führen. Wir wollen ferner stets die naheliegende Forderung stellen, daß die Konfiguration zusammenhängend ist und nicht in getrennte Figuren zerlegt werden kann.

Die Fälle $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$ sind von geringer Bedeutung. Für $\gamma = 1$ ergibt sich nur die triviale Konfiguration eines Punktes mit einer hindurchgehenden Geraden. Denn gäbe es mehrere Punkte in einer solchen Konfiguration, so müßte sie zerfallen, da keine Konfigurationsgerade mehr als einen Punkt enthalten darf. Der Fall $\gamma = 2$ wird durch die ebenen geschlossenen Polygone verwirklicht, und da in einer Konfiguration (p_2) durch jeden Punkt zwei Geraden gehen und auf jeder Geraden zwei Punkte liegen sollen, so erkennt man, daß jede Konfiguration (p_2) auch notwendig aus den Ecken und Seiten eines p-Ecks bestehen muß.

Der Fall $\gamma = 3$ führt dagegen zu vielen interessanten Konfigurationen. In diesem Fall muß die Anzahl p der auftretenden Punkte (und Geraden) mindestens sieben betragen. Denn durch einen Punkt der Konfiguration gehen drei Geraden, und auf jeder von ihnen müssen noch zwei weitere Konfigurationspunkte liegen. Wir werden im folgenden nur die Fälle $7 \leqq p \leqq 10$ ausführlicher behandeln.

§ 16. Die Konfigurationen (7_3) und (8_3).

Um eine Konfiguration (p_γ) aufzustellen, gehen wir am einfachsten folgenden Weg: Wir numerieren die p Punkte mit den Zahlen 1 bis p, und genau so die p Geraden mit den Zahlen (1) bis (p); sodann stellen wir ein rechteckiges Schema von $p\gamma$ Punkten auf, bei welchem in jeder Kolonne die γ Punkte untereinanderstehen sollen, die auf einer Geraden liegen; so ergeben sich p Kolonnen, die den p Geraden entsprechen.

Wir erhalten also für die Konfiguration (7_3) das Schema:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{ccccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)&(6)&(7)\end{array}}^{p} \\ \gamma\left\{\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right. & \begin{array}{ccccccc}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{array} \end{array}$$

Bei der Ausfüllung des Schemas müssen wir folgende drei Forderungen berücksichtigen: Erstens darf jede Kolonne nur verschiedene Ziffern enthalten, da sonst auf einer Geraden weniger als drei Punkte liegen würden; zweitens dürfen zwei Kolonnen nie in zwei Ziffern übereinstimmen, da sonst die betreffenden Geraden zusammenfallen müßten. Schließlich muß jede Ziffer im Ganzen dreimal vorkommen, da durch jeden Punkt drei Geraden hindurchgehen sollen. Diese drei Bedingungen sind jedenfalls notwendig, wenn ein Schema geometrisch realisierbar sein soll. Dagegen sind sie nicht hinreichend, wie wir bald an Beispielen sehen werden. Zur Verwirklichung eines Schemas gehören nämlich noch geometrische oder algebraische Betrachtungen, die sich nicht ohne weiteres auf die arithmetische Aufstellung übertragen lassen. Wenn aber ein Schema überhaupt eine Konfiguration darstellt, so können wir mehrere Änderungen an dem Schema vornehmen, durch welche die Konfiguration nicht beeinflußt wird. So können wir in jeder Kolonne die vertikale Reihenfolge der Ziffern ändern, können die Reihenfolge der Kolonnen vertauschen, was nur einer Umnumerierung der Geraden gleichkommt, und können schließlich auch die Punkte beliebig umnumerieren. Da alle diese Änderungen die Konfiguration nicht beeinflussen, werden wir alle Schemata, die sich nur durch solche Veränderungen unterscheiden, als identisch ansehen.

Von diesem Standpunkt aus läßt sich ein, aber auch nur ein Schema (7_3) aufstellen. Die Punkte, die auf der ersten Geraden liegen, bezeichnen wir mit 1, 2, 3. Durch den Punkt 1 gehen dann noch zwei weitere Geraden, welche die Punkte 2 und 3 nicht mehr enthalten dürfen. Ich bezeichne die auf der zweiten Geraden liegenden Punkte mit 4 und 5, die auf der dritten mit 6 und 7. Damit haben wir alle vorkommenden Punkte numeriert und das Schema bis jetzt folgendermaßen ausgefüllt:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 5 & 7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

