine und nur eine Gerade; drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen eine und nur eine Ebene.

Dieses Axiomensystem bleibt ungeändert, wenn man die Worte Punkt und Ebene miteinander vertauscht (das erste Axiom wird dabei mit dem dritten vertauscht, und das zweite bleibt ungeändert). Ebenso bleiben auch die übrigen Axiome der räumlichen projektiven Geometrie

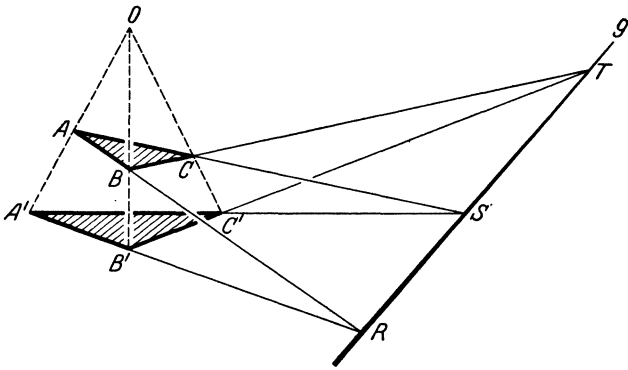


Abb. 133.

bei dieser Vertauschung in ihrem Gesamtinhalt ungeändert, so daß also im Raum Ebene und Punkt einander dual entsprechen, während die Gerade sich selbst entspricht. Der Gesamtheit der Punkte einer Fläche entspricht dual das System der Tangentialebenen einer anderen Fläche. Wie die Kegelschnitte der Ebene, so sind im Raum die Flächen zweiten Grades zu sich selbst dual.

Der einfachste und zugleich wichtigste Satz der räumlichen projektiven Geometrie wird nach DESARGUES benannt. Der DESARGUESsche Satz lautet (Abb. 133):

Es seien zwei im Raum liegende Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben. Diese Dreiecke mögen so angeordnet sein, daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen einzigen Punkt O gehen. Dann schneiden sich zunächst die drei Paare von entsprechenden Dreiecksseiten in drei Punkten RST , und zweitens liegen diese Schnittpunkte auf einer Geraden.

Der erste Teil des Satzes ist einfach zu beweisen. Die beiden sich schneidenden Geraden AA' und BB' bestimmen nach dem zweiten

räumlichen Axiom eine Ebene. In dieser Ebene verlaufen aber auch die Geraden AB und $A'B'$, so daß sie nach dem zweiten ebenen Axiom einen Schnittpunkt R besitzen. Es bleibt dahingestellt, ob R im Endlichen oder Unendlichen liegt. Die Existenz der anderen beiden Punkte S und T wird ebenso bewiesen.

Der zweite Teil des Satzes ist in dem Fall leicht einzusehen, daß die Dreiecke in verschiedenen Ebenen liegen. Dann bestimmen diese Ebenen eine — endliche oder unendlich ferne — Schnittgerade (räumliches Axiom 1). Von jedem Paar entsprechender Dreiecksseiten verläuft die eine in der einen Ebene, die andere in der anderen Ebene. Da sich nun die beiden Seiten schneiden, muß ihr Schnittpunkt auf der Geraden liegen, die beide Ebenen gemeinsam haben. Im allgemeinen Fall ist der DESARGUESsche Satz hiermit bewiesen.

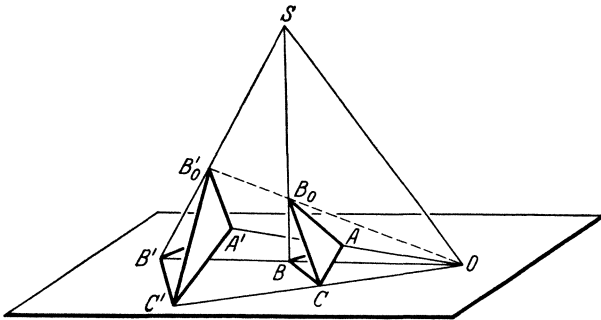


Abb. 134.

Besonders wichtig ist aber gerade der Spezialfall, daß die Dreiecke in einer Ebene liegen. Dann läßt sich der Beweis ähnlich wie der des BRIANCHONschen Satzes durch Projektion aus dem Raum erbringen. Wir haben nur zu zeigen, daß jede ebene DESARGUESsche Figur sich als Projektion einer räumlichen DESARGUESschen Figur auffassen läßt. Zu diesem Zwecke verbinden wir alle Punkte und Geraden der ebenen DESARGUESschen Figur mit einem außerhalb der Ebene gelegenen Punkt S (Abb. 134). Ferner legen wir durch die Gerade AC eine Ebene, die BS in dem von S verschiedenen Punkt B_0 treffen möge. Sodann ziehen wir die Gerade OB_0 . Diese Gerade liegt mit $B'S$ in einer Ebene, also besitzen die beiden Geraden einen Schnittpunkt B'_0 . Dann bilden aber die Dreiecke AB_0C und $A'B'_0C'$ eine räumliche DESARGUESsche Figur, da die Verbindungslinien entsprechender Ecken alle durch O gehen. Aus der Schnittgeraden der Ebenen jener beiden Dreiecke entsteht durch Projektion von S aus eine Gerade in der Zeichenebene, auf der sich die Paare entsprechender Seiten der ursprünglich betrachteten Dreiecke ABC und $A'B'C'$ schneiden müssen. Damit ist der DESARGUESsche Satz vollständig bewiesen.

Sowohl das ebene wie auch das räumliche Dualitätsprinzip führen auf interessante Umformungen des DESARGUESschen Satzes. Zunächst sieht man leicht ein, daß von diesem Satz auch die Umkehrung richtig ist; aus der Existenz der DESARGUESschen Geraden, auf der sich Paare entsprechender Dreieckseiten schneiden, folgt die Existenz des DESARGUESschen Punktes, durch den die Verbindungslinien entsprechender Ecken laufen. Falls nun die Dreiecke in einer Ebene liegen, erweist sich die Umkehrung als identisch mit dem Satz, der nach dem ebenen Dualitätsprinzip aus dem DESARGUESschen Satz hervorgeht. Die folgende Gegenüberstellung möge das erläutern:

Es seien drei Punktepaare AA' , BB' , CC' gegeben, so daß die Verbindungslinien jedes Paares durch einen Punkt gehen. Dann müssen die drei Schnittpunkte der Geraden AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ auf einer Geraden liegen.

Es seien drei Geradenpaare aa' , bb' , cc' gegeben, so daß die Schnittpunkte jedes Paares auf einer Geraden liegen. Dann müssen die drei Verbindungslinien der Punkte (ab) und $(a'b')$, (bc) und $(b'c')$, (ca) und $(c'a')$ durch einen Punkt gehen.

Wir betrachten nun die Figur, die aus den Ecken und Seiten zweier in einer Ebene gelegener DESARGUESscher Dreiecke, den Verbindungslinien entsprechender Eckenpaare, den Schnittpunkten entsprechender Seitenpaare, dem DESARGUESschen Punkt O und der DESARGUESschen Geraden g (Abb. 135) besteht. Eine einfache Abzählung ergibt, daß diese

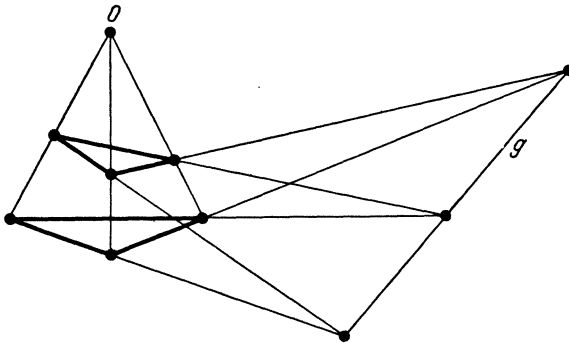


Abb. 135.

Figur eine Konfiguration (10_3) ist. Sie wird als DESARGUESsche Konfiguration bezeichnet. Sie hat mit der PASCALSchen Konfiguration die Eigenschaft gemeinsam, daß bei schrittweiser Konstruktion die letzte Incidenz stets von selbst erfüllt ist. Ferner ist die Konfiguration von DESARGUES ebenso wie die von PASCAL dual invariant. Denn sie stellt sowohl den DESARGUESschen Satz als auch seine Umkehrung dar, und diese ist zum Satz selbst das duale Gegenstück.

Nunmehr wenden wir auf den räumlichen Fall des DESARGUESschen Satzes das *räumliche* Dualitätsprinzip an. Dann erhalten wir folgende Gegenüberstellung:

Es seien drei Punktepaare AA' , BB' , CC' gegeben, so daß die Verbindungslinien jedes Paares durch einen Punkt gehen. Dann müssen die drei Schnittpunkte der Geraden AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ auf einer Geraden liegen.

Es seien drei Ebenenpaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ gegeben, so daß die Schnittgeraden jedes Paares in einer Ebene liegen. Dann müssen die drei Verbindungsebenen der Geraden $(\alpha\beta)$ und $(\alpha'\beta')$, $(\beta\gamma)$ und $(\beta'\gamma')$, $(\gamma\alpha)$ und $(\gamma'\alpha')$ durch eine Gerade gehen.

Der auf der rechten Seite aufgestellte Satz wird durch Abb. 136 veranschaulicht. An Stelle zweier Dreiecke treten bei diesem Satz zwei körperliche Ecken, die von den Ebenen α , β , γ und α' , β' , γ' gebildet werden. Ähnlich wie in der Ebene wollen wir nun die räumliche Figur betrachten, die aus den beiden DESARGUESschen Ecken, den Verbindungsebenen entsprechender Kanten, den Schnittgeraden entsprechender Seitenflächen, den „DESARGUESschen Ebene“ ($\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ in Abb. 136) und der „DESARGUESschen Geraden“ (VW in Abb. 136) besteht. Schneiden

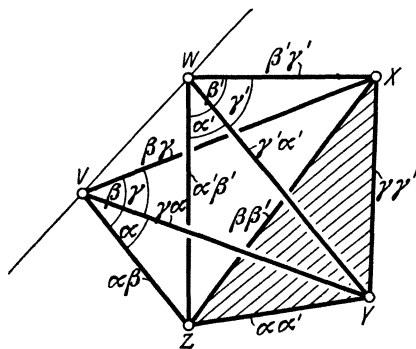


Abb. 136.

wir diese räumliche Figur durch eine beliebige Ebene, die nicht durch die Punkte V , W , X , Y , Z geht, so entsteht in dieser Ebene eine DESARGUESsche Konfiguration, da die DESARGUESschen Ecken in DESARGUESschen Dreiecken geschnitten werden. Den Ebenen und Geraden der räumlichen Figur entsprechen die Geraden und Punkte der ebenen Konfiguration. Nun besitzt aber die räumliche Figur eine innere Symmetrie, die sich an der ebenen Konfiguration nicht aufweisen läßt. Die räumliche Figur besteht nämlich aus den sämtlichen Verbindungsgeraden und Verbindungsebenen der fünf Punkte V , W , X , Y , Z . Diese fünf Punkte erscheinen dabei als völlig gleichberechtigt. Umgekehrt führt jedes räumliche Fünfeck auf die räumliche DESARGUESsche Figur, wenn man zwei Ecken willkürlich herausgreift¹. Da nun in der räumlichen Figur alle Geraden und Ebenen gleichberechtigt sind, müssen es auch die Punkte und Geraden der ebenen DESARGUESschen Konfigu-

¹ Nur müssen die fünf Punkte allgemeine Lage haben, d. h. es dürfen nicht vier unter ihnen in einer Ebene, also auch nicht drei unter ihnen auf einer Geraden liegen.

ration sein. Dadurch ist bewiesen, daß die DESARGUESSCHE Konfiguration regulär ist und daß wir den DESARGUESSCHEN Punkt oder die DESARGUESSCHE Gerade ganz beliebig in der Konfiguration wählen dürfen¹.

Wir wollen jetzt die DESARGUESSCHE Konfiguration als ein Paar von einander ein- und umbeschriebenen Fünfecken darstellen. Dazu müssen wir zunächst überhaupt Fünfecke aufsuchen, die in der Konfiguration liegen. Wir verlangen also, daß alle Ecken und Seiten des Polygons Konfigurationselemente sind und daß nicht drei aufeinanderfolgende Ecken auf einer Geraden liegen. Die Aufgabe vereinfacht sich nun wesentlich, wenn wir auf das Raumfünfeck zurückgehen. Den Ecken des ebenen Polygons entsprechen die Kanten des räumlichen. Da zwei konsekutive Ecken des ebenen Polygons auf einer Konfigurationsgeraden liegen sollen, so fallen die entsprechenden Kanten in eine Ebene, sind also incident. Damit nicht drei konsekutive Ecken in eine Gerade fallen, haben wir nur zu vermeiden, daß die entsprechenden Kanten in eine Ebene fallen; das tritt dann und nur dann ein, wenn drei aufeinanderfolgende Kanten ein Dreieck bilden. Wenn wir nun die Grundpunkte $VWXYZ$ des Raumfünfecks in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen, z. B. der hingeschriebenen, so erhalten wir einen geschlossenen Kantenzug, wie wir ihn brauchen; er liefert in der Konfiguration ein Fünfeck der verlangten Art. Die Kanten des Raumfünfecks, die bei dieser Durchlaufung unbenutzt geblieben sind, schließen sich aber zu einem zweiten räumlichen Polygon der gleichen Art zusammen. Durch jeden Grundpunkt des Raumfünfecks gehen nämlich zwei solche Kanten, da im ganzen vier Kanten von jedem Grundpunkt auslaufen und zwei bei der ersten Durchlaufung verbraucht waren. Dem zweiten Kantenzug entspricht in der Konfiguration ein zweites Fünfeck, und eine einfache Abzählung ergibt, daß dieses dem ersten einbeschrieben sein muß. Aus Symmetriegründen muß auch das erste dem zweiten einbeschrieben sein. In Abb. 137a, b ist die Beziehung zwischen dem räumlichen Schema und dem ebenen Fünfeckpaar zum Ausdruck gebracht.

Nun lassen sich noch andersartige Systeme von fünf Kanten des Raumfünfecks ausfindig machen, die einem ebenen in der Konfiguration ent-

¹ Als vollständiges räumliches n -Eck bezeichnet man das System aller Verbindungsgeraden und -ebenen von n Punkten allgemeiner Lage im Raum. Ebenso wie für $n = 5$ erhält man auch für beliebiges n stets eine Konfiguration, wenn man das vollständige n -Eck mit einer Ebene zum Schnitt bringt, die durch keinen Eckpunkt geht. Alle diese Konfigurationen sind regulär. Sie sind vom Typus $p = \frac{n(n-1)}{2}$, $g = n-2$, $g = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $\pi = 3$. Eine Konfiguration vom speziellen Typ $p = g$ ergibt sich also nur für den Fall $n = 5$. Zu weiteren regulären Konfigurationen gelangt man, wenn man von n -Ecken allgemeiner Lage in höherdimensionalen Räumen ausgeht. Alle diese Konfigurationen werden „polyedral“ genannt.

haltenen Fünfeck entsprechen. Ein Beispiel gibt Abb. 138. Man kann aber nachprüfen, daß sich dann die fünf übrigen Kanten auf keine Weise cyclisch so anordnen lassen, daß zwei konsekutive immer incident sind und drei konsekutive nie ein Dreieck bilden. Die zuerst angegebene Konstruktion erschöpft daher alle Möglichkeiten. Da nun jeder Per-

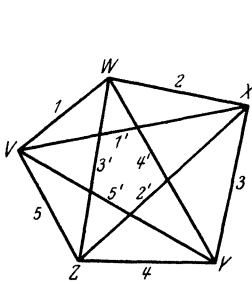


Abb. 137 a.

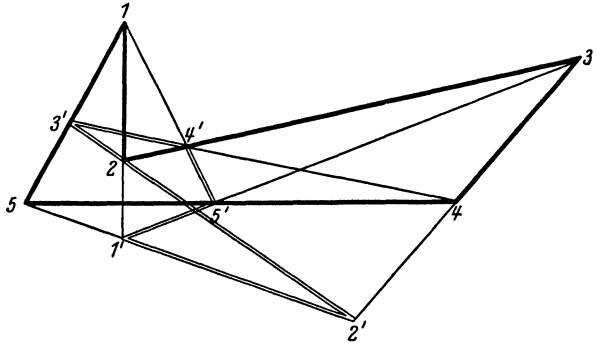


Abb. 137 b.

mutation der Grundpunkte ein Automorphismus der Konfiguration entspricht und da die Zerlegung des Raumpfünfecks in zwei Kantenzüge durch die Reihenfolge der Grundpunkte im ersten Kantenzug fest bestimmt ist, so sehen wir, daß es, von Automorphismen abgesehen, nur eine Möglichkeit der Zerlegung der DESARGUESSCHEN Konfiguration in zwei wechselseitig einbeschriebene Fünfecke gibt.

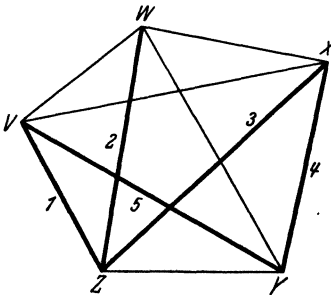


Abb. 138.

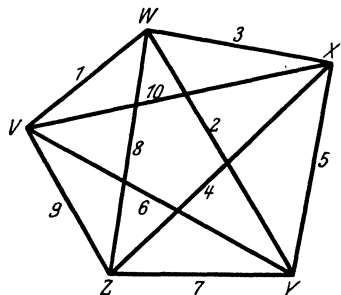


Abb. 139.

In ähnlicher Weise läßt sich die Frage erledigen, ob und auf wie viele Arten sich die DESARGUESSCHE Konfiguration als ein Zehneck auffassen läßt, das sich selbst ein- und umbeschrieben ist. Man findet, daß der entsprechende räumliche Kantenzug dann stets so angeordnet werden kann, wie in Abb. 139 angegeben. Es gibt also eine und, abgesehen von Automorphismen, auch nur eine Art, die DESARGUESSCHE Konfiguration als ein sich selbst ein- und umbeschriebenes Zehneck zu deuten (Abb. 140). Diese Figur verrät eine gewisse Regelmäßigkeit. Ich muß nämlich bei

der Durchlaufung des Zehnecks immer abwechselnd eine und drei Ecken überspringen, wenn ich zu der auf einer Seite liegenden weiteren Ecke gelangen will (Ecke 5 auf Seite 23, 8 auf 34, 7 auf 45, 10 auf 56 usw.). An dem räumlichen Schema erkennt man noch eine andere Eigenschaft dieses Zehnecks. Seine Seiten bilden nämlich, abwechselnd genommen, zwei einander einbeschriebene Fünfecke.

