

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG_0028

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Läßt man nun in dieser Konfiguration den Punkt 9 und die durch ihn gehenden Geraden (9), (10), (11), (12) fort, so bleibt genau unser Schema (8₃) übrig. Ebenso kommt man auf die Konfiguration (8₃), wenn man einen beliebigen anderen der neun Punkte und die vier durchgehenden Geraden fortläßt. Denn alle Punkte der Konfiguration (9₄12₃) erweisen sich als gleichberechtigt.

§ 17. Die Konfigurationen (9₃).

Während wir in den Fällen $p = 7$ und $p = 8$ nur je ein Konfigurationsschema erhalten haben und eine reelle Verwirklichung dieser Schemata sich als unmöglich erwies, lassen sich im Fall $p = 9$ drei wesentlich verschiedene Schemata aufstellen, und alle drei können wir durch reelle Punkte und Geraden verwirklichen.

Bei weitem die wichtigste dieser Konfigurationen, überhaupt die wichtigste Konfiguration der Geometrie, ist die, welche BRIANCHON-PASCALSche Konfiguration genannt wird. Wir wollen für sie der Kürze halber das Symbol (9₃)₁ einführen und die zwei anderen Konfigurationen (9₃) mit (9₃)₂ und (9₃)₃ bezeichnen.

Das Schema von (9₃)₁ läßt sich folgendermaßen schreiben:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	7	6	5	6	7
3	5	7	8	9	8	9	9	8

Um eine solche Konfiguration zu zeichnen, nehmen wir zunächst die Punkte 8 und 9 willkürlich an (Abb. 108) und ziehen willkürlich die Geraden (4), (6), (9) durch 8 sowie die Geraden (5), (7), (8) durch 9. Von den neun Schnittpunkten, die so entstehen, gehören sechs der Konfiguration an, wir bezeichnen sie gemäß dem Schema mit 2, 3, 4, 5, 6, 7. Durch diese Punkte sind die noch fehlenden Geraden (1), (2), (3) festgelegt. Wir ziehen zunächst (1) durch 23 und (2) durch 45.

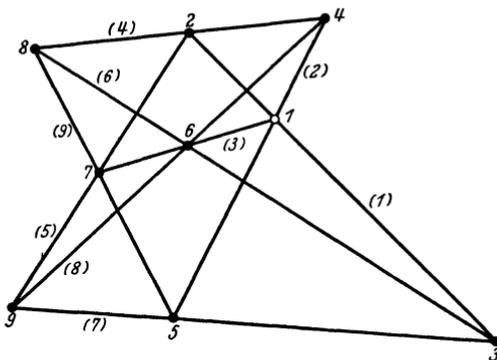


Abb. 108.

Den Schnittpunkt dieser Geraden haben wir mit 1 zu bezeichnen. Die noch fehlende Gerade (3) ist durch 67 festgelegt. Das Schema fordert, daß diese Gerade durch 1 geht. Wir finden nun, daß diese Incidenz von selbst erfüllt ist, trotz der ganz willkürlichen Wahl der Punkte 8 und 9 und der beiden Geradentripel durch diese Punkte.

Der geometrische Grund dieser überraschenden Erscheinung liegt in den Sätzen von BRIANCHON, die wir nunmehr behandeln wollen.

Wir gehen vom einschaligen Hyperboloid aus. Wie wir im ersten Kapitel gesehen haben, verlaufen auf ihm zwei Scharen von Geraden, so daß jede Gerade der einen Schar jede Gerade der anderen Schar schneidet, während zwei Geraden derselben Schar einander niemals treffen. Wir nehmen nun (Abb. 109) drei Geraden der einen Schar (doppelt ausgezogen) und drei Geraden der anderen Schar (einfach stark ausgezogen) heraus und bilden aus ihnen das räumliche Sechseck $ABCDEF$. Wir gehen, um es zu erhalten, zunächst auf einer Geraden der ersten Schar von A nach B . Durch B geht eine bestimmte Gerade der zweiten Schar, auf der wir nun bis zu einem Punkt C weitergehen. In C verfolgen wir wieder die hindurchgehende Gerade der ersten Schar bis zu einem Punkt D , gehen von dort auf einer Geraden der zweiten Schar bis zu E und schließlich auf einer Geraden der ersten Schar bis zu dem-

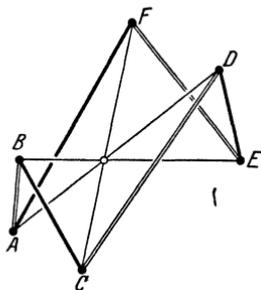


Abb. 109.

jenigen Punkt F dieser Geraden, in dem sie von der durch A gehenden Geraden der zweiten Schar getroffen wird. Die Seiten des Sechsecks gehören also abwechselnd der einen und der anderen Geradenschar an.

