Werk

Titel: Anschauliche Geometrie
Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan
Verlag: Springer
Ort: Berlin
Jahr: 1932
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN379425343
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

LOG Id: LOG_0026
LOG Titel: § 15. Vorbemerkungen über ebene Konfigurationen.
LOG Typ: chapter

Wir wollen ein besonders instruktives Teilgebiet der projektiven Geometrie betrachten: die Konfigurationen. Dabei werden sich auch Ausblicke auf verschiedene andere geometrische Fragen eröffnen. Es sei erwähnt, daß eine Zeitlang die Konfigurationen als das wichtigste Gebiet der ganzen Geometrie angesehen wurden[1].

§ 15. Vorbemerkungen über ebene Konfigurationen.

Eine ebene Konfiguration ist ein System von p Punkten und g Geraden, die in einer Ebene derart liegen, daß jeder Punkt des Systems mit der gleichen Anzahl γ von Geraden des Systems incident ist und daß ebenso jede Gerade des Systems mit der gleichen Anzahl π von Punkten des Systems incidiert. Eine solche Konfiguration wird mit dem Symbol $(p_\gamma g_\pi)$ bezeichnet. Die vier Zahlen p, g, π, γ sind nicht ganz willkürlich. Nach unserer Forderung gehen nämlich durch alle p Punkte insgesamt γp Geraden des Systems. Hierbei wird jede Gerade π mal gezählt, da sie ja durch π Punkte geht. Die Anzahl g der Geraden ist somit gleich $\gamma p/\pi$. Wir sehen also, daß für jede Konfiguration die Beziehung bestehen muß:

$$p\gamma = g\pi .$$

Ein Punkt und eine hindurchgehende Gerade bilden die einfachste Konfiguration, ihr Symbol ist $(1_1 1_1)$. Das Dreieck ist die nächste einfache Konfiguartion $(3_2 3_2)$. Ziehen wir in der Ebene vier Geraden, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen, so erhalten wir sechs Schnittpunkte $ABCDEF$ (Abb. 104). Die bekannte Figur des vollständigen Vierseits, die sich so ergibt, ist also eine Konfiguration $(6_2 4_3)$. Die Gleichung $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$ bestätigt unsere allgemeine Formel. Bei dieser Konfiguration sind im Gegensatz zu den ersten beiden trivialen Fällen nicht alle Verbindungsgeraden von Konfigurationspunkten auch Konfigurationsgeraden; ebenso brauchen im allgemeinen nicht alle Schnittpunkte von Konfigurationsgeraden auch Konfigurationspunkte zu sein.

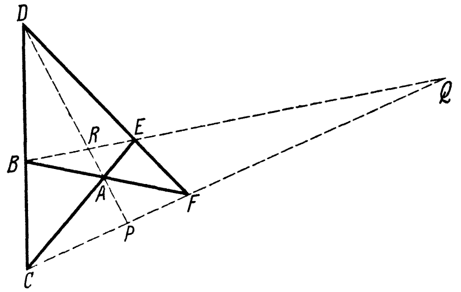

Abb. 104.

Um alle Verbindungsgeraden von Konfigurationspunkten in Abb. 104 zu erhalten, haben wir noch die drei Diagonalen AD, BE, CF zu ziehen. Dabei treten die Ecken PQR des Diagonaldreiecks als neue Schnittpunkte auf. Es wäre denkbar, daß man durch Ziehen weiterer Verbin-

[1] Eine ausführliche Darstellung dieses Gebiets gibt das Buch von F. LEVI, Geometrische Konfigurationen (Leipzig 1929).

dungsgeraden und Hinzufügen weiterer Schnittpunkte zu einer Konfiguration käme, bei der analog wie beim Dreieck die Verbindungsgeraden zweier Konfigurationspunkte stets Konfigurationsgeraden und die Schnittpunkte zweier Konfigurationsgeraden stets Konfigurationspunkte sind. Es läßt sich aber zeigen, daß außer dem Dreieck eine solche Konfiguration überhaupt nicht existiert. Wenn wir im Vierseit unbegrenzt Verbindungsgeraden ziehen und die neuentstehenden Schnittpunkte hinzurechnen, so läßt sich sogar zeigen, daß schließlich in beliebiger Nähe jedes Punktes der Ebene solche Schnittpunkte zu liegen kommen. Man nennt die so entstehende Figur ein MÖBIUSsches Netz. Man kann sie zur Definition der projektiven Koordinaten verwenden.