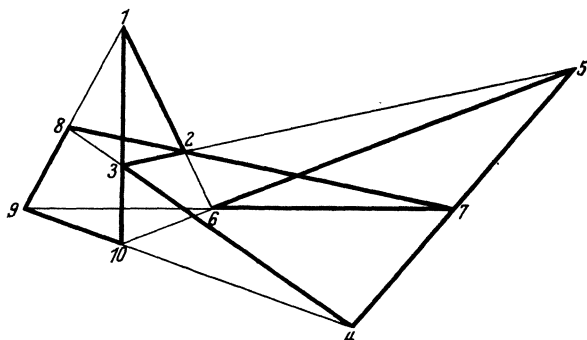


Abb. 140.

Die DESARGUESsche Konfiguration ist nicht die einzige Konfiguration (10_3) . Für das Schema einer solchen Konfiguration ergeben sich vielmehr noch neun andere Möglichkeiten. Eins dieser Schemata ist ebenso wie die Konfiguration (7_3) weder im Reellen noch im Komplexen realisierbar, da seine Gleichungen einen Widerspruch enthalten. Die acht übrigen dagegen sind ebenso wie die Konfigurationen (9_3) sämtlich mit dem Lineal allein konstruierbar. Im Gegensatz zur DESARGUESschen Konfiguration ist aber bei den acht übrigen realisierbaren Konfigurationen (10_3) die letzte Incidenz nicht von selbst erfüllt. Sie stellen daher keinen allgemeinen geometrischen Satz dar

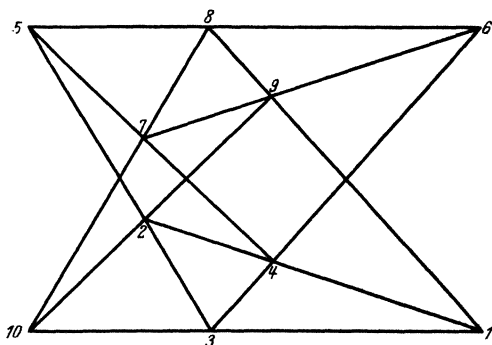


Abb. 141.

und sind dementsprechend weniger wichtig als die Konfiguration von DESARGUES. Eine dieser Konfigurationen ist in Abb. 141 gezeichnet. In der angegebenen Reihenfolge der Punkte durchlaufen, stellt diese Konfiguration wieder ein sich selbst ein- und umbeschriebenes Zehneck dar. In dieser Figur brauche ich aber jedesmal nur eine Ecke zu überspringen, um die auf jeder Seite gelegene weitere Ecke des Polygons zu erhalten. In dieser Vorschrift erscheinen alle Ecken als

gleichberechtigt und die Seiten als vertauschbar mit den Ecken; man kann daraus schließen, daß die Konfiguration regulär und dual invariant sein muß.

§ 20. Gegenüberstellung des PASCALSchen und des DESARGUESschen Satzes.

Zwischen dem Satz von DESARGUES und dem letzten Satz von PASCAL haben wir weitgehende Analogien gefunden. Beide Sätze wurden durch Projektion aus dem Raum bewiesen, beide Sätze führten auf Konfigurationen, und zwar auf Konfigurationen ähnlicher Art; denn beide Konfigurationen waren regulär, dual invariant, mit dem Lineal allein konstruierbar, bei beiden war die letzte Incidenz von selbst erfüllt, und beide konnten als sich selbst ein- und umbeschriebene Polygone aufgefaßt werden.

Dennoch besteht zwischen den beiden Sätzen ein prinzipieller Unterschied. Beim Beweise des DESARGUESschen Satzes haben wir eine räumliche Figur benutzt, die allein auf Grund der angeführten räumlichen Axiome der Verknüpfung ohne Voraussetzung weiterer Axiome konstruiert werden kann. Dagegen ergab sich die BRIANCHON-PASCALSche Konfiguration durch Betrachtung einer Fläche zweiter Ordnung. Scheinbar bildet zwar den Kernpunkt des Beweises eine reine Incidenzbetrachtung zwischen den Punkten, Geraden und Ebenen eines räumlichen Sechsecks, aber eine nähere Untersuchung lehrt, daß die Konstruktion derartiger räumlicher Sechsecke mit der Konstruktion einer Regelfläche zweiter Ordnung im wesentlichen gleichbedeutend ist und daß die Möglichkeit dieser Konstruktion sich aus den Axiomen der Verknüpfung allein nicht erweisen läßt.

Wir hatten im ersten Kapitel die Kegelschnitte und die Flächen zweiter Ordnung durch metrische Betrachtungen eingeführt. Es wäre also denkbar, daß der PASCALSche Satz sich nicht ohne Vergleichung von Strecken und Winkeln beweisen ließe. Man kann aber die Kurven und Regelflächen zweiter Ordnung auch ohne metrische Hilfsmittel erzeugen, indem man allein die Methode des Projizierens benutzt. Mit dieser Methode lassen sich nämlich die Punkte einer Geraden so auf die Punkte einer beliebigen Geraden abbilden, daß harmonische Quadrupel stets in harmonische Quadrupel übergehen und daß drei beliebig vorgegebene Punkte der einen Geraden auf drei beliebig vorgegebene Punkte der anderen Geraden abgebildet werden. Man sagt dann, daß die eine Gerade auf die andere projektiv abgebildet ist. Die Konstruktion einer solchen Abbildung erfordert allein die ebenen und räumlichen Axiome der Verknüpfung. Dagegen läßt sich mit deren alleiniger Hilfe nicht schließen, daß die Abbildung durch die beiden genannten Forderungen — Invarianz der harmonischen Lage und Vorgabe der Abbildung dreier

Punkte — eindeutig für alle Punkte der Geraden bestimmt ist. Zu diesem Zweck bedarf es eines Stetigkeitsaxioms, das wir weiter unten sogleich formulieren werden. Ist aber die Eindeutigkeit der projektiven Abbildung im angegebenen Sinne bewiesen, so läßt sich die allgemeinste Regelfläche zweiter Ordnung als die Fläche definieren, die von einer variablen Geraden überstrichen wird, die entsprechende Punkte zweier fester windschiefer projektiv bezogener Geraden verbindet. Aus der Eindeutigkeit der projektiven Abbildung folgt dann, daß auf einer solchen Fläche noch eine zweite Schar von Geraden verläuft. Sind die projektiv aufeinander bezogenen Geraden nicht windschief, sondern incident, so läuft die Verbindungsgerade entsprechender Punkte in einer Ebene und umhüllt eine Kurve zweiter Ordnung. Alle in der projektiven Geometrie wesentlichen Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung lassen sich aus dieser Definition ableiten.

Zur völligen Erfassung des Stetigkeitsbegriffes braucht man zwei verschiedene Axiome; beim Eindeutigkeitsbeweis der projektiven Abbildung kommt aber nur eines von ihnen, das *archimedische* Axiom, zur Anwendung. In arithmetischer Fassung lautet dieses Axiom: Es seien mir zwei beliebige positive Zahlen a und A gegeben, von denen a noch so klein und A noch so groß sein möge; ich kann dann trotzdem a so oft zu sich selbst addieren, daß die Summe nach endlich vielen Schritten größer wird als A :

$$a + a + a + \dots + a > A.$$

Dieses Axiom ist notwendig, wenn ich eine Entfernung durch eine andere Länge ausmessen will, es bildet also in dieser Form eine wesentliche Grundlage der Metrik. Von metrischen Begriffen unabhängig ist folgende Fassung des Axioms. Es seien mir zwei parallele Geraden gegeben (Abb. 142); ferner sollen auf einer dieser Geraden zwei verschiedene Punkte O und A liegen. Wir ziehen nun von dem Punkte O nach einem beliebigen Punkt B_1 der anderen Geraden die Verbindungsgerade, und B_1 verbinden wir wiederum geradlinig mit einem Punkt C_1 der ersten Geraden, der zwischen O und A liegt. Dann ziehen wir durch C_1 die Parallele zu OB_1 , welche die andere Gerade in B_2 treffen möge; von B_2 ziehen wir wieder die Parallele zu B_1C_1 , die die erste Gerade in C_2 treffen möge. Wenn wir so immer weitere Parallelen zu OB_1 und B_1C_1 ziehen, so besagt das archimedische Axiom, daß wir schließlich nach endlich vielen Schritten zu einem Punkt C_r kommen, der nicht mehr zwischen O und A liegt. In dieser Formulierung haben wir die Vorstellung verwendet, daß ein Punkt einer Geraden zwischen zwei anderen Punkten dieser Geraden liegt. Aussagen dieser

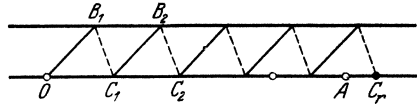


Abb. 142.

Art werden durch eine andere Axiomgruppe, die Axiome der Anordnung, präzisiert, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Den Parallelenbegriff dagegen haben wir nur verwendet, um das Axiom kürzer und anschaulicher formulieren zu können; es genügt in der projektiven Geometrie, die Möglichkeit einer Konstruktion zu fordern, wie sie durch Abb. 143 angedeutet ist. Diese Figur ergibt sich aus Abb. 142 durch Zentralprojektion auf eine andere Ebene.

Die ebenen und räumlichen Axiome der Verknüpfung, die Anordnungsaxiome und das archimedische Axiom genügen, um die Eindeutigkeit der projektiven Abbildung zu beweisen; allerdings ist dieser Beweis außerordentlich langwierig und mühsam. Aus der Eindeutigkeit der

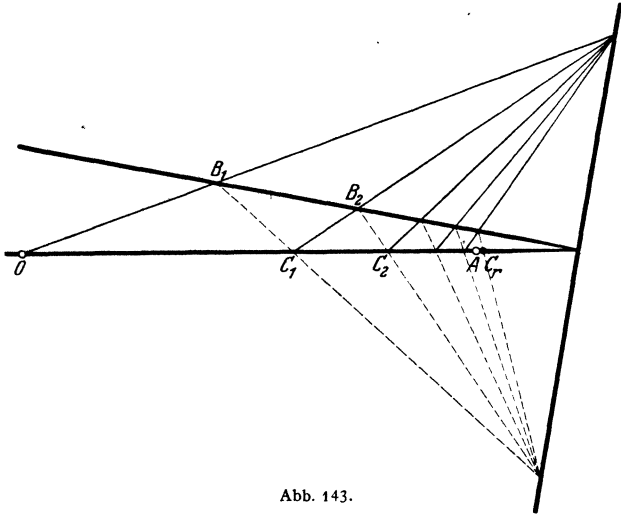


Abb. 143.

projektiven Abbildung in der Ebene läßt sich dann der letzte Satz von PASCAL und von BRIANCHON (und zwar ohne räumliche Hilfskonstruktion) beweisen.

Der Satz von DESARGUES läßt sich im Raum allein mit den Axiomen der Verknüpfung beweisen; wenn ich dagegen die ebene Fassung des Satzes beweisen will, ohne in den Raum herauszugehen, kann ich nicht ohne die Axiome der Kongruenz auskommen, auch wenn ich das archimedische Axiom und die Anordnungsaxiome voraussetze. Dagegen genügen zum Beweise die ebenen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome sowie die Kongruenzaxiome; das archimedische Axiom ist entbehrlich.

Bei Fortlassung der räumlichen Verknüpfungsaxiome verhält sich der letzte PASCALSche Satz wie der DESARGUESsche. Man braucht dann zum Beweis die ebenen Axiome der Verknüpfung, Anordnung und Kongruenz. Trotzdem läßt sich ein wesentlicher Unterschied beider Sätze auch in der Ebene ohne räumliche Hilfsbetrachtungen feststellen. Setzt

man nämlich in der Ebene die Verknüpfungsaxiome und die Gültigkeit des DESARGUESSchen Satzes voraus, so läßt sich der PASCALSche Satz nicht beweisen. Dagegen läßt sich der DESARGUESSche Satz beweisen, wenn man die ebenen Verknüpfungsaxiome und den PASCALSchen Satz voraussetzt. Wir wollen den Beweis für den Spezialfall führen, daß die DESARGUESSche Gerade die unendlich ferne Gerade der Ebene ist. Diese Annahme dient wie bei der Aufstellung des Archimedischen Axioms nur dazu, den Beweis kürzer und anschaulicher zu formulieren. Wir setzen also voraus (Abb. 144):

Die drei Geraden AA' , BB' , CC' gehen alle durch einen Punkt O . Ferner ist $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$. Es ist mit Hilfe des letzten PASCALSchen Satzes zu beweisen, daß dann auch gilt: $BC \parallel B'C'$.

Zum Beweise ziehe ich durch A die Parallele zu OB , die $A'C'$ in L und OC in M treffen möge. Ferner möge die Verbindungsgerade LB' die Gerade AB in N treffen. Auf diese Figur wende ich nun dreimal den Satz von PASCAL an, und zwar in der speziellen Form, die S. 105 als Satz von PAPPUS erwähnt war. Ein PASCALSches Sechseck ist zunächst $ONALA'B'$, da je drei dieser Punkte abwechselnd auf je einer Geraden liegen. Nun ist $NA \parallel A'B'$ nach Voraussetzung und $AL \parallel B'O$ nach Konstruktion. Nach dem Satz von PAPPUS ist daher auch das dritte Paar gegenüberliegender Seiten dieses Sechsecks parallel, also $ON \parallel AC$. Ich betrachte nunmehr das PASCALSche Sechseck $ONMACB$. In ihm ist $ON \parallel AC$, wie eben bewiesen, und $MA \parallel BO$ nach Voraussetzung. Nach dem Satz von PAPPUS ist daher $NM \parallel CB$. Zum Schluß betrachten wir das PASCALSche Sechseck $ONMLC'B'$. In ihm ist $ON \parallel LC'$ und $ML \parallel B'O$. Daraus folgt wie oben: $NM \parallel C'B'$. Da aber beim vorigen Schritt auch bewiesen war: $NM \parallel CB$, so folgt die Behauptung: $BC \parallel B'C'$.

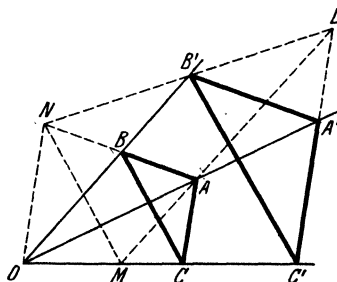


Abb. 144.

(Aus „HILBERT, Grundlagen der Geometrie“ 7. Aufl., S. 111. Teubner 1930.)

Nun lassen sich in der Ebene alle Schnittpunktsätze aus den Sätzen von DESARGUES und PASCAL ableiten. Da wir jetzt den Satz von DESARGUES als eine Folge des PASCALSchen erkannt haben, so können wir sagen, daß der Satz von PASCAL der einzig wesentliche Schnittpunktsatz der Ebene ist, daß also die Konfiguration $(9_3)_1$ die wichtigste Figur der ebenen Geometrie darstellt.

§ 21. Vorbemerkungen über räumliche Konfigurationen.

Man kann den Konfigurationsbegriff von der Ebene auf den Raum verallgemeinern. Ein System von Punkten und Ebenen wird als eine räumliche Konfiguration bezeichnet, wenn jeder Punkt mit gleich vielen

Ebenen und jede Ebene mit gleich vielen Punkten incident ist. Ein einfaches Beispiel einer solchen Konfiguration liefert der räumliche DESARGUESSCHE Satz. Als Konfigurationspunkte definieren wir dabei dieselben zehn Punkte wie bei der entsprechenden ebenen Figur. Als Konfigurationsebenen nehmen wir die zwei Ebenen der beiden Dreiecke und die drei Ebenen, durch die die Dreiecke vom DESARGUESSCHEN Punkt aus projiziert werden. Dann gehen durch jeden Punkt drei Ebenen, und in jeder Ebene liegen sechs Punkte. Aus demselben Grund wie bei den ebenen Konfigurationen erfüllen die vier für diese Konfiguration charakteristischen Zahlen die Gleichung $5 \cdot 6 = 10 \cdot 3$.

Neben den Konfigurationen aus Punkten und Ebenen kann man aber im Raum auch Konfigurationen betrachten, die wie in der Ebene aus Punkten und Geraden bestehen, wobei jeder Punkt mit gleich viel Geraden und jede Gerade mit gleich viel Punkten inciidiert. Diese beiden verschiedenen Auffassungen kann man oft auf eine und dieselbe Figur anwenden; so liefert die soeben betrachtete räumliche DESARGUESSCHE Figur eine räumliche Punkt-Geraden-Konfiguration, die mit der ebenen DESARGUESSCHEN Konfiguration im wesentlichen identisch ist. Entsprechend bilden auch in vielen allgemeineren Fällen gewisse Schnittgeraden der in einer Punkt-Ebenen-Konfiguration auftretenden Ebenen zusammen mit den Konfigurationspunkten eine Punkt-Geraden-Konfiguration, und umgekehrt kann man oft eine Punkt-Geraden-Konfiguration in eine Punkt-Ebenen-Konfiguration verwandeln, indem man gewisse Verbindungsebenen incidenter Konfigurationsgeraden hinzunimmt.

Beschränken wir uns ähnlich wie in der Ebene zunächst auf den Fall, daß die Anzahl der Punkte und Ebenen gleich ist, daß wir also eine Punkt-Ebenen-Konfiguration von p Punkten und p Ebenen vor uns haben. Ist dann jeder Punkt mit n Ebenen incident, so muß aus demselben Grund wie in der Ebene auch jede Konfigurationsebene mit n Punkten incident sein; wir wollen solche Konfigurationen mit (p_n) bezeichnen.