Wir beweisen nun, daß sich die Diagonalen AD , BE und CF dieses Sechsecks in einem Punkt schneiden. Betrachten wir zunächst AD und BE . Da die Sechseckseiten AB und DE zu verschiedenen Geradenscharen der Fläche gehören, schneiden sie einander. Die vier Punkte A, B, D, E liegen daher in einer Ebene, und daraus folgt, daß auch AD und BE einander schneiden. Genau so läßt sich zeigen, daß auch die beiden anderen Paare von Diagonalen einen Schnittpunkt besitzen. Wenn nun drei Geraden einander paarweise schneiden, so liegen sie entweder in einer Ebene oder, wenn nicht, so müssen sie alle durch denselben Punkt gehen. Lägen die drei Diagonalen des Sechsecks $ABCDEF$ in einer Ebene, so würde das Sechseck selbst in dieser Ebene liegen, und seine Seiten müßten einander paarweise schneiden; das ist unmöglich, da z. B. die Geraden AB und CD derselben Schar angehören, also einander nicht schneiden dürfen. Somit müssen die drei Diagonalen in der Tat durch einen Punkt gehen.

Dieser Satz der räumlichen Geometrie führt uns zu den BRIANCHONschen Sätzen der ebenen Geometrie. Wir betrachten dazu das einschalige Hyperboloid von einem Punkt P aus, von dem wir zunächst annehmen wollen, daß er nicht auf der Fläche liegt. Das Hyperboloid besitzt dann einen Kegelschnitt als Umriß, und zwar kann dieser Kegelschnitt eine Hyperbel (Abb. 110) oder auch eine Ellipse sein (Abb. 111). Das Gebiet auf der einen Seite des Umrisses erscheint dabei unbedeckt,

während die andere Seite doppelt bedeckt erscheint. Die beiden Blätter des Bildes hängen längs des Umrißkegelschnitts zusammen. Die Geraden, die auf der Fläche verlaufen, erscheinen im Bilde teils verdeckt, teils unverdeckt, sie treten also von dem einen Blatt ins andere und müssen daher den Umriß treffen. Andererseits können sie diese Kurve nicht schneiden, da ja deren eine Seite unbedeckt bleibt. Demnach müssen die Geraden als Tangenten des Umrisses erscheinen. Unser räumliches Sechseck verwandelt sich also in ein ebenes Sechseck, dessen Seiten einen Kegelschnitt berühren; wir werden dadurch auf den Satz der ebenen Geometrie geführt:

Die Diagonalen eines Sechsecks, das einem Kegelschnitt umschrieben ist, schneiden sich in einem Punkte.

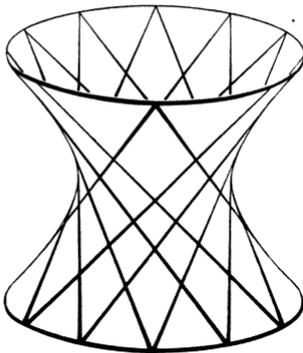


Abb. 110.

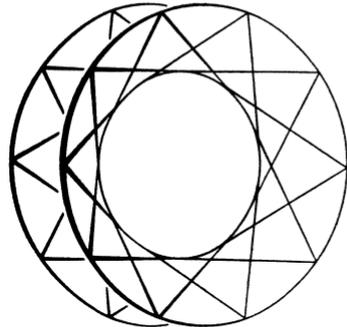


Abb. 111.

