

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0029

LOG Titel: § 18. Perspektive, unendlich ferne Elemente und ebenes Dualitätsprinzip.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

auf drei Polygonseiten liegen. Wir haben dabei nur die Annahme gemacht, daß alle Seiten und Ecken des Polygons gleichberechtigt sind. Andernfalls könnten auf einer Polygonseite zwei oder mehr weitere Polygonecken liegen; dann müßte aber eine andere Polygonseite dafür leer ausgehen.

Auch (7_3) und (8_3) lassen sich als derartige p -Ecke deuten. In der Bezeichnungsweise unserer Schemata sind das Siebeneck 12457361 und das Achteck 126534871 sich selbst ein- und umbeschrieben.

Um eine weitere wichtige Eigenschaft der Konfigurationen kennenzulernen, müssen wir uns mit dem Dualitätsprinzip beschäftigen. Dieses Prinzip verleiht der projektiven Geometrie ihre besondere Übersichtlichkeit und Symmetrie. Es läßt sich anschaulich aus der Methode des Projizierens herleiten, die wir schon bei der Aufstellung der BRIANCHONSchen Sätze verwandt haben.

§ 18. Perspektive, unendlich ferne Elemente und ebenes Dualitätsprinzip.

Wenn wir auf einer vertikalen Tafel das Bild einer ebenen Landschaft zeichnen (Abb. 127), so erscheint das Bild der Ebene von einer Geraden h , dem Horizont, begrenzt, und zwei in der Ebene verlaufende

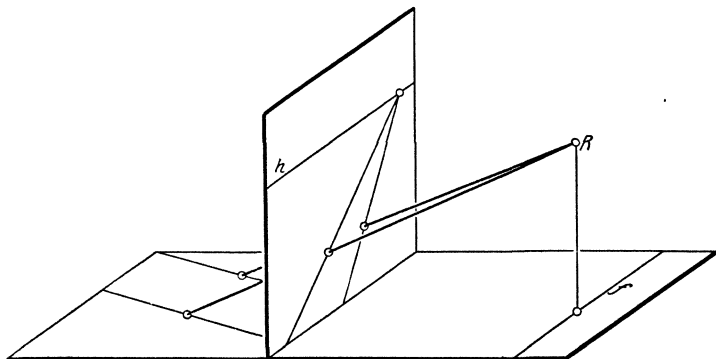


Abb. 127.

parallele Geraden, die nicht außerdem noch der Bildtafel parallel sind, erscheinen im Bild als zwei Geraden, die sich auf dem Horizont treffen. Ihr Treffpunkt wird in der Theorie des Zeichnens der Fluchtpunkt der Parallelen genannt.

Bei der Abbildung durch Zentralperspektive bleiben also die Parallelen gewöhnlich nicht parallel. Ferner sehen wir, daß diese Abbildung nicht umkehrbar eindeutig ist. In der Bildtafel wird durch die Punkte des Horizonts kein Punkt der Ebene dargestellt. Umgekehrt gibt es in der Ebene Punkte, die nicht abgebildet werden. Es sind das die

Punkte der Geraden f (Abb. 127), die senkrecht unter dem Betrachter R der Bildtafel parallel läuft.

Diese Erscheinung läßt sich einfacher beschreiben, wenn wir von den Punkten zu ihren Sehstrahlen übergehen. Jedem Punkt P der Ebene e (Abb. 128) entspricht dann eine Gerade $AP = \phi$, die den Punkt mit dem Augenkpunkt A verbindet. Das Bild von P auf einer beliebigen Tafel t ist dann der Punkt P' , in dem die Gerade ϕ die Tafel trifft; durch die Angabe von ϕ ist die Abbildung also bestimmt. Durchläuft P eine Kurve in e , so durchläuft ϕ einen Kegel mit der Spitze A . Das Bild der Kurve auf t ist der Schnitt von t mit dem Kegel. Durchläuft P insbesondere eine Gerade g in e , so geht der Kegel in die Ebene γ über, die durch A und g geht. Während also den Punkten von e Geraden durch A entsprechen, führen die Geraden von e auf Ebenen durch A . Das Bild von g in t ist der Schnitt von t mit γ , also wieder eine Gerade g' .

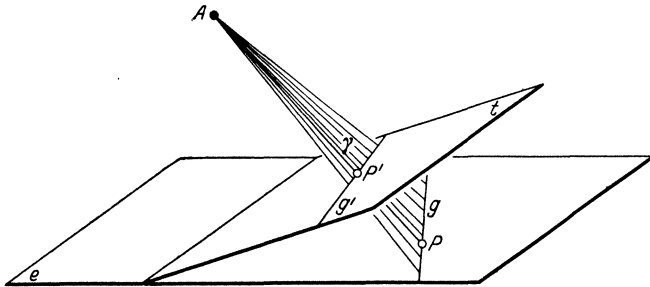


Abb. 128.

Es ist die wichtigste Eigenschaft der Zentralperspektive, daß Geraden stets durch Geraden abgebildet werden.

Wir haben die perspektivische Abbildung in zwei Teilabbildungen zerlegt, von denen die zweite als eine Umkehrung der ersten angesehen werden kann. Zuerst wurden die Punkte (P) und Geraden (g) einer Ebene durch die Geraden (ϕ) und Ebenen (γ) durch A ersetzt, hierauf die Geraden und Ebenen durch A wieder durch Punkte (P') und Geraden (g') einer anderen Ebene. Aus Symmetriegründen genügt es also, den ersten Schritt allein zu betrachten.