Um die trivialen Fälle auszuschließen, müssen wir annehmen, daß n mindestens 4 ist. Für $p \leq 7$ ist eine Konfiguration (p_4) nicht möglich. Für $p = 8$ dagegen lassen sich bereits fünf verschiedene Schemata aufstellen, die sämtlich geometrisch verwirklicht werden können. Eine dieser Konfigurationen (8_4) , die sog. MÖBIUSSCHE Konfiguration, ist geometrisch wichtig, da ihre letzte Incidenz von selbst erfüllt ist, sie also einen geometrischen Satz enthält. Diese Konfiguration besteht aus zwei Tetraedern, die einander zugleich ein- und umbeschrieben sind.

Wenn wir zu höheren Konfigurationen übergehen, wird die Zahl der Möglichkeiten immer größer, so daß sich bald keine Übersicht mehr behalten läßt. So gibt es z. B. bereits sechsundzwanzig geometrisch realisierbare Konfigurationen (9_4) . Wir wollen daher nur zwei besonders wichtige räumliche Konfigurationen näher betrachten, die auch bei

andersartigen mathematischen Problemen eine Rolle spielen. Es sind dies die REYESche Konfiguration und die SCHLÄFLISCHE Doppelsechs.

§ 22. Die REYESche Konfiguration.

Die REYESche Konfiguration besteht aus zwölf Punkten und zwölf Ebenen. Sie enthält einen projektiv-geometrischen Satz, so daß die letzte Incidenz stets von selbst erfüllt ist, wie wir auch die Lage der Punkte und Ebenen annehmen. Um aber eine anschauliche Vorstellung

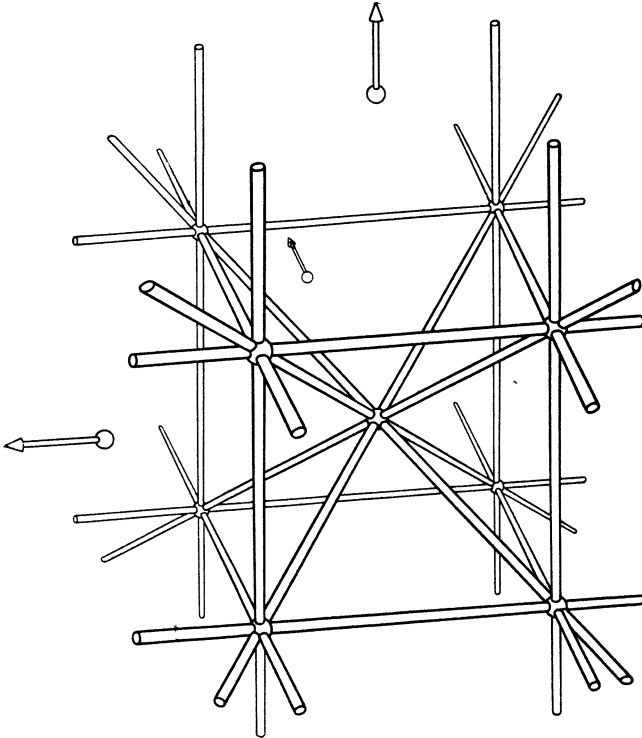


Abb. 145.

von der REYESchen Konfiguration zu gewinnen, wollen wir zunächst den einzelnen Konfigurationspunkten eine spezielle symmetrische Anordnung geben.

Als Konfigurationspunkte nehmen wir die acht Eckpunkte eines Würfels, ferner den Würfelmittelpunkt, und schließlich die drei unendlich fernen Punkte, in denen sich je vier parallele Würfelfanten treffen (Abb. 145). Als Konfigurationsebenen nehmen wir die sechs Würfelflächen und die sechs Diagonalebenebenen, die durch je zwei gegenüberliegende Kanten laufen. In dem so entstandenen Gebilde liegen auf jeder Ebene sechs Punkte; nämlich auf den Würfebenen vier Eck-

punkte und zwei unendlich ferne Punkte und auf den Diagonalebene der Mittelpunkt des Würfels, vier Eckpunkte und ein unendlich ferner Punkt. Andererseits schneiden sich auch in jedem Punkt sechs Ebenen; nämlich im Würfelmittelpunkt die sechs Diagonalebene, in jeder Würfelsecke drei Diagonalebene und drei Würfebenen, in den unendlich fernen Punkten vier Würfebenen und zwei Diagonalebene. Wir haben also durch unsere Konstruktion in der Tat eine Punkt-Ebenen-Konfiguration gewonnen, und zwar ist ihr Symbol (12_6) .

Wir können aber das Gebilde auch als Punkt-Geraden-Konfiguration auffassen, indem wir einige Schnittgeraden der vorher angegebenen Ebenen auswählen, und zwar die zwölf Kanten und vier Hauptdiagonalen des Würfels. Jede dieser Geraden enthält drei Konfigurationspunkte; die Kanten nämlich enthalten je zwei Ecken und einen unendlich fernen Punkt, die Diagonalen je zwei Ecken und den Mittelpunkt. Ferner gehen durch jeden Punkt vier Geraden; nämlich durch die Ecken je drei Kanten und eine Hauptdiagonale, durch den Mittelpunkt vier Hauptdiagonalen und durch jeden unendlich fernen Punkt je vier Kanten. Die Punkte und Geraden der REYESchen Konfiguration bilden also eine Konfiguration $(12_4, 16_3)$.

Ferner läßt sich abzählen, daß durch jede Gerade drei Ebenen gehen und in jeder Ebene vier Geraden liegen. Sie bilden mit den sechs in dieser Ebene gelegenen Punkten die Geraden und Punkte eines vollständigen Vierseits.

Die REYESche Konfiguration tritt in mehreren geometrischen Zusammenhängen auf, z. B. im System der Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln, das wir jetzt betrachten wollen.

Als Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise oder Kugeln bezeichnet man bekanntlich die beiden Punkte, die die Verbindungsstrecke der Kreis- oder Kugelmittelpunkte innen und außen im Radienverhältnis teilen. Der Punkt innerhalb der Strecke heißt der innere, der Punkt auf der Verlängerung der äußere Ähnlichkeitspunkt. Wenn zwei Kreise außerhalb einander liegen, so treffen sich im inneren Ähnlichkeitspunkt die beiden Geraden, die die Kreise zu verschiedenen Seiten berühren, im äußeren Ähnlichkeitspunkt die beiden Geraden, die die Kreise von derselben Seite her berühren (Abb. 146). Durch Rotation dieser Figur um die Mittellinie ergibt sich eine analoge Tangenteneigenschaft für die Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. (Doch gibt es viele gemeinsame Tangenten der beiden Kugeln, die durch keinen Ähnlichkeitspunkt gehen). Wir wollen mit (ik) den äußeren, mit $(ik)'$ den inneren Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise oder Kugeln i, k bezeichnen.

Wir betrachten nun drei Kreise oder Kugeln 1, 2, 3. Sie besitzen drei innere und drei äußere, also sechs Ähnlichkeitspunkte; wir denken uns die Mittelpunkte auf einem Dreieck und nicht in einer Geraden angeordnet, so daß keine zwei Ähnlichkeitspunkte zusammenfallen

und nicht alle sechs auf einer Geraden liegen können. Nach einem Satz von MONGE liegen dann stets die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte (12), (23) und (31) auf einer Geraden (Abb. 147) sowie jeder äußere Ähnlichkeitspunkt mit den beiden inneren Ähnlichkeitspunkten, die nicht mit ihm zusammengehören, z. B. (12)', (23)' und (31)*.

Alle Ähnlichkeitspunkte liegen demnach auf vier Geraden, die man die Ähnlichkeitsachsen von 1, 2, 3 nennt. Man kann den Satz von MONGE dahin zusammenfassen, daß die Ähnlichkeitspunkte und -achsen

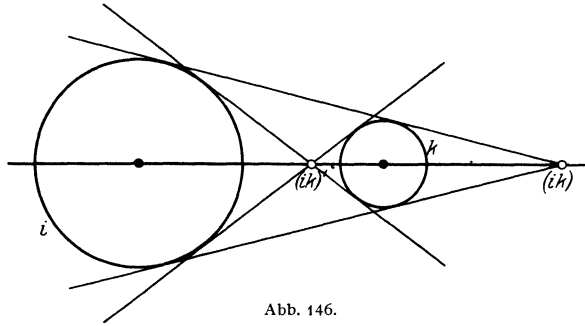


Abb. 146.

die sechs Punkte und vier Geraden eines vollständigen Vierseits bilden, in dem die Mittelpunkte von 1, 2, 3 das Diagonaldreieck darstellen. Wir wollen auch für die Ähnlichkeitsachsen Symbole einführen; wir bezeichnen mit (123) die Verbindungsgerade der äußeren Ähnlichkeitspunkte, mit (1'23) die Achse, auf der (23), (12)' und (13)' liegen usw.

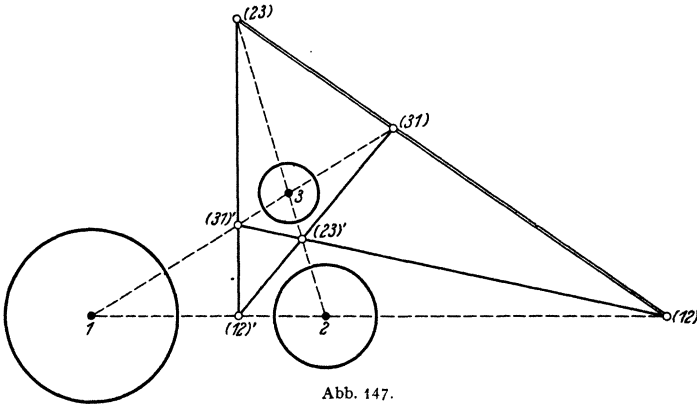


Abb. 147.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns zu vier Kugeln 1, 2, 3, 4, deren Mittelpunkte nicht alle in einer Ebene liegen, so daß also auch

* Beweis: Sind r_1, r_2, r_3 die Radien von 1, 2, 3, so werden die Seiten des von den Mittelpunkten gebildeten Dreiecks durch die äußeren Ähnlichkeitspunkte in den Verhältnissen $-\frac{r_1}{r_2}, -\frac{r_2}{r_3}, -\frac{r_3}{r_1}$ geteilt. Da das Produkt dieser Verhältnisse -1 beträgt, liegen die äußeren Ähnlichkeitspunkte nach dem Satz von MENELAUS auf einer Geraden. Ersetzt man zwei äußere Ähnlichkeitspunkte durch die entsprechenden inneren, so ändern zwei der Teilungsverhältnisse ihr Vorzeichen. Das Produkt bleibt also -1 , d. h. wir haben wieder drei Punkte einer Geraden erhalten.

nicht drei Mittelpunkte in eine Gerade fallen können (vgl. Abb. 148, S. 124). Ich behaupte, daß die Gesamtheit der Ähnlichkeitspunkte und -achsen dieser Kugeln die Punkte und Geraden einer REYESchen Konfiguration bilden. Da ich die Ziffern 1, 2, 3, 4 zu sechs verschiedenen Paaren zusammenfassen kann und jedes Paar einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt darstellt, gibt es im ganzen zwölf Ähnlichkeitspunkte. Ebenso haben die Achsen die richtige Anzahl sechzehn. Ich kann nämlich aus den vier Ziffern vier verschiedene Tripel bilden, und jedes Tripel stellt vier verschiedene Achsen dar, z. B. (123), (1'23), (12'3) und (123'). Jede Achse ist mit drei Punkten incident, z. B. (123) mit (12), (23), (13). Ebenso ist jeder Punkt mit vier Achsen incident, z. B. (12) mit (123), (123'), (124), (124)' oder (12)' mit (1'23), (12'3), (1'24), (12'4).

Die Ähnlichkeitspunkte und -achsen bilden also in der Tat eine Konfiguration (12₄, 16₃). Um sie als identisch mit der REYESchen Konfiguration zu erkennen, müssen wir noch zwölf geeignete Ebenen ausfindig machen. Wir nehmen zunächst die vier Ebenen, in denen je drei Kugelmittelpunkte liegen; in jeder dieser Ebenen bilden die mit ihr incidenten Punkte und Achsen wie in der REYESchen Konfiguration ein Vierseit. Um nun noch acht weitere solche Ebenen zu finden, nehmen wir einfach sämtliche noch fehlenden Ebenen, die von irgend zwei in einem Konfigurationspunkt incidenten Achsen aufgespannt werden. Diese Achsen müssen jedenfalls zu verschiedenen Zahlentripeln gehören, denn zwei Achsen des gleichen Tripels, z. B. (123) und (1'23) spannen stets die Ebene dreier Kugelmittelpunkte auf (in unserem Beispiel die Ebene 1, 2, 3), führen also zu nichts Neuem. Nehmen wir zunächst zwei Achsen, die nur äußere Ähnlichkeitspunkte enthalten, etwa (123) und (124). Sie spannen eine Ebene auf, die durch (12) geht. In dieser Ebene liegen noch die vier weiteren Punkte jener Achsen: (13), (23), (14), (24). Nun liegen aber (23) und (24) auf der weiteren Achse (234), die auch den letzten noch fehlenden äußeren Ähnlichkeitspunkt (34) enthält. Die sechs äußeren Ähnlichkeitspunkte liegen also sämtlich in einer und derselben Ebene, die wir betrachtet haben. An Achsen enthält diese Ebene außer (123) und (124) auch die übrigen „äußeren“ Achsen (134) und (234); sie ist also in der Tat mit sechs Punkten und vier Geraden incident. Wir nehmen jetzt den Fall einer äußeren und einer inneren Achse, die zu verschiedenen Zahlentripeln gehören und incident sind; da sie sich nur in einem äußeren Ähnlichkeitspunkt treffen können und da alle Ziffern gleichberechtigt auftreten, dürfen wir (123) und (124)' wählen. Auf diesen Achsen liegen außer dem Schnittpunkt (12) noch (13), (23), (14)', (24)'. Wie oben schließen wir, daß noch die Achsen (134') und (234') und der Punkt (34)' auf dieser Ebene liegen. Wir finden also, daß die drei inneren Ähnlichkeitspunkte, die die Kugel 4 mit den übrigen Kugeln bestimmt, mit den drei äußeren

Ähnlichkeitspunkten des Tripels 1, 2, 3 in einer Ebene liegen. Es muß vier Ebenen dieser Art geben. In unserer Betrachtung fehlt noch der Fall, daß wir von zwei inneren incidenten Achsen ausgehen; nun liegen zwar auf der soeben betrachteten Ebene drei paarweise incidente innere Achsen; sie haben aber stets einen inneren Ähnlichkeitspunkt gemein. Wir gehen daher nunmehr von zwei Achsen, z. B. (123') und (124') aus, die sich in einem äußeren Ähnlichkeitspunkt — in diesem Fall (12) — schneiden. In der von ihnen bestimmten Ebene liegen außer dem Schnittpunkt (12) noch die Punkte (13)', (23)', (14)', (24)'. In dieser Ebene liegen also auch die Achsen (1'34) und (2'34) sowie der Punkt (34). Diese Ebene enthält demnach vier innere Achsen; sie trifft von den Kanten des Tetraeders 1, 2, 3, 4 die Gegenkanten 1, 2 und 3, 4 in den äußeren, die übrigen vier Kanten in inneren Ähnlichkeitspunkten. Es muß drei Ebenen dieser Art geben, da jedes Tetraeder drei Paare gegenüberliegender Kanten enthält. Wir haben also durch unser Verfahren im ganzen $1 + 4 + 3 = 8$ Ebenen erhalten.

Der Übersicht halber wollen wir noch die beiden Schemata aufstellen, die die Incidenz zwischen den Punkten und Ebenen und zwischen den Achsen und Ebenen angeben. Die Seitenflächen des Tetraeders sind mit *I, II, III, IV* bezeichnet, wobei *I* dem Punkt 1 gegenüberliegt. Die Ebene der äußeren Ähnlichkeitspunkte ist e_a genannt, die vier Ebenen mit je drei äußeren und drei inneren Ähnlichkeitspunkten sind je nach der ausgezeichneten Ziffer e_1 bis e_4 genannt, die drei übrigen Ebenen sind entsprechend der Kantenpaarung des Tetraeders mit (12, 34), (13, 24), (14, 23) bezeichnet. Bei der Bezeichnung der Punkte und Geraden sind die Klammern der Kürze halber fortgelassen.

		Ebenen											
		<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	e_a	e_1	e_2	e_3	e_4	(12,34)	(13,24)	(14,23)
Punkte	23	13	12	12	12	23	13	12	12	12	12	13	14
	24	14	14	13	13	24	14	14	13	34	24	23	
	34	34	24	23	14	34	34	24	23	13'	12'	12'	
	23'	13'	12'	12'	23	12'	12'	13'	14'	14'	14'	13'	
	24'	14'	14'	13'	24	13'	23'	23'	24'	23'	23'	24'	
	34'	34'	24'	23'	34	14'	24'	34'	34'	24'	34'	34'	

		Ebenen											
		<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	e_a	e_1	e_2	e_3	e_4	(12,34)	(13,24)	(14,23)
Geraden	234	134	124	123	123	234	134	124	123	123'	12'3	1'23	
	2'34	1'34	1'24	1'23	124	1'23	12'3	123'	124'	124'	1'24	12'4	
	23'4	13'4	12'4	12'3	134	1'24	12'4	13'4	134'	1'34	134'	13'4	
	234'	134'	124'	123'	234	1'34	2'34	23'4	234'	2'34	23'4	234'	

In Abb. 148 ist die Konfiguration dargestellt¹. Daß es dieselbe Konfiguration ist wie Abb. 145, erkennt man anschaulich, wenn man sich (12), (12)' und (34) in paarweise senkrechten Richtungen ins Unendliche gerückt denkt; dann werden das die drei unendlich fernen Konfigurations-

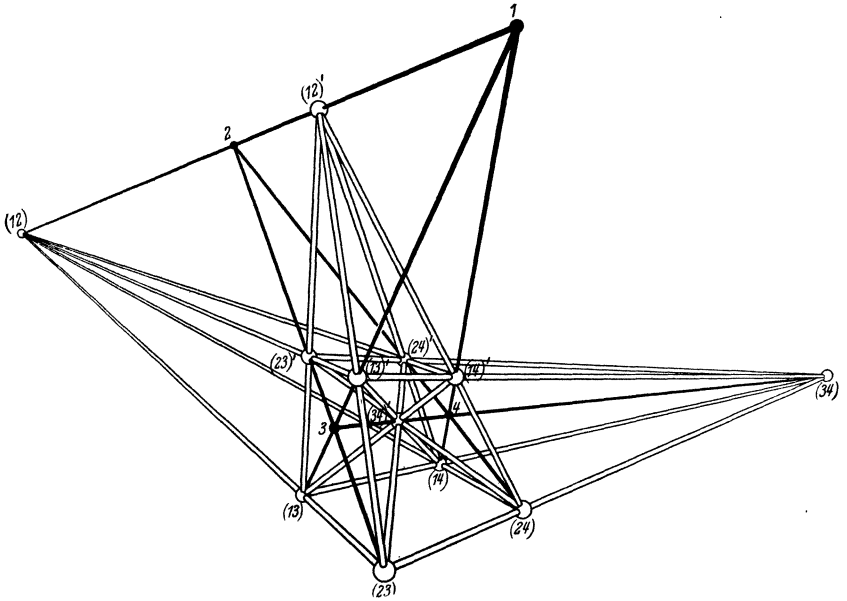


Abb. 148.

punkte von Abb. 145. Die acht Punkte (13), (14), (23), (24), (13)', (14)', (23)', (24)' werden die Würfecken, und (34)' wird der Würfelmittelpunkt. In diesem Falle rücken aber auch die Punkte 1 und 2 ins Unendliche. Um auch zu Abb. 145 vier zugehörige Kugeln zu bestimmen, muß man daher die Definition des Ähnlichkeitspunktes durch Hinzunahme von Grenzfällen erweitern.