Bewiesen haben wir den Satz allerdings erst für solche Kegelschnitte, die als Umriss eines einschaligen Hyperboloids auftreten, also zunächst nur für gewisse Hyperbeln und Ellipsen. Der Umrißkegelschnitt kann aber auch eine Parabel sein; die Sehstrahlen, die den Umriß liefern, bilden nämlich den Tangentialkegel der Fläche von P aus, also einen Kegel zweiter Ordnung (S. 11), wenn wir daher die Bildebene so legen, daß sie einer Erzeugenden dieses Kegels parallel läuft, wird das Bild der Fläche in dieser Ebene von einer Parabel umrissen; denn der Umriß ist die Schnittkurve der Bildebene mit dem Kegel, und das ist in diesem Falle eine Parabel (S. 11, 12, 7).

Wir wollen nunmehr den Augenpunkt P in die Fläche selbst verlegen. Dann sehen wir diejenigen beiden Geraden der Fläche, die durch P gehen, als zwei Punkte; alle übrigen Geraden der Fläche erscheinen uns auch weiterhin als Geraden. Da jede Gerade der einen Schar die durch den Augenpunkt gehende Gerade der anderen Schar schneidet, so sehen wir jene eine Schar als ein Strahlenbüschel, als dessen Spitze uns die durch P gehende Gerade g der anderen Schar erscheint. Ebenso sehen wir auch die zweite Schar als ein Strahlenbüschel. Seine Spitze

ist von der des anderen Büschels verschieden, da sie das Bild einer von g verschiedenen durch P gehenden Geraden ist. Somit können wir aus dem Satz über das räumliche Sechseck die Folgerung ziehen:

Die Diagonalen eines ebenen Sechsecks, dessen Seiten abwechselnd durch je zwei feste Punkte gehen, schneiden sich in einem Punkt.

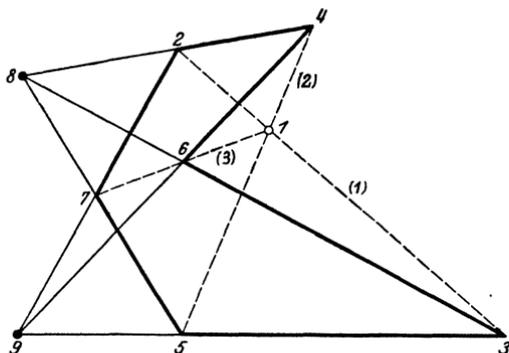


Abb. 112.

Diagonalen treffen, wird auch als BRIANCHONSCHER Punkt bezeichnet.

Durch unsere räumliche Konstruktion haben wir allerdings die BRIANCHONSCHEN Sätze nicht vollständig bewiesen. Es wäre denkbar, daß nicht jedes BRIANCHONSCHES Sechseck durch Projektion eines der von uns betrachteten räumlichen Sechsecke erzeugt werden könnte. Es läßt sich jedoch zeigen, daß tatsächlich jedes ebene Sechseck, das

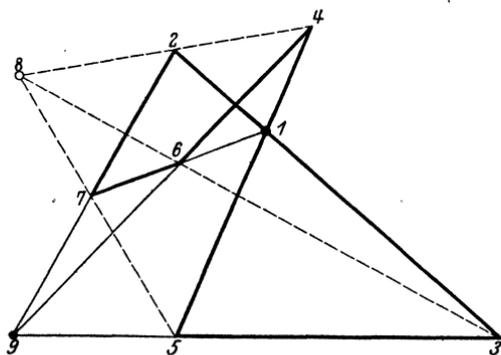


Abb. 113.

Diese Sätze über die Tangentensechsecke einer der drei Kegelschnitttypen oder eines in ein Punktepaar entarteten Kegelschnitts werden nach ihrem Entdecker die Sätze von BRIANCHON genannt. Der Punkt, in dem sich die drei

Voraussetzung eines der BRIANCHONSCHEN Sätze erfüllt, sich zu einer räumlichen Figur ergänzen läßt, wie wir sie betrachtet haben.