In den folgenden Kolonnen müssen die Ziffern 2 und 3 noch je zweimal, und zwar in verschiedenen Kolonnen vorkommen; wir schreiben sie deshalb in die oberste Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 5 & 7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Zur Ausfüllung der acht noch freien Stellen dürfen wir nur noch die Ziffern 4, 5, 6, 7 benutzen, da die Ziffern 1, 2 und 3 schon verbraucht sind. Die Ziffer 4 muß noch zweimal vorkommen. Da sie nicht beide Male unter derselben Ziffer stehen darf, können wir sie an folgende Stellen schreiben:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Jede andere mögliche Anordnung ist von dieser nur unwesentlich verschieden. Ebenso muß 5 noch zweimal auftreten und darf nicht mehr mit 4 untereinanderstehen. Also dürfen wir ansetzen:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

An den ersten beiden der vier noch freien Plätze müssen die Ziffern 6 und 7 stehen, da alle übrigen Ziffern verbraucht sind und nicht beide Male die gleiche Ziffer unter derselben Ziffer 2 stehen darf. Da eine Vertauschung der Ziffern 6 und 7 keine wesentliche Änderung wäre, dürfen wir schreiben:

4	5	4	5
6	7	.	.

Für die letzten Felder ergibt sich jetzt zwangsläufig die Besetzung 7 6, so daß wir für die Konfiguration (7_3) in der Tat genau eine Möglichkeit erhalten:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

Wie wir schon erwähnten, folgt aus der Existenz dieses Schemas noch nicht, daß es eine Konfiguration (7_3) wirklich gibt. Gerade in unserem Fall stellt sich nun die Unmöglichkeit der Konfiguration heraus. Wenn wir nämlich nach den Methoden der analytischen Geometrie die Gleichungen der Geraden des Schemas aufzustellen suchen, so kommen wir auf ein Gleichungssystem, das einen Widerspruch enthält. Die Unmöglichkeit der Konfiguration läßt sich auch an-

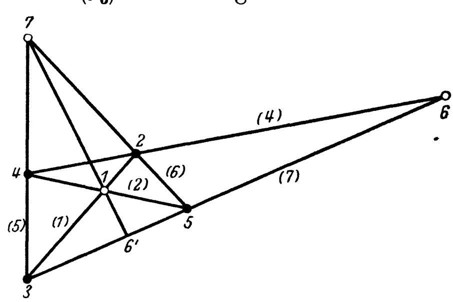

Abb. 106.

schaulich einsehen. Ich zeichne zuerst (Abb. 106) die Geraden (1) und (2) des Schemas, nenne ihren Schnittpunkt 1, wie es das Schema vorschreibt, und nehme auf der Geraden (1) die Punkte 2 und 3 und auf der Geraden (2) die Punkte 4 und 5 willkürlich an. Sodann ziehe ich die Geraden (4) und (7), die durch die Punktepaare 24 und 35 festgelegt sind, und habe ihren Schnittpunkt 6 zu nennen. Ebenso sind durch die Punktepaare 25 und 34 die Geraden (5) und (6) und ihr Schnittpunkt 7 bestimmt. Hiermit sind alle Konfigurationspunkte festgelegt. Es zeigt sich nun aber, daß die drei Punkte 1, 6, 7, welche auf der letzten noch fehlenden Geraden (3) liegen sollen, nicht in eine Gerade fallen, so daß ich durch den Schnitt der Geraden (17) und (7) noch einen weiteren Punkt 6′ erhalte. Man könnte zunächst meinen, das läge an der ungeeigneten Wahl der Punkte 2, 3, 4, 5. Wir erkennen aber in unserer Figur die harmonische Konstruktion von Abb. 104 wieder. 6′ ist also der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten 3, 5, 6, kann daher nach einem elementaren Satz der projektiven Geometrie mit keinem dieser Punkte zusammenfallen.

Wir wenden uns jetzt zu der Konfiguration (8_3). Auf demselben Wege wie oben läßt sich zeigen, daß es auch hier im wesentlichen nur ein Schema gibt:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1	2	2	3	3	4
2	4	6	3	7	4	5	5
5	8	7	6	8	7	8	6

Diese Konfiguration kann man sich als zwei Vierecke 1234 und 5678 deuten, die einander zu gleicher Zeit ein- und umbeschrieben sind (Abb. 107). Es liegt nämlich auf der Geraden 12 der Punkt 5, auf 23 der Punkt 6, auf 34 der Punkt 7 und auf 41 der Punkt 8; genau so sind auch die Seiten 56, 67, 78, 85 mit den Punkten 4, 1, 2, 3 incident. Es leuchtet ein, daß eine derartige Konfiguration sich nicht zeichnen läßt.

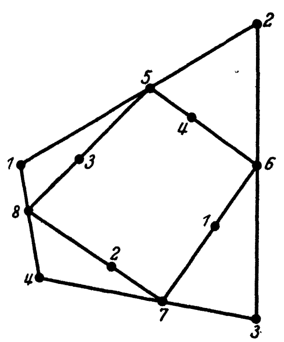

Abb. 107.