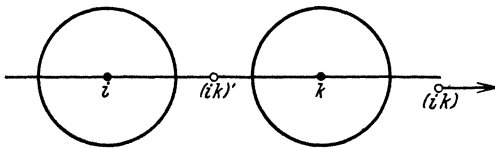


Abb. 149.

Zuächst hat man als äußeren Ähnlichkeitspunkt gleich großer Kreise oder Kugeln den unendlich fernen Punkt auf der Mittellinie anzusehen (Abb. 149). Betrachtet

man ferner eine Kugel k und eine Ebene e (Abb. 150), so hat man als Ähnlichkeitspunkte dieser beiden Gebilde die beiden Endpunkte (ke) und $(ke)'$ des auf e senkrechten Durchmessers von k zu wählen. Schneidet e näm-

¹ Faßt man Abb. 148 als ebene Figur auf, so stellt sie eine ebene Konfiguration $(12_4 16_3)$ dar, die aus den Ähnlichkeitspunkten und Achsen vierer in einer Ebene gelegener Kreise besteht. Die Mittelpunkte sind wieder 1, 2, 3, 4, die Radien kann man ebenso groß wie im räumlichen Fall wählen.

lich die Verlängerung dieses Durchmessers in P und ersetzt man e durch eine Schar immer größerer Kugeln K , die e in P berühren, so erkennt man, daß die Ähnlichkeitspunkte von k und K gegen (ke) und $(ke)'$ rücken. Für zwei Ebenen e und f endlich, die sich in einer Geraden g schneiden (Abb. 151), hat man als Ähnlichkeitspunkte die unendlich fernen Punkte anzusehen, deren Richtungen auf g senkrecht stehen und die beiden von e und f gebildeten Winkel halbieren. Man kann auch diese Definition durch Grenzübergang rechtfertigen, indem man g durch den Schnittkreis zweier immer größerer, jedoch stets paarweise kongruenter Kugeln ersetzt, die e und f in einem festen Punkt von g berühren.

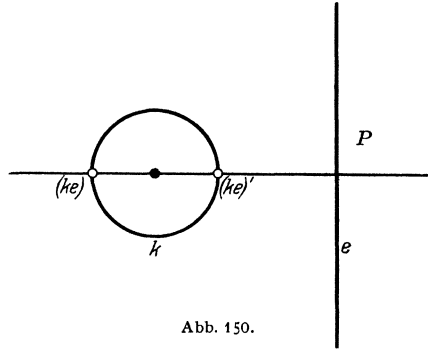


Abb. 150.

Mit Hilfe dieser Definitionen kann ich die REYESche Konfiguration auch in der ursprünglich betrachteten Gestalt als System von Ähnlichkeitspunkten auffassen. Um die Mittelpunkte der vorderen und hinteren Würfeläche (Abb. 145) schlage ich die Kugeln 3 und 4. Ihre Radien wähle ich gleich groß, und zwar so groß, daß jede Kugel durch die vier Ecken der zugehörigen Fläche geht. Senkrecht zu den Diagonalen dieser Flächen lege ich in beliebigem Abstand die Ebenen 1 und 2. Dann erscheinen die Konfigurationspunkte als Ähnlichkeitspunkte von 1, 2, 3, 4 in der zu Abb. 148 analogen Verteilung.

Es liegt nahe, statt dieses Ausartungsfalles vier gleich große Kugeln zugrunde zu legen, deren Mitten ein reguläres Tetraeder bilden. Die äußeren Ähnlichkeitspunkte müssen dann in die unendlich fernen Punkte der sechs Tetraederkanten fallen, die unendlich ferne Ebene gehört also der Konfiguration an, als Ebene e_a in unserer Bezeichnung. Die inneren Ähnlichkeitspunkte sind die Tetraederkantenmitten. Diese sechs Punkte bilden (Abb. 152) die Ecken eines regulären Oktaeders. Seine Seitenflächen sind sämtlich Konfigurationsebenen; es sind nämlich die Tetraederflächen I, II, III, IV und die in unserem Schema mit e_1, e_2, e_3, e_4 bezeichneten Ebenen. Die noch fehlenden drei Ebenen sind die drei Symmetrieebenen des Oktaeders. Die Geraden der Konfiguration sind die vier unendlich fernen Geraden der Tetraederflächen (äußere Ähnlichkeitsachsen) und die zwölf Oktaederkanten (innere Ähnlichkeitsachsen).

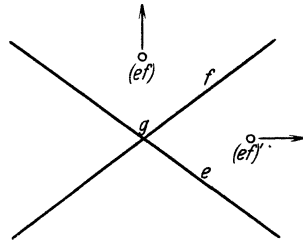


Abb. 151.

Wir haben schon im ersten Kapitel auf die Verwandtschaft zwischen Würfel und Oktaeder hingewiesen. Nach den Ausführungen von § 19 können wir sagen, daß Würfel und Oktaeder einander dual entsprechen. Ebenso läßt es sich nun allgemeiner zeigen, daß die Punkte und Ebenen von Abb. 152 zu den Ebenen und Punkten von Abb. 145 dual sind; die Ecken und Flächen des Würfels entsprechen den Flächen und Ecken des Oktaeders, der Würfelmittelpunkt und die sechs mit ihr incidenten Ebenen entsprechen der unendlich fernen Ebene und den sechs mit ihr incidenten Punkten der Oktaederfigur, die drei unendlich fernen Punkte beim Würfel entsprechen den drei Symmetrieebenen des Oktaeders¹.

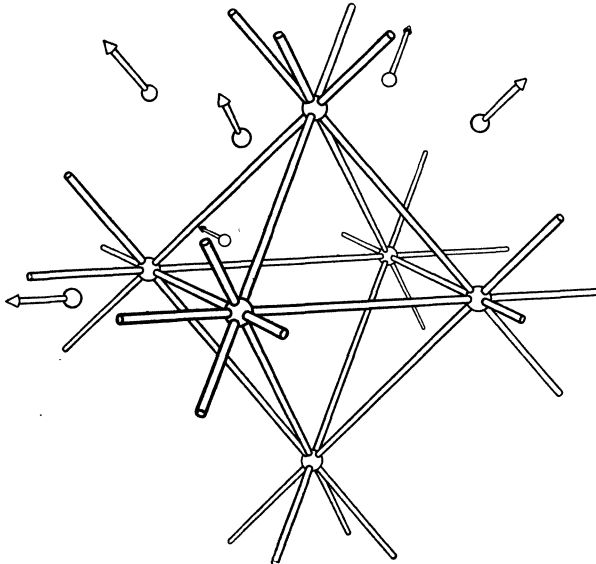


Abb. 152.

Damit ist bewiesen, daß die REYESche Konfiguration dual invariant ist. Nun werden zwar bei der dualen Zuordnung zwischen Würfel und Oktaeder die Ebenen und Punkte einer REYESchen Konfiguration auf die Punkte und Ebenen einer anderen von der ersten ganz verschieden gestalteten REYESchen Konfiguration abgebildet; im Sinne der projektiven Geometrie sind aber alle REYESchen Konfigurationen als identisch anzusehen².

Wir wollen nun auch die andere wichtige Symmetrieeigenschaft, die wir bei den ebenen Konfigurationen kennengelernt haben, an der

¹ Diese Zuordnung entsteht durch Polarenverwandtschaft an der dem Würfel eingeschriebenen Kugel.

² Eine projektive Verallgemeinerung der Oktaederfigur erhält man, wenn man von irgendeinem projektiven Koordinatensystem im Raume ausgeht. Die Einheitspunkte der sechs Koordinatenachsen sowie deren Schnittpunkte mit der Einheitsene sind stets die Punkte einer REYESchen Konfiguration.

REYESchen Konfiguration nachweisen; wir wollen zeigen, daß diese Konfiguration regulär ist. Aus dem Bisherigen läßt sich das keineswegs vermuten, denn in bezug auf das System der Ähnlichkeitspunkte zerfallen die Ebenen in vier verschiedene Klassen, und bei der Verwirklichung der Konfiguration durch Würfel und Oktaeder spielen sowohl die Punkte als auch die Ebenen verschiedenartige Rollen. Wir wollen nun im folgenden Abschnitt eine Herleitung der REYESchen Konfiguration geben, bei der die Gleichberechtigung aller Elemente evident ist. Zu diesem Zweck müssen wir uns näher mit den regulären Körpern des drei- und des vierdimensionalen Raums vertraut machen. Wie man nämlich die Körper in die Ebene projizieren kann, so lassen sich die Gebilde des vierdimensionalen Raums in den dreidimensionalen Raum projizieren, und eins dieser Gebilde liefert bei geeigneter Projektionsmethode die REYESche Konfiguration als Bild.

§ 23. Reguläre Körper und Zelle und ihre Projektionen.

Im ersten Kapitel haben wir die fünf regulären Körper des dreidimensionalen Raumes zusammengestellt. Unter ihnen nimmt das Tetraeder eine Sonderstellung ein, weil es zu sich selbst dual ist, während sich die übrigen vier Körper paarweise dual entsprechen; das Oktaeder dem Würfel und das Dodekaeder dem Ikosaeder. Vielleicht hängt mit dieser Besonderheit des Tetraeders eine zweite Erscheinung zusammen, wodurch sich dieser Körper von den vier anderen unterscheidet. Diese nämlich sind als „zentrisch symmetrisch“ zu bezeichnen, weil paarweise die Ecken unter sich, die Kanten unter sich und die Flächen unter sich symmetrisch zum Mittelpunkt liegen; verbindet man z. B. eine Würfelfecke mit dem Mittelpunkt des Würfels, so trifft die Verbindungslinie den Würfel in einer weiteren Ecke. Dagegen ist das Tetraeder nicht zentrisch symmetrisch; die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkt trifft das Tetraeder zum zweitenmal in der Mitte einer Seitenfläche.

Durch entsprechende Untersuchungen, wie wir sie im ersten Kapitel angestellt haben, kann man nachweisen, daß im vierdimensionalen Raum ebenfalls nur endlich viele reguläre Körper, und zwar sechs, möglich sind¹. An diesen Gebilden treten natürlich außer den Ecken, Kanten und Flächen auch noch Raumstücke als Begrenzungsstücke auf. Genau wie wir im dreidimensionalen Raum forderten, daß die begrenzenden Flächen reguläre Polygone sein sollten, haben wir im vierdimensionalen Raum zu verlangen, daß die begrenzenden Räume des Gebildes reguläre Polyeder sind. Wir bezeichnen ein derartiges Gebilde als „Zell“, und zwar als n -Zell, wenn es von n Polyedern begrenzt wird. Wir stellen in

¹ Man vergleiche z. B. das Buch von H. DE VRIES: Die vierte Dimension, Leipzig und Berlin, 1926.

der folgenden Tabelle die wichtigsten Angaben über die regulären Zelle des vierdimensionalen Raums zusammen.

4-dimensionaler Raum.			
	Zahl und Art der begrenzenden Polyeder	Zahl der Ecken	Dualität
1. 5-Zell	5 Tetraeder	5	sich selbst dual
2. 8-Zell	8 Würfel	16	} einander dual
3. 16-Zell	16 Tetraeder	8	
4. 24-Zell	24 Oktaeder	24	sich selbst dual
5. 120-Zell	120 Dodekaeder	600	} einander dual
6. 600-Zell	600 Tetraeder	120	

Die Dualitätsverhältnisse, wie sie in der letzten Spalte angegeben sind, folgen ohne weiteres aus der Betrachtung der Tabelle. Im vierdimensionalen Raum sind nämlich die Punkte zu den Räumen sowie die Geraden zu den Ebenen dual.

Aus der Tabelle sehen wir, daß das Tetraeder dem 5-Zell entspricht; ferner entsprechen Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder der Reihe nach dem 8-, 16-, 120- und 600-Zell. Das 24-Zell nimmt eine Sonderstellung ein. Es ist nämlich nicht nur sich selbst dual, sondern auch zentrisch symmetrisch, während das andere selbstduale Zell, das 5-Zell, ebenso wie das ihm entsprechende reguläre Tetraeder des dreidimensionalen Raums keine zentrische Symmetrie besitzt.

Dieselben Untersuchungen sind auch auf Räume noch höherer Dimensionenzahl ausgedehnt worden. Es tritt aber in diesen Fällen eine größere Einfachheit und Regelmäßigkeit zutage, da in allen diesen Räumen nur drei reguläre Körper möglich sind. Wir stellen die wichtigsten Angaben wieder in Tabellenform zusammen:

n -dimensionaler Raum. $n \geq 5$.			
	Zahl und Art der begrenzenden Zelle von $n-1$ Dimensionen	Zahl der Ecken	Dualität
1. $(n+1)$ -Zell	$n+1$ n -Zelle	$n+1$	sich selbst dual
2. $2n$ -Zell	$2n$ $(2n-2)$ -Zelle	2^n	} einander dual
3. 2^n -Zell	2^n n -Zelle	$2n$	

Im dreidimensionalen Raum entspricht diesen drei Arten von Zellen das Tetraeder, der Würfel und das Oktaeder ($n+1=4$, $2n=6$, $2^n=8$), im vierdimensionalen Raum das 5-, 8-, 16-Zell. Dodekaeder und Ikosaeder sowie andererseits das 24-, 120- und 600-Zell haben also kein Analogon in Räumen höherer Dimensionenzahl.

Wir wollen nun die Projektionen der regulären Körper in den um eine Dimension niedrigeren Raum betrachten. Wir beginnen mit den Projektionen der regulären Polyeder des dreidimensionalen Raums auf

eine Ebene. Je nach Wahl des Projektionszentrums und der Bildebene fallen diese Projektionen natürlich ganz verschieden aus. In den Abb. 95 bis 99, S. 81 hatten wir Parallelprojektion gewählt, also das Projektionszentrum ins Unendliche gerückt. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß Parallelen parallel bleiben. Es hat aber den Nachteil, daß die Flächen einander teilweise überschneiden. Diesen Nachteil können

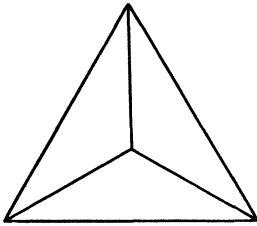


Abb. 153. Tetraeder.

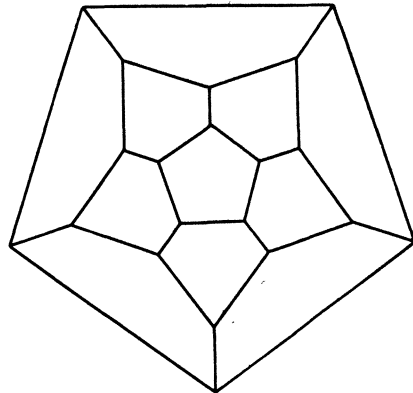


Abb. 156. Dodekaeder.

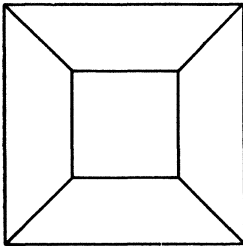


Abb. 154. Würfel.

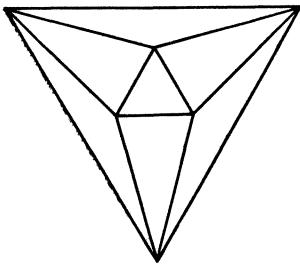


Abb. 155. Oktaeder.

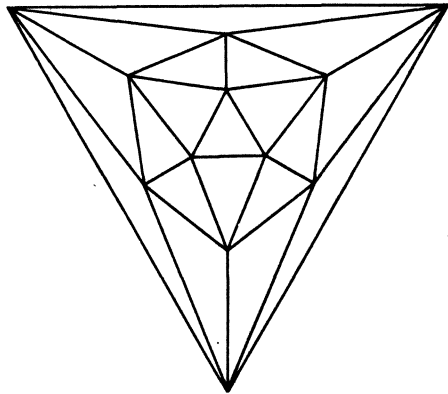


Abb. 157. Ikosaeder.

wir beseitigen, wenn wir das Projektionszentrum sehr nahe an eine Seitenfläche heranrücken. Der Symmetrie halber wollen wir es senkrecht dicht über die Mitte einer Seitenfläche legen und diese Fläche als Bildebene wählen. Dann ergeben sich für die fünf regulären Körper die in Abb. 153 bis 157 gezeichneten Bilder. Wir erhalten diese Ansichten, wenn wir eine Fläche des Polyeders entfernen und durch das so entstandene Loch ins Innere sehen.

Wenn wir das Zentrum auf die Begrenzung selbst legen, erscheinen die durchs Zentrum gehenden Seitenflächen als Geraden, das Bild wird also stark unsymmetrisch.