Der letzte BRIANCHONSCHES Satz steht nun in engem Zusammenhang mit der Konfiguration $(9_3)_1$ und gibt uns die Erklärung dafür, daß bei der Konstruktion dieses Gebildes die letzte Incidenz stets von selbst erfüllt ist. In der Bezeichnung

von Abb. 112 und 108 bilden nämlich die Punkte 246357 ein Sechseck, dessen Seiten abwechselnd durch die Punkte 8 und 9 laufen, und die Geraden (1), (2), (3) sind die Diagonalen 23, 45, 67 dieses Sechsecks. (3) muß daher durch den Schnittpunkt 1 der Geraden (1) und (2) gehen, und 1 ist der BRIANCHONSCHER Punkt des Sechsecks.

Bei unserer Konstruktion haben die Punkte der Konfiguration $(9_3)_1$ eine verschiedene Bedeutung; 246357 bilden das Sechseck, 8 und 9

sind die beiden Punkte, durch die seine Seiten gehen, und 1 ist der BRIANCHONSche Punkt. Diese Asymmetrie liegt aber nicht im Wesen der Konfiguration, sondern nur an unserer Willkür. Wir können nämlich auch einen der beiden Punkte 8 und 9 als BRIANCHONSchen Punkt ansehen; es genügt, das für den Punkt 8 zu veranschaulichen (Abb. 113), da wir aus Abb. 112 sehen, daß 8 und 9 gleichberechtigt sind. Ebenso können wir jeden der Punkte 246357 zum BRIANCHONSchen Punkt machen; wegen der Gleichberechtigung dieser Punkte genügt es wiederum, dies am Punkt 2 aufzuzeigen (Abb. 114).

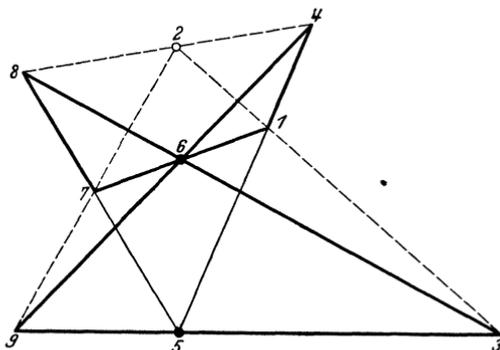


Abb. 114.

Wegen dieser inneren Symmetrie wird $(9_3)_1$ als *reguläre* Konfiguration bezeichnet. Ähnlich wie bei den Punktsystemen und den Polyedern kommt man bei den Konfigurationen auf den Begriff der Regularität durch das Studium gewisser Abbildungen einer Konfiguration auf sich selbst, die man Automorphismen nennt und die eine analoge Rolle spielen wie die Decktransformationen bei den Punktsystemen und Polyedern. Man erhält einen Automorphismus einer Konfiguration,

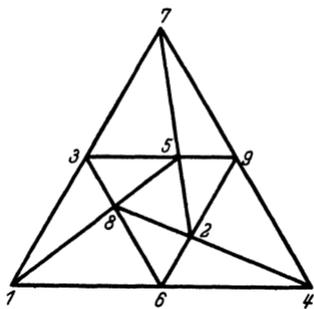


Abb. 115.

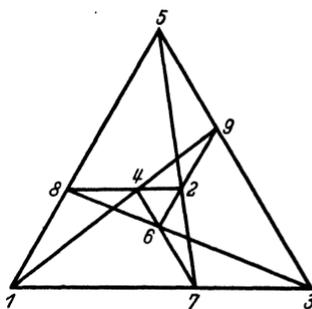


Abb. 116.

wenn man ihre Punkte unter sich und ihre Geraden unter sich so vertauschen kann, daß bei dieser Vertauschung keine Incidenz verlorengeht oder neu hinzukommt. Es ist leicht zu erkennen, daß die Automorphismen eine Gruppe bilden. Regulär heißt nun eine Konfiguration, wenn diese Gruppe „transitiv“ ist, d. h. so viele Abbildungen enthält, daß man jeden beliebigen Punkt der Konfiguration durch einen Automorphismus in jeden beliebigen anderen Punkt der Konfiguration überführen kann.

Zum Studium der Automorphismen genügt das abstrakte Schema der Konfiguration; man kann in diesem Sinne zeigen, daß die Konfigurationsschemata (7_3) und (8_3) regulär sind. Ebenso $(9_4 12_3)$ (S. 90).