Späterer Anwendung wegen erinnern wir an die Bedeutung des Vierseits für die Konstruktion harmonischer Punkte. Vier Punkte

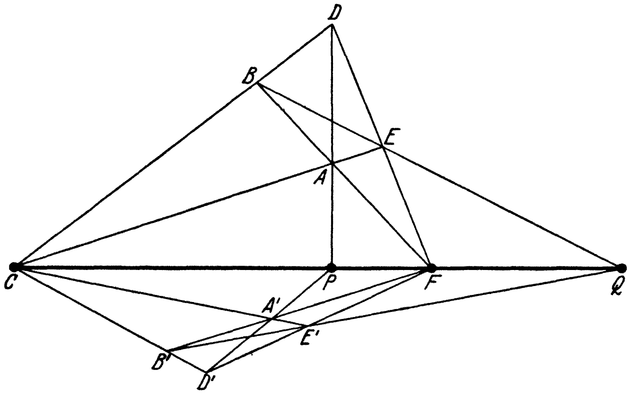

Abb. 105.

$CPFQ$ einer Geraden heißen harmonisch, oder Q heißt der vierte harmonische Punkt zu CPF, wenn sich ein Vierseit konstruieren läßt, in dem diese Punkte durch dieselben Incidenzen bestimmt sind wie in Abb. 104. Es ist ein wegen seiner Einfachheit grundlegender Satz der projektiven Geometrie, daß es zu drei Punkten einer Geraden stets genau einen vierten harmonischen gibt. Wenn man also wie in Abb. 105 die Punkte CPF in zweierlei verschiedenen Weisen zu Vierseiten ergänzt, so müssen nach diesem Satz[1] beide Konstruktionen auf denselben Punkt Q führen.

Wir wollen im folgenden hauptsächlich diejenigen Konfigurationen betrachten, bei denen ebenso viele Punkte vorkommen wie Geraden, für die also gilt: $p = g$. Wegen der Relation $p\gamma = \pi g$ ist dann auch $\gamma = \pi$, so daß die symbolische Bezeichnung der Konfiguration stets die Form $(p_\gamma p_\gamma)$ hat. Wir wollen dafür die kürzere Bezeichnung (p_γ) ein-

[1] Er ist eine unmittelbare Folge des in § 19 besprochenen DESARGUESschen Satzes.

führen. Wir wollen ferner stets die naheliegende Forderung stellen, daß die Konfiguration zusammenhängend ist und nicht in getrennte Figuren zerlegt werden kann.

Die Fälle $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$ sind von geringer Bedeutung. Für $\gamma = 1$ ergibt sich nur die triviale Konfiguration eines Punktes mit einer hindurchgehenden Geraden. Denn gäbe es mehrere Punkte in einer solchen Konfiguration, so müßte sie zerfallen, da keine Konfigurationsgerade mehr als einen Punkt enthalten darf. Der Fall $\gamma = 2$ wird durch die ebenen geschlossenen Polygone verwirklicht, und da in einer Konfiguration (p_2) durch jeden Punkt zwei Geraden gehen und auf jeder Geraden zwei Punkte liegen sollen, so erkennt man, daß jede Konfiguration (p_2) auch notwendig aus den Ecken und Seiten eines p-Ecks bestehen muß.

Der Fall $\gamma = 3$ führt dagegen zu vielen interessanten Konfigurationen. In diesem Fall muß die Anzahl p der auftretenden Punkte (und Geraden) mindestens sieben betragen. Denn durch einen Punkt der Konfiguration gehen drei Geraden, und auf jeder von ihnen müssen noch zwei weitere Konfigurationspunkte liegen. Wir werden im folgenden nur die Fälle $7 \leqq p \leqq 10$ ausführlicher behandeln.

§ 16. Die Konfigurationen (7_3) und (8_3).

Um eine Konfiguration (p_γ) aufzustellen, gehen wir am einfachsten folgenden Weg: Wir numerieren die p Punkte mit den Zahlen 1 bis p, und genau so die p Geraden mit den Zahlen (1) bis (p); sodann stellen wir ein rechteckiges Schema von $p\gamma$ Punkten auf, bei welchem in jeder Kolonne die γ Punkte untereinanderstehen sollen, die auf einer Geraden liegen; so ergeben sich p Kolonnen, die den p Geraden entsprechen.

Wir erhalten also für die Konfiguration (7_3) das Schema:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{ccccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)&(6)&(7)\end{array}}^{p} \\ \gamma\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{ccccccc}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{array}\end{array}$$

Bei der Ausfüllung des Schemas müssen wir folgende drei Forderungen berücksichtigen: Erstens darf jede Kolonne nur verschiedene Ziffern enthalten, da sonst auf einer Geraden weniger als drei Punkte liegen würden; zweitens dürfen zwei Kolonnen nie in zwei Ziffern übereinstimmen, da sonst die betreffenden Geraden zusammenfallen müßten. Schließlich muß jede Ziffer im Ganzen dreimal vorkommen, da durch jeden Punkt drei Geraden hindurchgehen sollen. Diese drei Bedingungen sind jedenfalls notwendig, wenn ein Schema geometrisch realisierbar sein soll. Dagegen sind sie nicht hinreichend, wie wir bald an Beispielen sehen werden. Zur Verwirklichung eines Schemas gehören nämlich noch geo-