Lassen wir nun das Zentrum ins Innere des Körpers rücken, so tritt bei der Abbildung eine wesentliche Änderung ein; die Abbildung muß sich dann durchs Unendliche hindurchziehen, wie wir die Bildebene auch legen. Jede Ebene durchs Zentrum schneidet nämlich das Polyeder. Das gilt insbesondere für die durchs Zentrum gehende Parallelebene der Bildtafel, die die unendlich fernen Bildpunkte liefert (vgl. S. 101). Trotzdem führt diese Art der Abbildung auf eine geometrisch interessante Erscheinung, und zwar wenn wir das Projektionszentrum in den Mittelpunkt des Polyeders legen. In diesem und nur in diesem Fall ergibt sich nämlich eine symmetrische Einteilung im Bündel der Sehstrahlen. Wir können das Strahlenbündel, wie S. 103 er-

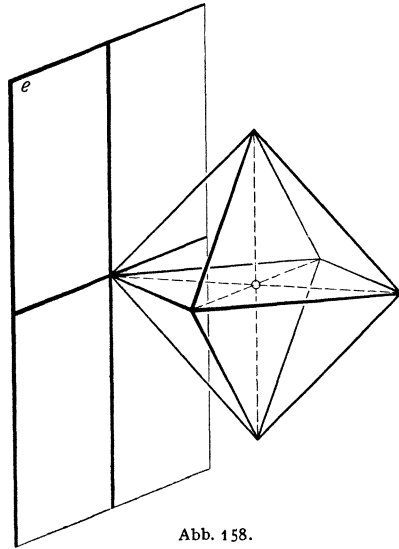


Abb. 158.

wähnt, als Modell der projektiven Ebene ansehen, wenn wir die Geraden des Bündels als „Punkte“ und die Ebenen des Bündels als „Geraden“ deuten. Somit führen die regulären Körper zu regulären Einteilungen der projektiven Ebene. Diese Einteilung kann aber nur bei zentrisch symmetrischen Körpern die projektive Ebene einfach über-

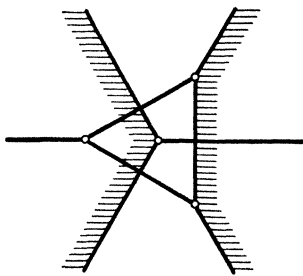


Abb. 159. Tetraeder.

decken; beim Tetraeder liefert jeder Sehstrahl zwei verschiedene Bilder, je nach seinen beiden Durchstoßpunkten mit dem Körper; die projektive Ebene erscheint daher doppelt überdeckt. Bei allen anderen Körpern dagegen liefert jedes Paar diametraler Elemente genau einen Bestandteil der projektiven Ebene. Wenn wir das Strahlenbündel mit einer Ebene zum Schnitt bringen, also eine Projektion im eigentlichen Sinne

betrachten, können wir die Symmetrie nicht vollständig aufrechterhalten. Besonders einfach wird aber das Bild, wenn wir eine Projektionsebene wählen, die durch eine Ecke geht und dort auf der Verbindungslinie der Ecke mit dem Mittelpunkt des Körpers senkrecht steht (Abb. 158 fürs Oktaeder). Die fünf so entstehenden Figuren sind in Abb. 159 bis 163

dargestellt. Jedesmal ist eins der durchs Unendliche gehenden Gebiete durch Schraffur hervorgehoben. Beim Tetraeder ist die Bildebene doppelt überdeckt. In allen übrigen Figuren stellt jedes Polygon der Ebene genau zwei Diametralflächen des Körpers dar.

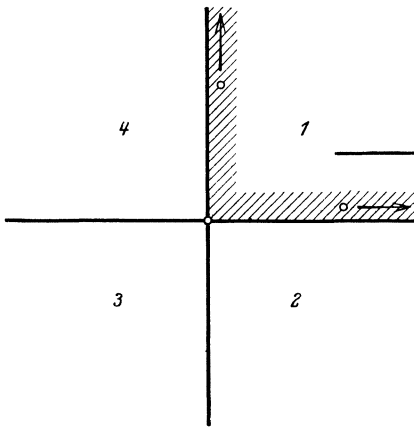


Abb. 160. Oktaeder.

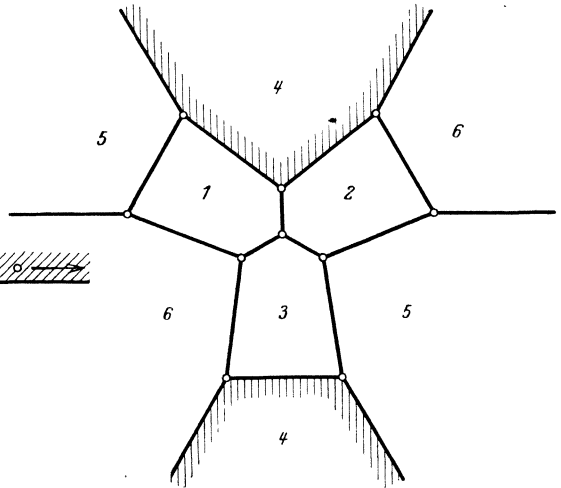


Abb. 162. Dodekaeder.

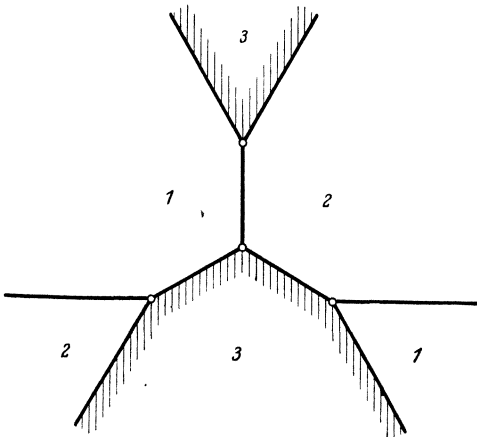


Abb. 161. Würfel.

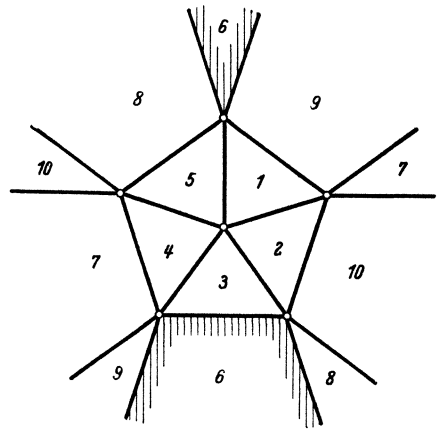


Abb. 163. Ikosaeder.

Eine weitere Reihe einfacher Figuren erhält man, wenn man bei den symmetrischen Körpern (Abb. 164 für den Würfel) die Bildebene in eine Seitenfläche legt (beim Tetraeder entsteht dadurch keine neue Figur). In Abb. 165 bis 168 sind diese Ansichten dargestellt¹.

¹ Die Projektion des Oktaeders entspricht in diesem Fall der Einteilung der Ebene in vier Dreiecke durch ein projektives Koordinatensystem.

Wir können nun analoge Projektionsmethoden anwenden, um die Zelle des vierdimensionalen Raums durch Körper des dreidimensionalen

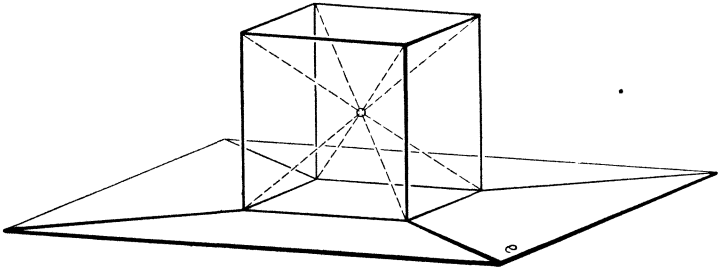


Abb. 164.

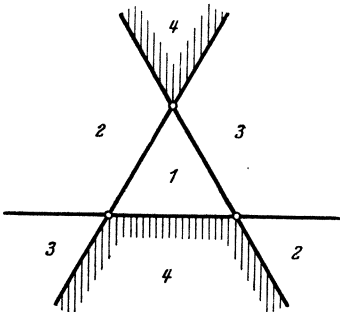


Abb. 165. Oktaeder.

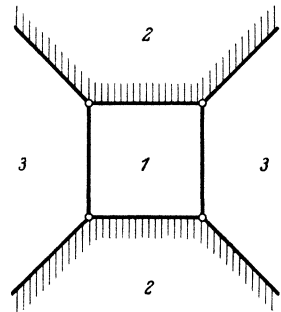


Abb. 166. Würfel.

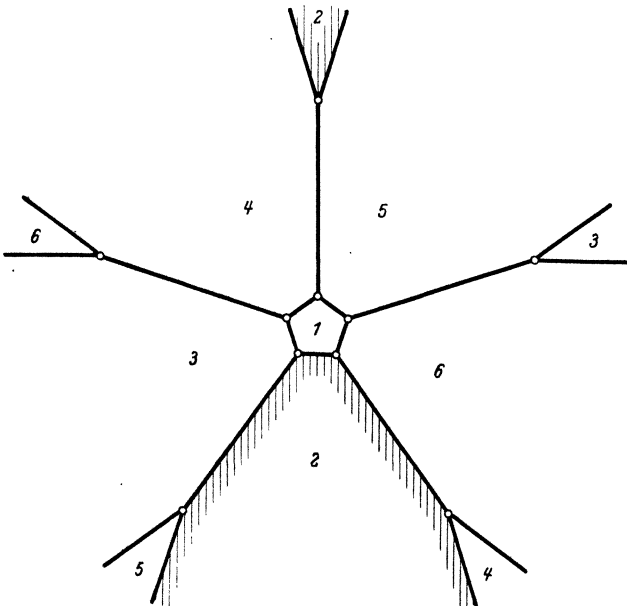


Abb. 167. Dodekaeder.

Raums abzubilden. Als ungeeignet erweist sich dabei die Parallelprojektion, weil dann die begrenzenden Polyeder des Zells durch Polyeder

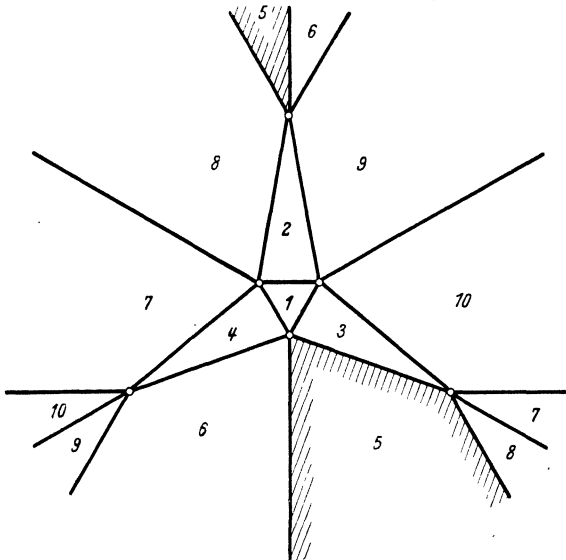


Abb. 168. Icosaeder.

im Raum dargestellt werden, die einander teilweise überdecken und durchdringen müssen. Dagegen erhalten wir übersichtliche Bilder, wenn wir das Verfahren anwenden, das in den Abb. 153 bis 157 benutzt war. Die begrenzenden Polyeder des Zells werden durch ein

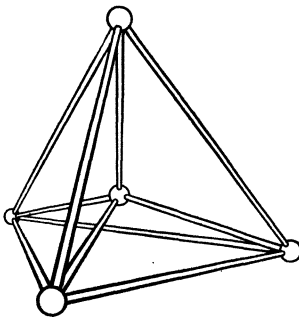


Abb. 169. 5-Zell.

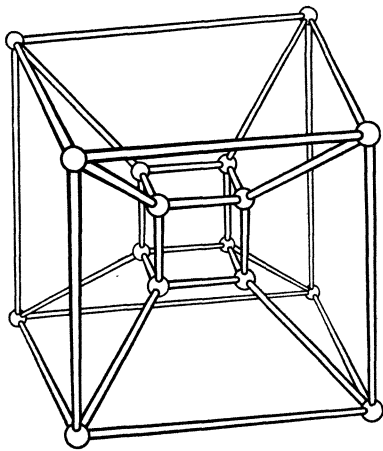


Abb. 170. 8-Zell.

System von Polyedern dargestellt, von denen eins ausgezeichnet ist und durch die anderen lückenlos und einfach ausgefüllt wird. Wenn wir diese Modelle wiederum in die Ebene projizieren, so erhalten wir Bilder, wie sie in Abb. 169 bis 172 dargestellt sind. In Abb. 172 kann

man mit einiger Mühe feststellen, daß das große Oktaeder von 23 kleineren Oktaedern (von viererlei Gestalt) ausgefüllt ist, so daß im ganzen 24 Körper auftreten. Beim 120- und 600-Zell würden die Figuren zu unübersichtlich werden.

Wenn wir das Projektionszentrum in den Mittelpunkt des Zells legen, so müssen wir reguläre Einteilungen des projektiven Raums erhalten. Wir können uns für den projektiven Raum kein ebenso symmetrisches Modell herstellen, wie es das Strahlenbündel für die projektive Ebene ist; denn dann hätten wir ein vierdimensionales Gebilde zu betrachten. Wir müssen also einen bestimmten dreidimensionalen Raum

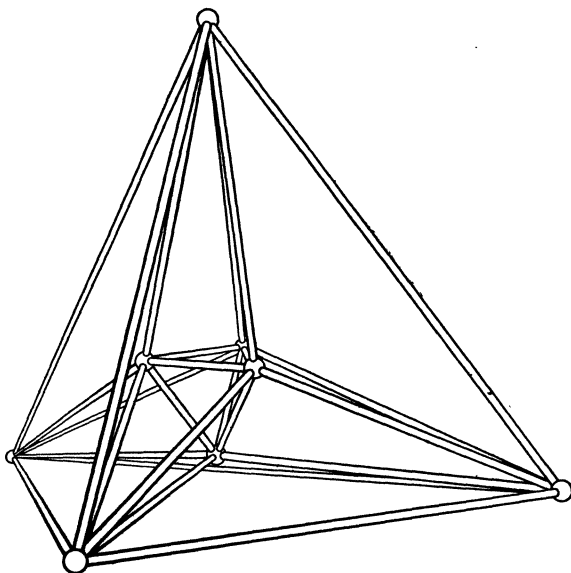


Abb. 171. 16-Zell.

als Bildraum auszeichnen, wobei die Symmetrie teilweise verlorengeht. Wir wollen aber, um die Symmetrie wenigstens teilweise zu erhalten, den Bildraum in den analogen Stellungen annehmen wie die Projektionsebene in dem um eine Dimension niedrigeren Fall; entweder soll der Bildraum entsprechend der in Abb. 164 dargestellten Anordnung mit einem der begrenzenden Räume zusammenfallen, oder er soll durch eine Ecke des Zells gehen und die entsprechende Lage haben wie die Projektionsebene in Abb. 158. Im ersten Fall wird eins der Grenzpolyeder unverzerrt wiedergegeben, weil es im Bildraum selbst liegt, im zweiten Fall herrscht zentrische Symmetrie in bezug auf die ausgezeichnete Ecke, die ihr eigenes Bild ist. Wir betrachten hier zunächst die je zwei Abbilder des 16- und des 8-Zells (Abb. 173 und 174)¹.

¹ Das 5-Zell ist für diese Abbildungsweise nicht geeignet, weil es keine zentrische Symmetrie besitzt.

Der Raum ist dabei in acht bzw. vier Teile geteilt, und jedes Teilgebiet entspricht zwei diametral angeordneten Grenzkörpern des Zells. In Abb. 173 a haben die Raumteile, die sich durchs Unendliche erstrecken, zweierlei Gestalt. Vier dieser Gebiete besitzen eine ganz im Endlichen

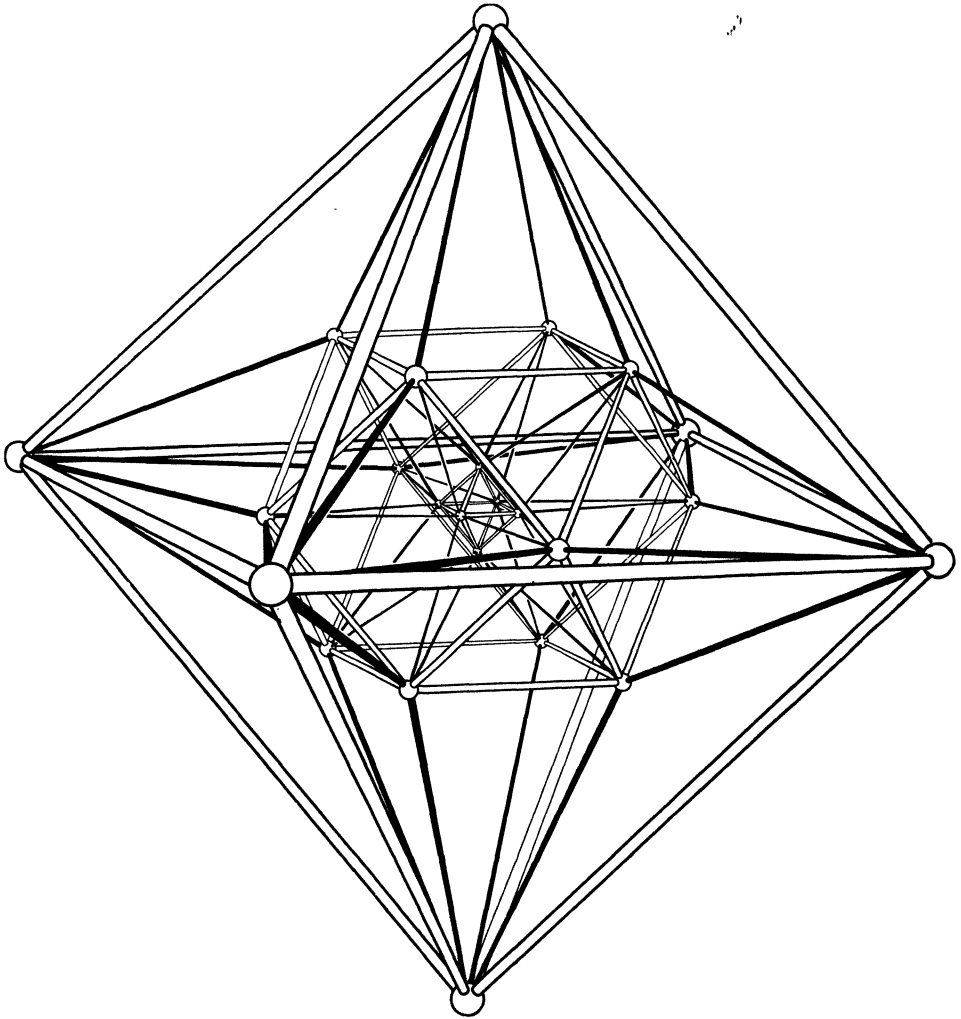


Abb. 172. 24-Zell.

liegende Seitenfläche (z. B. 1, 3, 4), von der aus sie durchs Unendliche bis zur gegenüberliegenden Spitze (z. B. 2) reichen, drei weitere Gebiete dagegen haben zwei gegenüberliegende endliche Kanten (z. B. 1, 2 und 3, 4), während alle Seitenflächen durchs Unendliche laufen. In Abb. 173 b ist die unendlich ferne Ebene selbst eine begrenzende

Ebene. Wir sehen, daß das 16-Zell auf bekannte Einteilungen führt; nämlich auf die Oktantenteilung des Raums durch ein projektives oder

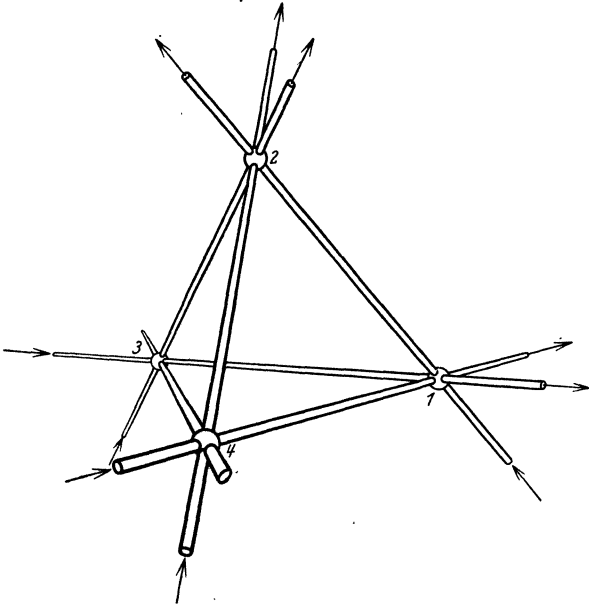


Abb. 173 a. 16-Zell.