Wenden wir uns nun zu den beiden anderen Konfigurationen (9_3) . Sie werden in den Abb. 115 und 116 dargestellt. Um zu erkennen, worin

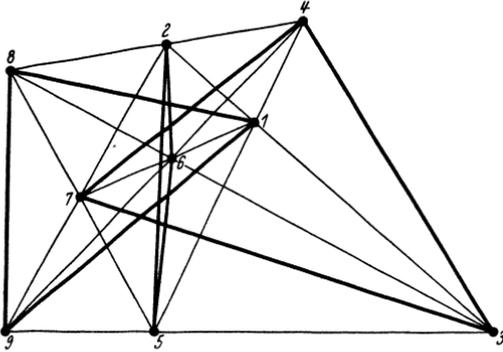


Abb. 117.

die drei Konfigurationen sich unterscheiden, können wir folgendermaßen vorgehen: Da bei jeder Konfiguration (p_3) jeder Punkt mit genau sechs anderen durch Konfigurationsgeraden verbunden ist, muß es im Fall $p=9$ zu jedem Konfigurationspunkt zwei weitere geben, die mit ihm nicht verbunden sind. So sind bei $(9_3)_1$ die Punkte 8

und 9 nicht mit 1 verbunden. Da 8 und 9 auch untereinander nicht verbunden sind, so schließen sich 1 8 9 zu einem Dreieck unverbundener Punkte zusammen. Ebenso bilden 2 5 6 und 3 4 7 solche Dreiecke (Abb. 117). Wenn wir nun dasselbe Verfahren auf $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ anwenden und die Strecken zwischen unverbundenen Punkten wieder zu Polygonen zusammensetzen, so ergibt sich für $(9_3)_2$ ein Neuneck (Abb. 118) und für $(9_3)_3$ ein Sechseck und ein Dreieck (Abb. 119). Daraus ergibt sich

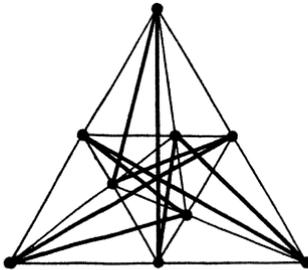


Abb. 118.

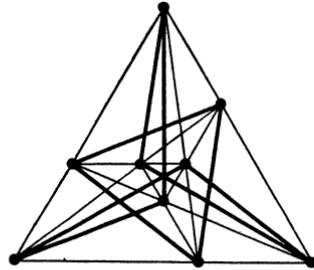


Abb. 119.

zunächst, daß die drei Abb. 108, 115 und 116 wirklich verschiedene Konfigurationen darstellen und sich nicht bloß durch andere Lage der Punkte unterscheiden. Ferner können wir schließen, daß $(9_3)_3$ sicher nicht regulär ist. Denn ein Automorphismus kann einen Punkt des Sechsecks offenbar nur in einen Punkt des Sechsecks und niemals in einen Punkt des Dreiecks überführen. Dagegen läßt bei $(9_3)_2$ die regelmäßige Anordnung der unverbundenen Punkte vermuten, daß diese Konfiguration regulär ist; die genauere Betrachtung des Schemas bestätigt das.

Wenn wir analog wie $(9_3)_1$ auch die beiden anderen Konfigurationen schrittweise zu konstruieren versuchen, so stellt sich heraus, daß in diesen Fällen die letzte Incidenz nicht von selbst erfüllt ist, sondern nur dann, wenn wir schon bei früheren Schritten spezielle Anordnungen treffen. Hierin liegt der Grund, warum $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ keine so prinzipielle Bedeutung haben wie $(9_3)_1$. Diese Konfigurationen bringen keinen allgemeinen projektiv-geometrischen Satz zum Ausdruck. Abb. 120 gibt ein Beispiel, in dem die letzte Gerade von $(9_3)_2$ sich nicht zeichnen läßt.

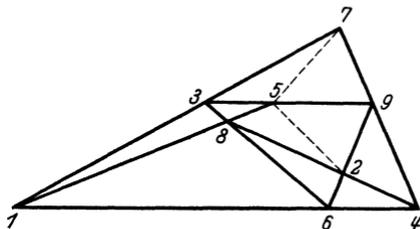


Abb. 120.