Die analytische Betrachtung des Schemas führt auf ein System von Gleichungen, die allerdings nicht wie die Gleichungen der Konfiguration (7_3) einen Widerspruch enthalten, die sich aber nur komplex und niemals rein reell auflösen lassen.

Die Konfiguration ist trotzdem nicht ohne geometrisches Interesse, sondern spielt in der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung ohne Doppelpunkt eine wichtige Rolle. Diese Kurven besitzen neun Wendepunkte, von denen aber höchstens drei reell sein können. Ferner läßt sich algebraisch zeigen, daß jede Gerade, die zwei dieser Wendepunkte verbindet, auch durch einen dritten Wendepunkt gehen muß. Vier Wendepunkte können dagegen nie auf einer Geraden liegen, weil eine Kurve dritter Ordnung von keiner Geraden in mehr als drei Punkten getroffen wird. Die Geraden durch die Wendepunkte bilden nun eine Konfiguration, und zwar ist $p = 9, \pi = 3$. Ferner ist $\gamma = 4$; denn greift man einen Wendepunkt heraus, so müssen die acht übrigen paarweise mit ihm auf einer Geraden liegen, so daß in der Tat durch jeden Punkt vier Geraden gehen. Für g ergibt sich aus der Formel $g = \frac{p\gamma}{\pi}$ der Wert 12. Die Konfiguration ist also vom Typ $(9_4 12_3)$. Sucht man das Schema einer solchen Konfiguration, so ergibt sich bis auf unwesentliche Abänderungen nur eine Möglichkeit:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	1	1	2	2	3	3	4	1	2	5	6
2	4	6	3	7	4	5	5	3	4	7	8
5	8	7	6	8	7	8	6	9	9	9	9

Läßt man nun in dieser Konfiguration den Punkt 9 und die durch ihn gehenden Geraden (9), (10), (11), (12) fort, so bleibt genau unser Schema (8_3) übrig. Ebenso kommt man auf die Konfiguration (8_3), wenn man einen beliebigen anderen der neun Punkte und die vier durchgehenden Geraden fortläßt. Denn alle Punkte der Konfiguration ($9_4 12_3$) erweisen sich als gleichberechtigt.

§ 17. Die Konfigurationen (9_3).

Während wir in den Fällen $p = 7$ und $p = 8$ nur je ein Konfigurationsschema erhalten haben und eine reelle Verwirklichung dieser Schemata sich als unmöglich erwies, lassen sich im Fall $p = 9$ drei wesentlich verschiedene Schemata aufstellen, und alle drei können wir durch reelle Punkte und Geraden verwirklichen.

Bei weitem die wichtigste dieser Konfigurationen, überhaupt die wichtigste Konfiguration der Geometrie, ist die, welche BRIANCHON-PASCALsche Konfiguration genannt wird. Wir wollen für sie der Kürze halber das Symbol $(9_3)_1$ einführen und die zwei anderen Konfigurationen (9_3) mit $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ bezeichnen.

Das Schema von $(9_3)_1$ läßt sich folgendermaßen schreiben:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	7	6	5	6	7
3	5	7	8	9	8	9	9	8

Um eine solche Konfiguration zu zeichnen, nehmen wir zunächst die Punkte 8 und 9 willkürlich an (Abb. 108) und ziehen willkürlich die Geraden (4), (6), (9) durch 8 sowie die Geraden (5), (7), (8) durch 9. Von den neun Schnittpunkten, die so entstehen, gehören sechs der Konfiguration an, wir bezeichnen sie gemäß dem Schema mit 2, 3, 4, 5, 6, 7. Durch diese Punkte sind die noch fehlenden Geraden (1), (2), (3) festgelegt. Wir ziehen zunächst (1) durch 23 und (2) durch 45.

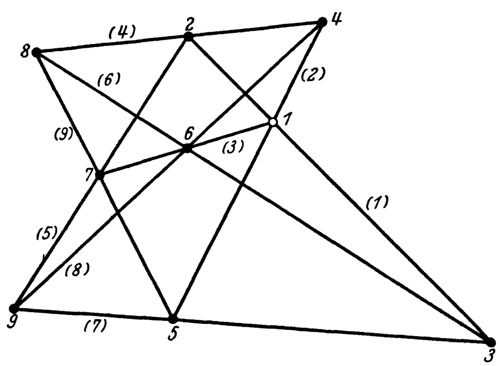

Abb. 108.

Den Schnittpunkt dieser Geraden haben wir mit 1 zu bezeichnen. Die noch fehlende Gerade (3) ist durch 67 festgelegt. Das Schema fordert, daß diese Gerade durch 1 geht. Wir finden nun, daß diese Incidenz von selbst erfüllt ist, trotz der ganz willkürlichen Wahl der Punkte 8 und 9 und der beiden Geradentripel durch diese Punkte.