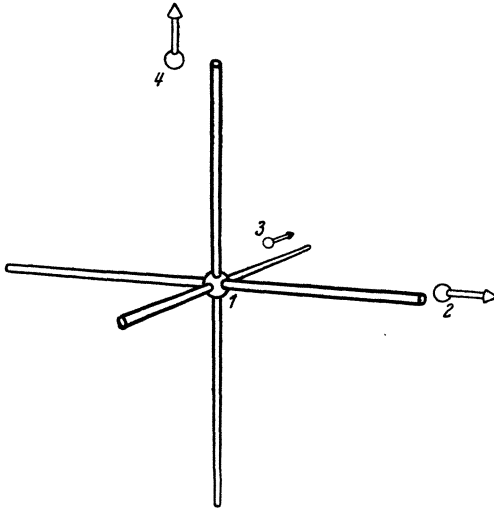


Abb. 173 b. 16-Zell.

cartesisches Koordinatensystem. Beim 8-Zell, in der Darstellung von Abb. 174 a, haben die drei Raumteile, die durchs Unendliche gehen, alle dieselbe Gestalt. In Abb. 174 b sind durch die Pfeile die Kanten

desjenigen Gebiets hervorgehoben, das dem endlichen Würfel von Abb. 174 a entspricht. Zu den Kanten dieses Gebiets gehören auch die endlichen von 1 auslaufenden Kanten außer 1,6.

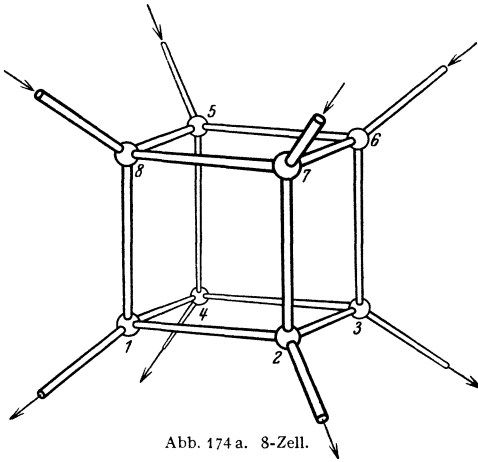


Abb. 174 a. 8-Zell.

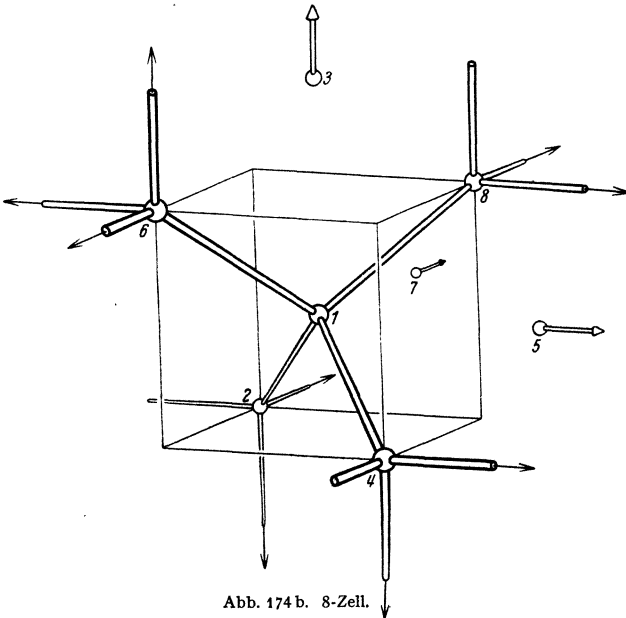


Abb. 174 b. 8-Zell.

In den Abb. 175 und 176 sind nun dieselben beiden Projektionsmethoden auf das 24-Zell angewandt. Wir erhalten also eine Einteilung des Raums in zwölf Oktaeder, von denen alle bis auf das mittlere von Abb. 175 durchs Unendliche gehen. In diesen Figuren erkennen wir aber die beiden symmetrischen Anordnungen der REYESchen Konfi-

III. Konfigurationen.

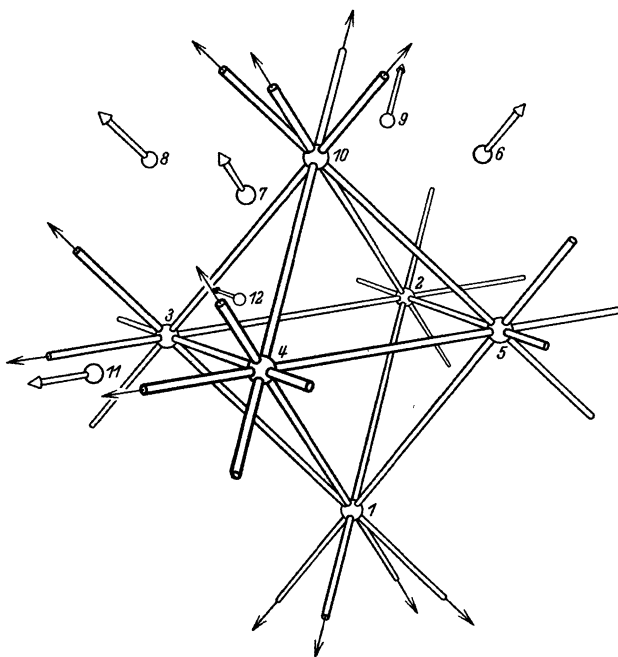


Abb. 175.

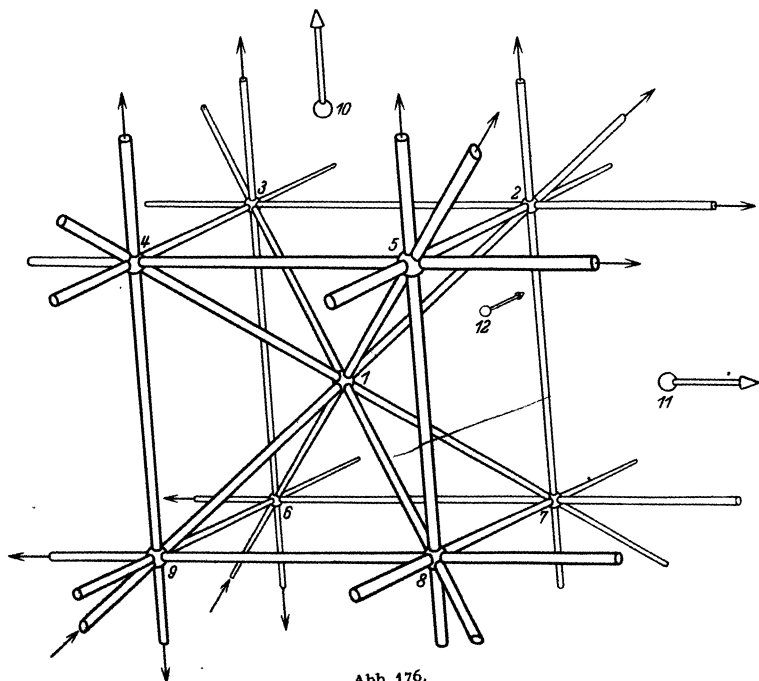


Abb. 176.

guration wieder, die wir im vorigen Abschnitt behandelt haben¹. An dem im Endlichen gelegenen Oktaeder in Abb. 175 sehen wir, daß die Ebenen der Konfiguration sowohl die Begrenzung als auch die Symmetrieebenen der zwölf Oktaeder bilden. Eine nähere Betrachtung läßt den inneren Grund dafür erkennen; durch ein vollständiges Vierseit wird nämlich die projektive Ebene in drei Vierecke und vier Dreiecke zerlegt (Abb. 177; Vierecke 1, 2, 3, Dreiecke I, II, III, IV). In der REYESchen Konfiguration wird jede Ebene durch die Konfigurationsgeraden in dieser Weise eingeteilt; da nun die Grenzflächen der Oktaeder Dreiecke sind, während die Symmetrieebenen das

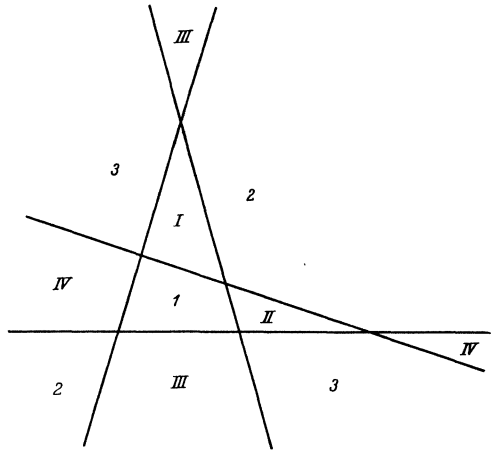


Abb. 177.

Oktaeder in Vierecken schneiden, so erkennt man, daß jede Ebene der Konfiguration Symmetrieebene in drei Oktaedern und gemeinsame Grenzfläche in $2 \cdot 4$ Oktaedern ist, während sie eins der zwölf Oktaeder nicht trifft; so ist in Abb. 175 die unendlich ferne Ebene Konfigurationsebene, und eins der Oktaeder liegt im Endlichen².

¹ Dort hatten wir die eine Figur aus der anderen durch Polarenverwandtschaft an der Kugel erhalten. Jetzt erkennen wir in ihnen Projektionen eines und desselben vierdimensionalen Gebildes, die durch Verlegung des dreidimensionalen Projektionsraumes ineinander überführt werden können.

² Wie das Oktaeder drei Symmetrieebenen besitzt, die durch den Mittelpunkt gehen und die Fläche in einem Quadrat schneiden, so gibt es zwölf dreidimensionale Symmetrieräume des 24-Zells. Sie gehen durch den Mittelpunkt des Zells und schneiden es in je einem Kubooktaeder (Abb. 178; eins dieser Kubooktaeder ist auch in Abb. 172 hervorgehoben). Bei der von uns betrachteten Projektion müssen sich diese Symmetrieräume wie jeder Raum durchs Zentrum in Ebenen verwandeln. Das sind nun gerade die Ebenen der REYESchen Konfiguration. Den drei Vierecken und vier Dreiecken entsprechen die diametralen Paare von $2 \cdot 3$ Quadraten und $2 \cdot 4$ gleichseitigen Dreiecken des Kubooktaeders.

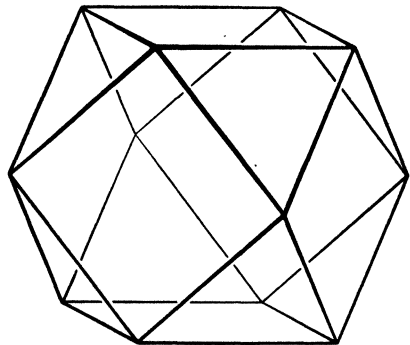


Abb. 178.

Abb. 176 ist insofern einfacher als Abb. 175, als nur zwei Arten von Oktaedern vorkommen (sechs Oktaeder haben dieselbe Gestalt wie 1, 2, 3, 4, 5, 10, die sechs übrigen sind kongruent zu 2, 5, 6, 9, 10, 11), während in Abb. 175 die Oktaeder dreierlei Gestalt haben. Eins ist nämlich ein reguläres Oktaeder, und von den übrigen haben drei die unendlich ferne Ebene zur Symmetrieebene (z. B. 1, 6, 7, 8, 9, 10), und acht werden von ihr begrenzt (z. B. 3, 4, 7, 8, 10, 11).

Aus dieser Erzeugungsweise der Konfiguration ergibt sich ohne weiteres die am Schluß des vorigen Abschnitts aufgestellte Behauptung: *Die REYESche Konfiguration ist regulär.*

Die vorstehenden Betrachtungen legen es nahe, die n -dimensionalen regulären Gebilde auf einen Raum möglichst niedriger Dimensionszahl zu projizieren, also auf eine Gerade. Wir wollen untersuchen, wie der n -dimensionale Würfel sich auf eine seiner Hauptdiagonalen projiziert, wenn wir das Verfahren der senkrechten Parallelprojektion verwenden. Die Endpunkte A, B einer solchen Diagonale sind ihre eigenen Bilder. Die Bildpunkte der übrigen Würfecken wollen wir C_1, C_2, \dots nennen, in der Reihenfolge, in der sie von A aus gerechnet auf AB liegen. Nun laufen n Würfelkanten von A aus, und sie alle bilden mit AB gleiche Winkel. Alle ihre Endpunkte haben daher notwendig den Punkt C_1 zum Bilde auf AB . Ferner ist jede beliebige Würfelkante einer der von A ausgehenden Kanten parallel, der Abstand konsekutiver Punkte C_k, C_{k+1} ist daher stets gleich AC_1 , also konstant. Demnach wird die Hauptdiagonale in gleiche Abschnitte geteilt. Man kann zeigen, daß es gerade n Abschnitte sind und daß der Punkt C_k für jedes k zwischen 1 und $n - 1$ Bild von $\binom{n}{k}$ Würfecken ist, wobei $\binom{n}{k}$ das bekannte Symbol der Binomialkoeffizienten ist. C_k ist nämlich das Bild aller und nur der Ecken, die man mit A durch k und nicht weniger als k Würfelkanten verbinden kann. Es läßt sich abzählen, daß es gerade $\binom{n}{k}$ solche Ecken gibt. Am Fall des Quadrats und des gewöhnlichen Würfels kann man sich die angegebenen Tatsachen leicht klarmachen.

§ 24. Abzählende Methoden der Geometrie.

Die letzte räumliche Konfiguration, die wir betrachten wollen, die SCHLÄFLISCHE Doppelsechs, führt auf eine geometrische Methode besonderer Art, die man als abzählende Geometrie bezeichnet. Wir wollen zunächst diese Methode darlegen, um die Untersuchung über die Doppelsechs nicht auseinanderreißen zu müssen, und weil jene Methoden auch für sich großes Interesse bieten.

Es gibt in der Ebene unendlich viele Geraden und unendlich viele Kreise. Um zunächst die Mannigfaltigkeit aller Geraden der Ebene zu charakterisieren, denken wir uns ein cartesisches Koordinatensystem in der Ebene fest gewählt. Dann ist im allgemeinen eine Gerade durch

die beiden gerichteten Strecken, die sie von den Koordinatenachsen abschneidet, vollständig bestimmt. Wir können also — abgesehen von einer sogleich zu erwähnenden Ausnahme — die Gerade durch Angabe zweier Zahlen analytisch festlegen. Diejenigen Geraden, die einer Achse parallel sind, können wir auch noch durch dieses Verfahren mit erfassen, indem wir einen der Achsenabschnitte als unendlich groß vorgeben. Dagegen entziehen sich unserer Bestimmungsweise alle und nur die Geraden, die durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehen; alle diese Geraden führen auf eine und dieselbe Angabe, daß nämlich beide Abschnitte Null sind.

Man sagt nun, daß die nicht durch den Anfangspunkt gehenden Geraden eine zweiparametrische Schar bilden, und bringt damit zum Ausdruck, daß jedes Exemplar der Schar durch zwei Zahlen (die „Parameter“ der Schar) festgelegt ist und daß einer stetigen Änderung der Parameter eine stetige Änderung des zugehörigen Gebildes entspricht. Die Geraden, die durch den Anfangspunkt gehen, bilden nach dieser Definition eine einparametrische Schar, denn man kann sie durch den Winkel festlegen, den sie mit einer der Achsen bilden. Man nimmt nun an, daß eine zweiparametrische Mannigfaltigkeit, grob gesprochen, nicht wesentlich vermehrt wird, wenn man ihr noch eine einparametrische Schar hinzufügt, die sich der ersten Schar stetig einlagert. In diesem Sinne nennt man die Gesamtheit *aller* Geraden der Ebene ebenfalls eine zweiparametrische Schar. Wir werden die Zweckmäßigkeit dieser Betrachtungsweise bald einsehen.