Die Hilfskonstruktionen, die bei $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ nötig sind, zeichnen sich aber durch eine Besonderheit aus. Sie lassen sich nämlich mit alleiniger Hilfe des Lineals durchführen, so daß alle drei Konfigurationen (9_3) mit dem Lineal allein konstruierbar sind. Analytisch drückt sich das darin aus, daß alle Elemente der Konfiguration sich durch sukzessive Auflösung linearer Gleichungen bestimmen lassen, deren Koeffizienten rationale Ausdrücke in den jeweils schon berechneten Bestimmungsgrößen der Konfiguration sind. Nun sind zwar die Gleichungen gerader Linien stets linear. Um

aber das Gleichungssystem einer Konfiguration zu gewinnen, müssen wir einige der Koeffizienten durch Elimination aus anderen Gleichungen berechnen, da ja einige Konfigurationsgeraden durch die früher konstruierten festgelegt sind. Im allgemeinen werden diese Eliminationen auf Gleichungen höheren Grades führen. Das muß z. B. bei (8_3) eintreten, da wir sonst nicht auf komplexe Elemente stoßen würden. Demgegenüber erweisen sich bei den Konfigurationen (9_3) alle Hilfsgleichungen als linear, und daraus folgt eben, daß diese drei Konfigurationen sämtlich im Reellen konstruiert werden können, und zwar mit dem Lineal allein.

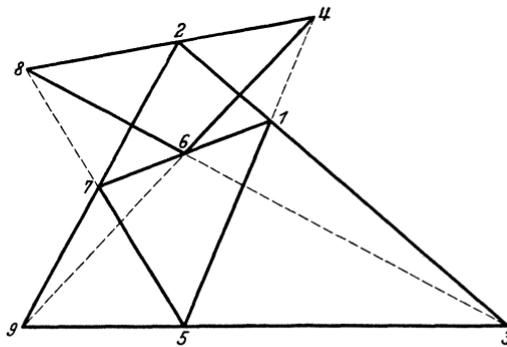


Abb. 121.

Wir können uns die Elemente der Konfigurationen (9_3) auf mannigfache Weise angeordnet denken. So lassen sie sich in allen drei Fällen als je drei Dreiecke auffassen, von denen das erste dem zweiten, das zweite dem dritten und das dritte dem ersten einbeschrieben ist. Ein solches System von Dreiecken bilden z. B. 157, 239, 468 in Abb. 121,

258, 369, 147 in Abb. 122 und 147, 258, 369 in Abb. 123. In ähnlicher Weise hatten wir (8_3) als System zweier wechselseitig unbeschriebener

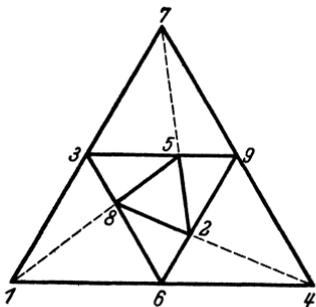


Abb. 122.

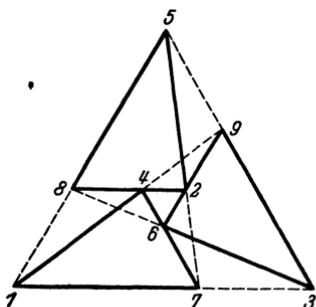


Abb. 123.

Vierecke gedeutet (Abb. 107, S. 90). Ferner kann man alle Konfigurationen (9_3) als Neunecke auffassen, die sich selbst ein- und um-

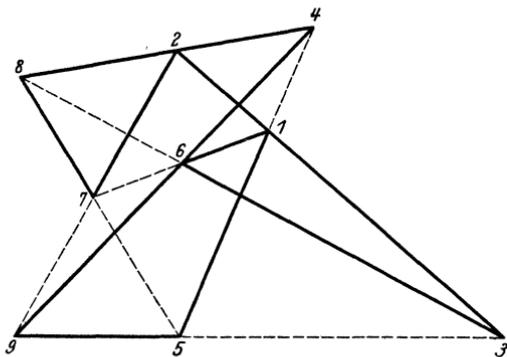


Abb. 124.

beschrieben sind. Solche Neunecke sind 2361594872 in Abb. 124, 1627384951 in Abb. 125 und 1473695281 in Abb. 126. Mit Hilfe geeigneter Automorphismen lassen sich in der Konfiguration $(9_3)_1$ noch mehrere andere Neunecke der gleichen Eigenschaft auffinden.