Wir können die Geraden der Ebene noch auf viele andere Arten bestimmen, z. B. durch den Winkel, den sie mit einer beliebig festgelegten Geraden bilden, und durch einen Punkt, durch den sie hindurchgehen. Da zur Festlegung eines Punktes der Ebene zwei Koordinaten nötig sind, brauchen wir im ganzen drei Parameter, wenn wir eine Gerade auf die angegebene Art kennzeichnen wollen. Nun können wir aber auf der Geraden den bestimmenden Punkt willkürlich wählen, und die Punkte einer Geraden bilden ersichtlich eine einparametrische Schar. Eine analoge Erscheinung bemerken wir, wenn wir eine Gerade durch zwei auf ihr liegende Punkte bestimmen. Dann brauchen wir vier Parameter, dafür bestimmt aber eine zweiparametrische Schar von Punktepaaren dieselbe Gerade. Um die wahre Parameterzahl zu erhalten, werden wir also im letzten Beispiel zwei, im vorhergehenden Beispiel einen Parameter abzuziehen haben, und finden dann in Übereinstimmung mit der zuerst verfolgten Methode, daß die Geraden der Ebene eine zweiparametrische Schar bilden. Dieses hier nur angedeutete Verfahren läßt sich analytisch präzisieren, und es läßt sich dann beweisen, daß die Anzahl der Parameter einer Schar geometrischer Gebilde unabhängig davon ist, auf welche Art man die Parameter wählt. Mit Hilfe des Symbols ∞ lassen sich derartige Überlegungen kürzer schreiben. Wir sagen, daß es in der Ebene

∞^2 Geraden gibt, daß es auf einer Geraden ∞^1 Punkte und ∞^2 Punkt-paare gibt. Die Abzählung erhält dann Analogie zur Division von Zahl-potenzen; wir haben die „Anzahl“ ∞^4 aller Punkt-paare der Ebene durch die „Anzahl“ ∞^2 der Punkt-paare einer Geraden zu „dividieren“, um die richtige „Anzahl“ ∞^2 aller Geraden der Ebene zu erhalten.

Wir wenden das Verfahren an, um die Mannigfaltigkeit aller Kreise der Ebene zu kennzeichnen. Ein Kreis ist durch Mittelpunkt und Radius, also durch drei Zahlenangaben bestimmt, und umgekehrt gehört zu jedem Kreis nur ein einziges solches Zahlentripel. Demnach gibt es ∞^3 Kreise in der Ebene. Da die Schar aller Geraden nur zweiparametrig ist und jede Gerade als Grenzfall von Kreisen aufgefaßt werden kann, ist die Schar aller Kreise *und* Geraden der Ebene ebenfalls dreiparametrig. Damit steht in Einklang, daß durch drei Punkte der Ebene stets ein Kreis oder eine Gerade gelegt werden kann. Denn es gibt in der Ebene ∞^6 Punktetripel, und je ∞^3 Punktetripel bestimmen dieselbe Kurve. Analog kann man zeigen, daß es in einer n -parametrigten Schar ebener Kurven stets eine Kurve gibt, die durch n ganz beliebig gewählte Punkte der Ebene hindurchgeht, daß aber durch $n + 1$ beliebige Punkte der Ebene im allgemeinen keine Kurve der Schar geht. Der Satz gilt jedoch nur, wenn man in der Schar auch alle Grenzfälle mitzählt; ebenso wie zwischen den Kreisen und Punktetripeln eine eindeutige Zuordnung erst möglich wird, wenn wir zu den Kreisen auch die Geraden als deren Grenzfälle mit-rechnen. Streng formulieren lassen sich diese Aussagen nur mit analytischen und algebraischen Mitteln, insbesondere müssen auch die imagi-nären Gebilde mitberücksichtigt werden.

Wir wollen die Anzahl der verschiedenen Kegelschnitte abzählen. Eine Ellipse ist durch ihre beiden Brennpunkte (vier Parameter) und die konstante Abstandssumme von diesen Punkten, also durch fünf Parameter bestimmt, und zu jeder Ellipse gehört nur ein einziges System solcher fünf Angaben. Also gibt es ∞^5 Ellipsen in der Ebene. Ebenso zeigt man, daß es ∞^5 Hyperbeln in der Ebene gibt. Die Ellipsen lassen sich auch durch ihre beiden Achsenlängen, ihren Mittelpunkt und die Richtung der großen Achse festlegen, das sind, in Einklang mit der allgemeinen Theorie, wiederum fünf Parameter. Hieraus folgt, daß die Schar aller Parabeln einer Ebene vierparametrig ist, denn nach der Konstruktion von S. 3 ergeben sich die Parabeln als Grenzfälle der Ellipsen, wobei stets eine einparametrigte Schar von Ellipsen dieselbe Parabel bestimmt und jede Ellipse nur endlich vielen, nämlich zwei, solchen Scharen angehört.

Gibt man die beiden Ellipsenachsen gleich lang vor, so entsteht ein Kreis. Hier liegt ein Trugschluß nahe. Setzen wir fest, daß beide Achsen gleich lang sein sollen, so bleiben vier Zahlenangaben übrig. Also könnte man denken, daß es ∞^4 Kreise gäbe und nicht ∞^3 , wie wir eben abgezählt haben. Der Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß

bei Gleichheit der Achsen auch noch die Angabe der Achsenrichtungen überflüssig wird, da jedes beliebige Paar senkrechter Kreisdurchmesser als Grenzfall von Ellipsenachsen aufgefaßt werden kann.

Nach dem Früheren werden wir nicht erwarten können, daß durch fünf beliebige Punkte der Ebene stets eine Ellipse gelegt werden kann; der Satz könnte höchstens gelten, wenn man zu den Ellipsen auch noch die Parabeln und Kreise als Grenzfälle rechnet. Es zeigt sich aber, daß man auch noch die Hyperbeln hinzunehmen muß. Die Gesamtheit aller Kegelschnitte der Ebene, also alle Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen, Kreise, Geradenpaare und (doppelt zählende) Geraden, bilden im Sinne der abzählenden Geometrie eine einzige Schar. Nach dem Früheren muß diese Schar fünfparametrig sein, da jeder der unter den Kegelschnitten vorkommenden Typen einer von fünf oder weniger Parametern bestimmten Schar angehört. Für die Gesamtheit aller Kegelschnitte gilt nun in der Tat der Satz, daß durch fünf beliebige Punkte der Ebene ein Kegelschnitt geht. Eine nähere Betrachtung, die aber nicht abzählender Natur ist, lehrt, daß der Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist, wenn nicht vier der gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen. In diesem Ausnahmefall ist die Bestimmung ersichtlich vieldeutig; denn durch vier Punkte einer Geraden g und einen fünften Punkt P kann ich ∞^1 Geradenpaare g, h , also ∞^1 Kegelschnitte spezieller Art legen, indem ich h als beliebige durch P gehende Gerade wähle. Liegt auch noch P auf g , so gibt es sogar ∞^2 Geradenpaare, denn dann ist h ganz beliebig wählbar.

Wir wollen jetzt die abzählenden Methoden auf räumliche Gebilde anwenden. Wenn wir eine Ebene durch ihre drei Achsenabschnitte in einem festen räumlichen Koordinatensystem bestimmen, sehen wir, daß es im Raum ∞^3 Ebenen gibt; denn die Ebenen durch den Anfangspunkt des Systems, die allein sich dieser Bestimmungsweise entziehen, bilden eine nur zweiparametrische Schar. Wir bestätigen durch Abzählung den elementaren Satz, daß durch drei beliebige Raumpunkte eine Ebene geht; in der Tat gibt es im Raum ∞^9 Punktetripel, in jeder Ebene dagegen ∞^6 , so daß die Punktetripel des Raums „ ∞^9/∞^6 “, d. h. ∞^3 Ebenen bestimmen.

Indem wir eine Gerade durch zwei Punkte bestimmen, finden wir, daß es ∞^4 Geraden im Raum gibt; denn die Mannigfaltigkeit der Punktepaare beträgt im Raum ∞^6 und auf der Geraden ∞^2 .

Die Kugeln können wir durch Mittelpunkt und Radius bestimmen. Demnach gibt es ∞^4 Kugeln im Raum. Nehmen wir zu dieser Schar noch die Ebenen als Grenzfälle hinzu, so bestätigt sich uns durch Abzählung die bekannte Tatsache, daß durch vier Raumpunkte stets eine Kugel oder Ebene gelegt werden kann. Wie beim Beispiel der Kegelschnitte, so ist auch hier die Bestimmung der Kugel nicht immer eindeutig, sondern in unserem Fall dann und nur dann, wenn die vier Punkte

nicht auf einem Kreis oder auf einer Geraden liegen. Die analoge Erscheinung gilt allgemein. Wenn eine n -parametrische Flächenschar hinreichend umfassend definiert wird (wie in der Ebene die Schar aller Kegelschnitte im Gegensatz zur Schar aller Ellipsen), dann geht durch n Raumpunkte stets eine Fläche der Schar. Diese ist aber nicht ausnahmslos durch die n Punkte eindeutig bestimmt, sondern nur, wenn die n Punkte „allgemeine Lage“ haben, d. h. wenn nicht zwischen ihnen bestimmte geometrische Relationen bestehen, deren Art von der gegebenen Flächenschar abhängt.

Eine Regelfläche zweiter Ordnung ist durch drei windschiefe Geraden bestimmt. Im Raum gibt es $\infty^{4 \cdot 3} = \infty^{12}$ Gradientripel. Da aber auf einer Regelfläche zweiter Ordnung jede Gerade einer einparametrischen Schar angehört, so bestimmen ∞^3 Geradentripel dieselbe Fläche. Also gibt es ∞^9 Regelflächen zweiter Ordnung.

Ebenso gibt es ∞^9 dreiaxige Ellipsoide. Denn wir erhalten alle Ellipsoide, und jedes nur einmal, wenn wir den Mittelpunkt (drei Parameter), die Achsenlängen (drei Parameter), die Richtung der großen Achse (zwei Parameter) und in der darauf senkrechten Ebene durch den Mittelpunkt die Richtung der kleinen Achse (ein Parameter) vorgeben.

Die analytische Betrachtung lehrt, daß es überhaupt ∞^9 Flächen zweiter Ordnung gibt. Für diese Schar gilt der Satz, daß durch neun beliebige Raumpunkte stets eine Fläche geht. Damit die Bestimmung eindeutig werde, damit also die Punkte die für diese Schar hinreichend allgemeine Lage haben, muß man ausschließen, daß die Punkte auf gewissen Raumkurven vierter Ordnung liegen; diese lassen sich nämlich als Schnittkurven zweier Flächen zweiter Ordnung konstruieren, so daß durch beliebig viele Punkte einer solchen Kurve naturgemäß keine eindeutige Bestimmung einer Fläche zweiter Ordnung möglich ist.

Wir wollen nun plausibel machen, daß auf jeder Fläche zweiter Ordnung unendlich viele Geraden liegen. Zu diesem Zweck gehen wir von einer Tatsache aus, die aus der analytischen Definition der Flächen zweiter Ordnung unmittelbar folgt: daß nämlich eine Gerade, die drei Punkte mit einer solchen Fläche gemein hat, stets ganz in ihr verläuft. Nun gibt es offenbar ∞^6 Punktetripel auf einer Fläche zweiter Ordnung (und auf jeder beliebigen anderen Fläche). Sucht man diejenigen Tripel heraus, die auf einer und derselben Geraden liegen, so liefert die abzählende Geometrie den Schluß, daß es ∞^4 solcher Tripel gibt, daß also zwei Parameter fortfallen. Das rührt daher, daß man zwei analytische Relationen braucht, um auszudrücken, daß einer der Punkte auf der durch die anderen beiden bestimmten Geraden liegt. Es gilt nun allgemein der Satz, daß die Parameterzahl einer Schar um n vermindert wird, wenn man sich auf diejenigen Scharelemente beschränkt, die n unabhängigen Relationen genügen; unabhängig heißen n Relationen,

wenn man sie nicht durch weniger als n Relationen ersetzen kann. Demnach muß es in der Tat auf jeder Fläche zweiter Ordnung ∞^4 kollineare Punkttupel geben. Jede Gerade, die ein solches Punkttupel enthält, muß nach dem Früheren ganz in die Fläche fallen. Nun liegen aber auf einer Geraden ∞^3 solche Punkttupel. Die kollinearen Punkttupel einer Fläche zweiter Ordnung liegen also auf ∞^1 auf der Fläche verlaufenden Geraden. Auf dem Ellipsoid, dem elliptischen Paraboloid und dem zweischaligen Hyperboloid sind diese Geraden imaginär.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen über die Flächen dritter Ordnung, da diese Flächen mit den Eigenschaften der im folgenden zu betrachtenden SCHLÄFLISCHEN Doppelsechsen eng zusammenhängen. Analytisch sind diese Flächen dadurch gekennzeichnet, daß ihre Gleichung in cartesischen Koordinaten vom dritten Grade ist. Nun kommen in der allgemeinen Gleichung dritten Grades zwischen drei Veränderlichen zwanzig Koeffizienten vor, die durch die zugehörige Fläche bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind. Hieraus folgt, daß es ∞^{19} Flächen dritter Ordnung gibt und daß durch neunzehn beliebige Raumpunkte stets eine solche Fläche geht. Dabei müssen verschiedene Ausartungsfälle mitgezählt werden, z. B. ist eine Fläche zweiter Ordnung zusammen mit einer Ebene als Fläche dritter Ordnung anzusehen.

Eine Gerade hat im allgemeinen drei Punkte mit einer Fläche dritter Ordnung gemein, und eine Gerade, die mit einer solchen Fläche vier Punkte gemein hat, muß ganz in ihr verlaufen. Man kann das leicht daraus schließen, daß die Gleichung der Fläche vom dritten Grade ist. Wir wollen nun durch Abzählung zeigen, daß auf der allgemeinsten Fläche dritter Ordnung nur endlich viele Geraden liegen können. Es gibt auf jeder Fläche ∞^8 Punktquadrupel. Nun sind vier Bedingungen nötig, damit ein solches Quadrupel kollinear sei; denn je zwei Bedingungen besagen, daß der dritte und vierte Punkt auf der Geraden liegt, die durch die ersten beiden Punkte geht. Demnach liegen ∞^4 solche Quadrupel auf einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung. Jede Gerade, die ein solches Quadrupel enthält, liegt ganz auf der Fläche und enthält ∞^4 andere solche Quadrupel. Gäbe es also unendlich viele Geraden auf der Fläche, so müßte sie mehr als ∞^4 kollineare Punktquadrupel enthalten.

Es gibt unter den Flächen dritter Ordnung auch viele Regelflächen, auf denen also ∞^5 oder noch mehr kollineare Punktquadrupel liegen. Die Gleichung einer Regelfläche dritter Ordnung muß demnach die spezielle Eigenschaft haben, daß diese Gleichung zusammen mit den vier Bedingungen der Kollinearität eines Punktquadrupels durch ein System von weniger Gleichungen ersetzt werden kann. Man kann zeigen, daß eine solche Reduktion nur eintritt, wenn zwischen den zwanzig Koeffizienten der Gleichung dritten Grades spezielle Relationen erfüllt sind.

Auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung verlaufen also in der Tat höchstens endlich viele Geraden¹.

Analog läßt sich abzählen, daß auf einer Fläche von höherer als dritter Ordnung im allgemeinen keine Gerade verläuft.

§ 25. Die SCHLÄFLISCHE Doppelsechs.

Wir wollen zunächst einige einfache Betrachtungen über die möglichen Lagen von Geraden im Raum anstellen. Drei windschiefe Geraden a, b, c bestimmen ein Hyperboloid H . Eine beliebige vierte Gerade d wird H im allgemeinen in zwei Punkten schneiden. d kann aber auch H berühren oder ganz auf H liegen. Im allgemeinen Fall geht durch jeden der Durchstoßpunkte eine auf H verlaufende Gerade, die nicht zur selben Schar gehört wie a, b, c , die also diese Geraden schneidet. Umgekehrt muß jede Gerade, die a, b, c und d schneidet, auf H verlaufen und durch einen Durchstoßpunkt von H mit d gehen. Im allgemeinen gibt es also zu vier Geraden zwei und nur zwei Geraden, die jene vier Geraden schneiden. Tritt in unserem Beispiel der Fall ein, daß d Tangente von H ist, so gibt es nur eine (doppeltzählende) mit a, b, c, d incidente Gerade. Gibt es umgekehrt mehr als zwei Geraden, die a, b, c, d schneiden, so muß d ganz in H liegen. In diesem Fall gibt es also unendlich viele a, b, c, d schneidende Geraden. Man sagt dann, daß die vier Geraden hyperboloidische Lage haben.

Um nun die SCHLÄFLISCHE Doppelsechs zu konstruieren, gehen wir von irgendeiner Geraden 1 aus und ziehen durch 1 drei paarweise windschiefe Geraden, die wir aus später ersichtlichen Gründen $2', 3', 4'$ nennen (Abb. 179). Nun legen wir durch 1 eine weitere Gerade $5'$, die möglichst allgemeine Lage zu $2' 3' 4'$ haben soll. Dann ist $5'$ windschief zu $2' 3' 4'$, und außer 1 gibt es noch genau eine zweite Gerade, die $2' 3' 4' 5'$

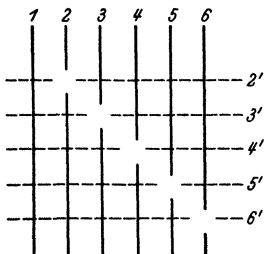


Abb. 179.

schneidet. Diese Gerade wollen wir 6 nennen.

Nun ziehen wir durch 1 noch eine letzte Gerade $6'$, die weder 6 noch $2' 3' 4' 5'$ treffen möge. Ferner soll $6'$ so gewählt sein, daß die Quadrupel $2' 3' 4' 6'$, $2' 3' 5' 6'$, $2' 4' 5' 6'$ und

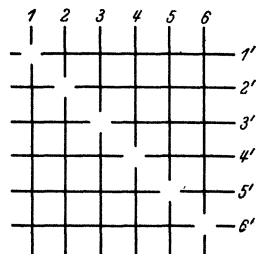


Abb. 180.