Die Aufstellung von p -Ecken, die sich selbst gleichzeitig ein und um-

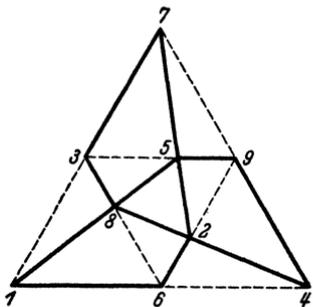


Abb. 125.

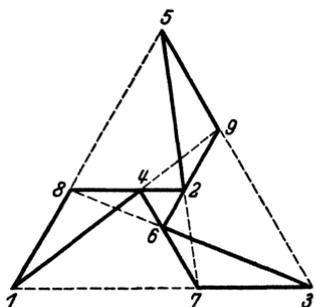


Abb. 126.

beschrieben sind, muß stets auf Konfigurationen (p_3) führen; denn auf jeder Polygonseite liegt außer den beiden Ecken, die sie verbindet, noch ein weiterer Eckpunkt des Polygons, und ebenso muß jeder Eckpunkt

auf drei Polygonseiten liegen. Wir haben dabei nur die Annahme gemacht, daß alle Seiten und Ecken des Polygons gleichberechtigt sind. Andernfalls könnten auf einer Polygonseite zwei oder mehr weitere Polygonecken liegen; dann müßte aber eine andere Polygonseite dafür leer ausgehen.

Auch (7_3) und (8_3) lassen sich als derartige p -Ecke deuten. In der Bezeichnungsweise unserer Schemata sind das Siebeneck 12457361 und das Achteck 126534871 sich selbst ein- und umbeschrieben.

Um eine weitere wichtige Eigenschaft der Konfigurationen kennenzulernen, müssen wir uns mit dem Dualitätsprinzip beschäftigen. Dieses Prinzip verleiht der projektiven Geometrie ihre besondere Übersichtlichkeit und Symmetrie. Es läßt sich anschaulich aus der Methode des Projizierens herleiten, die wir schon bei der Aufstellung der BRIANCHONSchen Sätze verwandt haben.

§ 18. Perspektive, unendlich ferne Elemente und ebenes Dualitätsprinzip.

Wenn wir auf einer vertikalen Tafel das Bild einer ebenen Landschaft zeichnen (Abb. 127), so erscheint das Bild der Ebene von einer Geraden h , dem Horizont, begrenzt, und zwei in der Ebene verlaufende

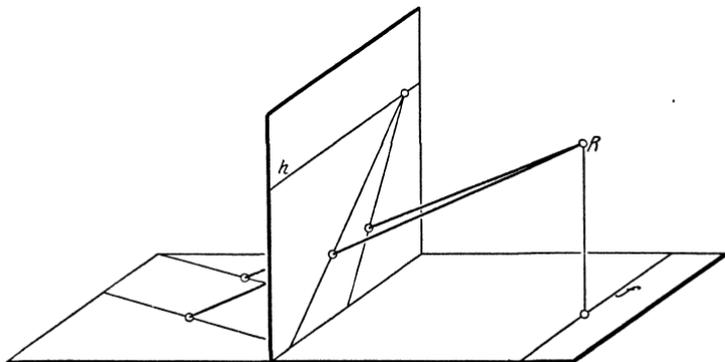


Abb. 127.

parallele Geraden, die nicht außerdem noch der Bildtafel parallel sind, erscheinen im Bild als zwei Geraden, die sich auf dem Horizont treffen. Ihr Treffpunkt wird in der Theorie des Zeichnens der Fluchtpunkt der Parallelen genannt.

Bei der Abbildung durch Zentralperspektive bleiben also die Parallelen gewöhnlich nicht parallel. Ferner sehen wir, daß diese Abbildung nicht umkehrbar eindeutig ist. In der Bildtafel wird durch die Punkte des Horizonts kein Punkt der Ebene dargestellt. Umgekehrt gibt es in der Ebene Punkte, die nicht abgebildet werden. Es sind das die