$3' 4' 5' 6'$ möglichst allgemeine Lage haben. Dann gibt es außer 1 noch genau eine weitere Gerade 5, die $2' 3' 4' 6'$ trifft. Analog bestimmen wir die Geraden 4, 3, 2 (z. B. ist 4 mit $2' 3' 5' 6'$ incident und von 1 ver-

¹ Z. B. geht durch keinen endlichen Punkt der Fläche $xyz = 1$ eine auf der Fläche verlaufende Gerade.

schieden). Wir erhalten so das in Abb. 179 gezeichnete Incidenzschema. Man kann leicht einsehen, daß wegen unserer Wahl der Geraden $2'3'4'5'6'$ keine weiteren Incidenzen auftreten können. Wir betrachten nun die Geraden 2, 3, 4, 5. Ich behaupte, daß diese vier Geraden nicht hyperboloidisch liegen können. Andernfalls würde jede mit dreien von ihnen incidente Gerade auch die vierte treffen, und das müßte nach unserem Schema insbesondere für die vier Geraden $2'3'4'5'$ gelten. Dann würden

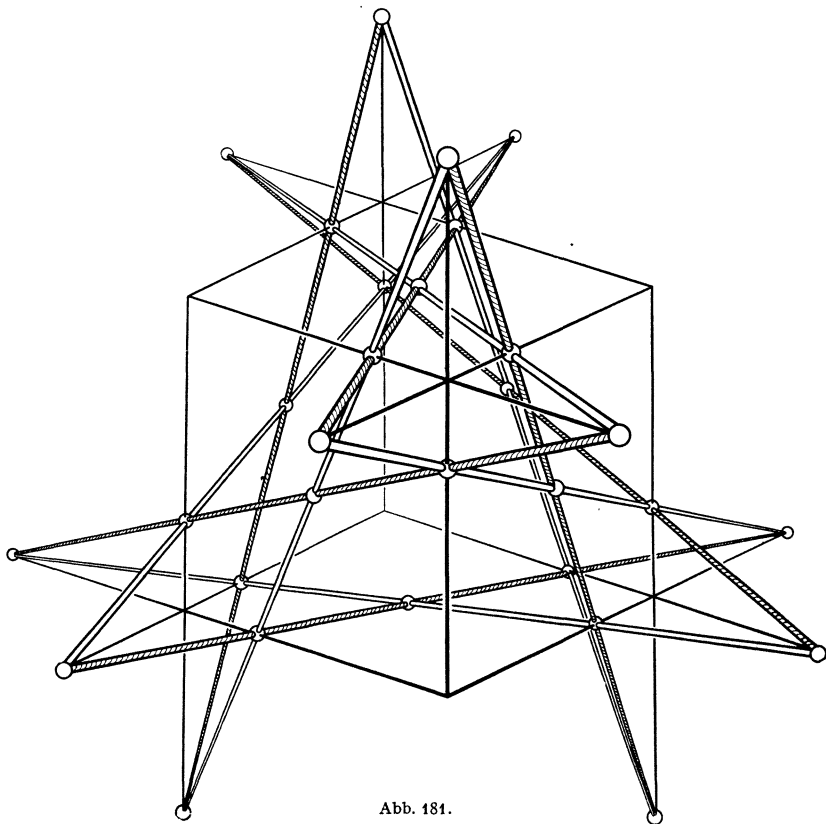


Abb. 181.

also auch die letztgenannten vier Geraden hyperboloidisch liegen, was unserer Konstruktion widerspricht. Es gibt demnach höchstens zwei mit 2, 3, 4, 5 incidente Geraden. Nun sind 2, 3, 4, 5 nach unserer Konstruktion sämtlich mit $6'$ incident. Ich bezeichne die zweite mit 2, 3, 4, 5 incidente Gerade mit $1'$ und behaupte, daß $1'$ nicht mit $6'$ zusammenfällt und überdies auch 6 schneidet. Nach dieser sogleich zu beweisenden Behauptung vervollständigt sich Abb. 179 zu dem in Abb. 180 dargestellten Schema. Dieses Schema stellt die Doppelsechs dar. Man erkennt unmittelbar, daß es sich um eine reguläre Konfiguration handelt, ihr Punkt-Geraden-Schema ist $(30_2, 12_5)$. Man kann die Doppel-

sechs in besonders übersichtlicher und symmetrischer Lage konstruieren, indem man auf jede der sechs Seitenflächen eines Würfels je eine Gerade jedes Sextupels in geeigneter Weise legt. Aus Abb. 181 dürfte die Anordnung ohne weiteres verständlich sein (vgl. auch Abb. 102, S. 83).

Wir haben nun die soeben ausgesprochene Behauptung zu beweisen, daß es eine von $6'$ verschiedene, mit 2, 3, 4, 5 incidente Gerade $1'$ gibt, und daß diese Gerade von selbst auch noch 6 trifft. Nehmen wir zunächst den ersten Teil der Behauptung als bewiesen an. Wir wollen dann zeigen, daß $1'$ mit 6 incident ist. Zu diesem Zweck zeichnen wir auf der Geraden 1 vier Punkte und auf den Geraden $2'$ bis $6'$ je drei Punkte, also im ganzen neunzehn Punkte aus, wobei wir aber die Schnittpunkte der genannten Geraden vermeiden wollen. Nach den Ausführungen des vorigen Abschnitts läßt sich durch diese neunzehn Punkte eine Fläche dritter Ordnung F_3 legen. Nun hat F_3 mit der Geraden 1 vier Punkte gemein, muß also diese Gerade ganz enthalten. Mit jeder der Geraden $2'$ bis $6'$ hat F_3 ebenfalls vier Punkte, nämlich die ausgewählten drei Punkte und den (davon verschiedenen) Schnittpunkt mit 1 gemein, somit enthält F_3 auch $2'$ bis $6'$. Daraus wiederum folgt, daß F_3 auch 2 bis 6 enthält, denn jede dieser Geraden trifft vier in der Fläche verlaufende Geraden. Aus demselben Grunde muß F_3 endlich auch $1'$ enthalten. Nehmen wir nun an, $1'$ wäre mit 6 nicht incident, dann betrachten wir die Gerade g , die ebenso wie $5'$ mit den vier Geraden 2, 3, 4, 6 incidiert. Wir schließen wieder, wie bei Konstruktion von $1'$, den Fall, daß g mit $5'$ zusammenfällt, zunächst aus. g kann mit $1'$ nicht zusammenfallen, weil wir angenommen haben, daß $1'$ mit 6 nicht incidiert. g ist eine in F_3 verlaufende Gerade, weil g vier in F_3 verlaufende Geraden, nämlich 2, 3, 4, 6 trifft. Wir betrachten nun das Geradenquadrupel $g, 1', 5', 6'$. Alle diese Geraden treffen gemäß unserer Konstruktion die drei Geraden 2, 3, 4. Das Quadrupel ist also hyperboloidisch. Ich behaupte, das zugehörige Hyperboloid ist ganz in F_3 enthalten; dies folgt einfach daraus, daß jede mit $g, 1', 5', 6'$ incidente Gerade ganz auf F_3 verläuft. Die Gesamtheit solcher Geraden überstreicht aber das fragliche Hyperboloid.

Man kann nun leicht algebraisch beweisen, daß eine Fläche dritter Ordnung, die eine Fläche zweiter Ordnung vollständig enthält, notwendig aus dieser und einer Ebene bestehen muß. Sind nämlich $G = 0$ bzw. $H = 0$ die Gleichungen der Fläche dritter bzw. zweiter Ordnung, so muß das Polynom dritten Grades G durch das Polynom zweiten Grades H teilbar sein, und das ist nur möglich, wenn G das Produkt von H mit einem linearen Ausdruck ist. Daß nun die von uns durch neunzehn Punkte bestimmte Fläche F_3 einen solchen Ausartungsfall darstellen sollte, führt leicht auf einen Widerspruch. Da nämlich unter den Geraden $2', 3', 4', 5', 6'$ keine vier hyperboloidischen vorkommen, so könnten höchstens drei von ihnen auf dem zu F_3 gehörigen Hyper-

boloid liegen, und mindestens zwei von ihnen müßten dem anderen Bestandteil von F_3 , einer Ebene, angehören und somit incident sein, was unserer Konstruktion widerspricht.

Der Beweisgang bleibt im wesentlichen ungeändert, wenn wir die bisher ausgeschlossene Möglichkeit in Betracht ziehen, daß $1'(2345)$ mit $6'$, oder $g(2346)$ mit $5'$ zusammenfällt. Auch in diesem Fall kann man schließen, daß das von 2, 3, 4 bestimmte Hyperboloid in F_3 liegen müßte. Der Grenzübergang, der diesen Fall aus dem allgemeinen ableitet, kann aber nur auf algebraischem Wege gerechtfertigt werden.

Wir haben beim Beweis der letzten Incidenz ($1'6$) der Doppelsechs die auch an sich interessante Tatsache benutzt, daß durch diese Konfiguration stets eine Fläche dritter Ordnung F_3 hindurchgeht. Man kann nun die Konfiguration leicht durch mehrere weitere Geraden ergänzen, die ebenfalls sämtlich auf F_3 verlaufen. Wir betrachten z. B. die Ebene, die von den incidenten Geraden 1, $2'$ aufgespannt wird, und ebenso die Ebene von $1'$ und 2, und nennen (12) die Schnittgerade dieser Ebenen. Dann ist diese Gerade mit den vier Geraden 1, $1'$, 2, $2'$ incident, die sämtlich in F_3 liegen. Demnach liegt auch (12) in F_3 . Es gibt im ganzen fünfzehn Geraden, die zur Doppelsechs in analoger Beziehung stehen wie (12), und die deswegen auch alle auf F_3 verlaufen. Man kann nämlich aus den Ziffern 1 bis 6 genau fünfzehn verschiedene Paare bilden. Somit haben wir im ganzen $2 \cdot 6 + 15 = 27$ Geraden aufgefunden, die alle auf F_3 verlaufen.

Zwischen den Geraden dieser erweiterten Konfiguration bestehen nun noch weitere Incidenzbeziehungen. Es läßt sich nämlich zeigen, daß von den mit zwei Ziffern bezeichneten Geraden alle und nur die miteinander incident sind, deren Symbole in keiner Ziffer übereinstimmen. Der Beweis läßt sich auf denselben Gedankengang stützen, aus dem wir die Incidenz von $1'$ mit 6 hergeleitet haben; er sei hier nur angedeutet. Aus Symmetriegründen genügt es, zu zeigen, daß (12) mit (34) inciidiert. Zum Beweis betrachte ich die drei Geraden 1, 2, (34). Dieses Tripel wird von $3'$ und $4'$ getroffen. Wäre nun (12) nicht mit (34) incident, so gäbe es eine Gerade a , die das Quadrupel 1, 2, $1'$, (34) träfe, und eine notwendig von a verschiedene Gerade b , die 1, 2, $2'$, (34) träfe. Fiele nämlich a mit b zusammen, so träfe diese Gerade das Quadrupel 1, 2, $1'$, $2'$, wäre also mit (12) identisch, und diese selbe Gerade träfe überdies (34), was wir vorläufig nicht annehmen. Ebenso sind a , b verschieden von $3'$ oder $4'$, denn fiel z. B. a mit $3'$ zusammen, so wäre $3'$ incident mit $1'$ entgegen unserer Konstruktion. a und b müßten nun ebenso wie $3'$ und $4'$ auf F_3 verlaufen, und diese vier Geraden würden, weil sämtlich mit dem Tripel 1, 2, (34) incident, hyperboloidisch liegen. Daß aber F_3 ein hyperboloidisches Geradenquadrupel enthält, haben wir schon als unmöglich erkannt. Demnach ist (12) in der Tat incident mit (34) und aus entsprechenden Grün-

den mit (35), (36), (45), (46), (56). Da (12) auch mit 1, 2, 1', 2' incidiert, so ist (12) und ebenso jede andere mit zwei Ziffern bezeichnete Gerade der erweiterten Konfiguration mit zehn Konfigurationsgeraden incident. Das gleiche gilt auch von den Geraden der Doppelsechs selbst, z. B. incidiert 1 mit den fünf Geraden 2' bis 6' und mit den fünf Geraden (12), (13), (14), (15), (16). Die Konfiguration der siebenundzwanzig Geraden von F_3 hat demnach das Schema $(135_2, 27_{10})$. Daß genau hundertfünfunddreißig Punkte zur Konfiguration gehören, folgt aus der Relation $135 \cdot 2 = 27 \cdot 10$. Man kann übrigens auch zeigen, daß die Konfiguration regulär ist, daß man daher aus ihr auf viele verschiedene Arten Doppelsechsen herausgreifen kann. Nimmt man noch die Ebenen hinzu, die zwei incidente Konfigurationsgeraden enthalten, so enthält eine solche Ebene stets eine dritte Konfigurationsgerade, wie man an dem Incidenzschema verifizieren kann. Zum selben Resultat führt auch eine einfache algebraische Überlegung. Jede Ebene trifft nämlich F_3 notwendig in einer Kurve dritter Ordnung. Diese Kurve muß, falls die Ebene durch zwei Konfigurationsgeraden geht, natürlich diese Geraden enthalten, und daraus läßt sich algebraisch schließen, daß die Kurve aus diesen beiden und einer dritten Geraden bestehen muß. Man kann leicht abzählen, daß durch jede der siebenundzwanzig Geraden fünf solche Ebenen gehen und daß es im ganzen fünfundvierzig solche Ebenen gibt. Die Konfiguration ist also nicht selbstdual, während die Doppelsechs selbstdual ist, da sie auf der dualinvarianten Beziehung der Geradenincidenz aufgebaut ist. Man kann die Doppelsechs leicht zu einer Konfiguration erweitern, die zur seeben konstruierten dual ist. Man hat dann statt der Geraden (12) und den übrigen Geraden (ik) andere Geraden [ik] hinzuzunehmen, von denen z. B. [12] durch die Schnittpunkte von 1 mit 2' und von 1' mit 2 geht. Das Schema der so entstehenden Konfiguration ist $(35_3, 27_5)$.

Wir wenden uns wieder zur ursprünglichen Konfiguration der siebenundzwanzig Geraden und wollen jetzt durch abzählende Methoden zeigen, daß auf jeder beliebigen Fläche dritter Ordnung F_3 eine solche Konfiguration K liegt. Dabei müssen, wie immer bei abzählenden Betrachtungen, auch Fälle in Betracht gezogen werden, in denen K teilweise imaginär wird oder ausartet. Zum Beweise unserer Behauptung zählen wir zunächst ab, wie groß die Mannigfaltigkeit der Doppelsechsen ist. Gemäß unserer Konstruktion haben wir für die Gerade 1 volle Freiheit, also vier Parameter, die Schnittpunkte von 1 mit 2' bis 6' hängen von fünf weiteren Parametern ab, und jede der Geraden 2' bis 6' kann, wenn der Schnittpunkt mit 1 festgehalten wird, noch ∞^2 Lagen annehmen (zehn Parameter). Durch die Geraden 1, 2', 3', 4', 5', 6' ist die Doppelsechs festgelegt. Wir finden also, daß es ∞^{19} Doppelsechsen gibt ($19 = 4 + 5 + 10$). Ebenso groß ist die Mannigfaltigkeit der Konfigurationen K , denn jede ist durch eine zugehörige Doppelsechs fest-

gelegt, und es gibt natürlich nur endlich viele Doppelsechsen in einer und derselben Konfiguration K . Nun haben wir ein Verfahren angegeben, um durch jede Konfiguration K eine F_3 zu legen. Die Mannigfaltigkeit der so konstruierten Flächen F_3 beträgt demnach entweder ∞^{19} , oder falls die Mannigfaltigkeit geringer sein sollte, müßten mindestens ∞^1 Konfigurationen K auf einer und derselben Fläche F_3 liegen, d. h. F_3 müßte eine Regelfläche dritter Ordnung sein. Nun kann man jedoch zeigen, daß es weniger als ∞^{18} Regelflächen dritter Ordnung gibt; demnach müßten mindestens ∞^2 Doppelsechsen auf den von uns konstruierten F_3 liegen. Da aber diese, wie schon ausgeführt wurde, kein Hyperboloid enthalten, und da auf Regelflächen höherer als zweiter Ordnung nur eine Regelschar verläuft, so können unmöglich ∞^2 Doppelsechsen auf einer solchen F_3 Platz finden. Im allgemeinen können also die von uns konstruierten Flächen keine Regelflächen sein, und daraus folgt, daß wir nicht weniger als ∞^{19} Flächen durch unsere Konstruktion erfaßt haben. Andererseits gibt es, wie im vorigen Abschnitt erwähnt, überhaupt nicht mehr als ∞^{19} Flächen dritter Ordnung. Hieraus läßt sich mit Rücksicht auf die algebraische Natur der von uns betrachteten Gebilde streng schließen, daß auf jeder Fläche dritter Ordnung tatsächlich eine Konfiguration K verläuft.

Viertes Kapitel.

Differentialgeometrie.

Bisher haben wir geometrische Gebilde in ihrer Gesamtstruktur betrachtet. Die Differentialgeometrie stellt ein prinzipiell anderes Verfahren der Forschung dar. Wir wollen nämlich jetzt Kurven und Flächen zunächst nur in der unmittelbaren Umgebung irgendeines ihrer Punkte beschreiben. Zu diesem Zweck vergleichen wir diese Umgebung mit einem möglichst einfachen Gebilde, etwa einer Geraden, einer Ebene, einem Kreis oder einer Kugel, die sich der Kurve in der betrachteten Umgebung möglichst eng anschmiegt; so entsteht z. B. der bekannte Begriff der Tangente einer Kurve in einem Punkt.

Diese Betrachtungsweise, lokale Differentialgeometrie oder Differentialgeometrie im kleinen genannt, wird durch ein anderes wichtiges Prinzip, die Differentialgeometrie im großen, vervollständigt. Wenn wir nämlich von einem stetigen geometrischen Gebilde wissen, daß es in der Umgebung *jedes* seiner Punkte irgendeine bestimmte differentialgeometrische Eigenschaft hat, so können wir in der Regel auch über den Gesamtverlauf des Gebildes wesentliche Aussagen machen. Wenn man z. B. von einer ebenen Kurve weiß, daß sie in der Umgebung