Diese Abbildung $e \rightarrow A$ ist nur in der angegebenen Richtung vollständig erklärt, in der Richtung $A \rightarrow e$ dagegen nicht. Unter den Geraden durch A nehmen bei der Abbildung diejenigen eine Sonderstellung ein, die e parallel sind. Sie entsprechen keinem Punkt von e , während die übrigen Geraden durch A zu einem bestimmten Punkt von e gehören, nämlich zu dem Punkt, in dem sie e treffen. Die Parallelen ϕ_u zu e durch A erfüllen eine bestimmte Ebene γ_u , nämlich die Parallelebene zu e durch A (vgl. Abb. 129). Unter allen durch A gehenden Ebenen ist es wiederum die Ebene γ_u , die bei der Abbildung $A \rightarrow e$ ausgezeichnet ist. Während nämlich die anderen durch A gehenden

Ebenen einer bestimmten Geraden g in e zugeordnet sind, in der sie e treffen, entspricht der Ebene γ_u keine solche Gerade, da sie e nicht trifft.

Es ist nun zweckmäßig, diese Ausnahmefälle auf begrifflichem Wege zu beseitigen, indem man der Ebene e noch weitere Punkte P_u als „unendlich ferne“ Punkte zurechnet. Diese Punkte sind dadurch definiert, daß sie bei der Abbildung $A \rightarrow e$ die Bilder der Strahlen p_u sein sollen. Ihre Gesamtheit haben wir als das Bild der Ebene γ_u anzusehen. Wenn wir die Ausnahmestellung dieser Ebene gegenüber den anderen Ebenen durch A aufheben wollen, müssen wir ihr Bild als Gerade bezeichnen. Wir sagen daher, daß die unendlich fernen Punkte von e eine Gerade g_u , die unendlich ferne Gerade von e erfüllen¹. Nachdem wir die Ebene e in dieser Weise ergänzt haben, ist offenbar die Abbildung der Punkte und Geraden von e auf die Geraden und Ebenen durch A umkehrbar eindeutig und vollständig erklärt.

Die Zweckmäßigkeit dieser Definitionen zeigt sich, wenn wir nun die Zentralperspektive von e auf eine beliebige andere Ebene t betrachten. Auch der Ebene t haben wir in gleicher Weise wie e unendlich ferne Punkte zuzurechnen, die die unendlich ferne Gerade der Ebene t bilden. Wenn aber t nicht zufällig parallel zu e ist, entspricht bei der Abbildung $A \rightarrow t$ der unendlich fernen Geraden l_u von t nicht γ_u , sondern irgendeine andere Ebene λ durch A . λ trifft e in einer Geraden l . Bei der perspektivischen Abbildung $e \rightarrow t$ entsprechen also den Punkten der unendlich fernen Geraden der einen Ebene die Punkte einer gewöhnlichen Geraden in der anderen Ebene. Erst durch die Einführung der unendlich fernen Punkte wird die Zentralperspektive zu einer Abbildung, die die Punkte und Geraden einer Ebene umkehrbar eindeutig auf die Punkte und Geraden der Bildebene abbildet, und dabei erscheinen die unendlich fernen Punkte mit den endlichen als gleichberechtigt.

Wir wollen nun untersuchen, wie der Begriff der Incidenz zwischen Punkt und Gerade durch Hinzunahme der unendlich fernen Elemente erweitert werden muß. Wir gehen wieder von der Abbildung $e \rightarrow A$ aus. Ein *endlicher* Punkt P ist mit einer *endlichen* Geraden g in e dann und nur dann incident, wenn die zugehörigen p und γ incident sind. Wir verallgemeinern das auf *beliebige* Punkte und Geraden von e . Ein unendlich ferner Punkt P_u ist dann mit einer Geraden g incident zu nennen, wenn der Strahl p_u mit γ incident ist. Fällt γ mit γ_u zusammen, ist also g die unendlich ferne Gerade von e , so liefert das nichts Neues. Ist dagegen g eine endliche Gerade, so schneiden sich γ und γ_u in einer bestimmten Geraden p_u ; jede endliche Gerade besitzt daher genau einen unendlich fernen Punkt: ihren Schnittpunkt mit g_u . Ist g' eine Parallele zu g ,

¹ Die Bezeichnung „unendlich fern“ rührt daher, daß der Sehstrahl eines Punktes von e sich stets einem Strahl p_u nähert, wenn der Punkt sich in e in bestimmter Richtung unbegrenzt entfernt.

so ist das damit äquivalent, daß die zu g' gehörende Ebene γ' durch p_u geht (Abb. 129). Zwei Geraden sind also dann und nur dann parallel, wenn sie denselben unendlich fernen Punkt besitzen; das ist der Sinn der bisweilen gebrauchten, jedoch ohne weitere Erläuterung sinnlosen Redeweise: Parallelen schneiden sich im Unendlichen. Zugleich erkennen wir den Grund der zu

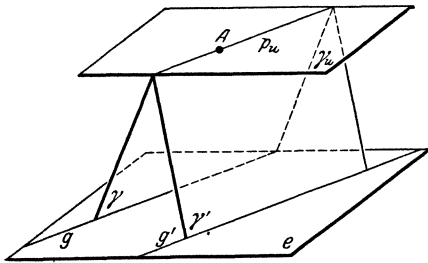


Abb. 129.

Beginn dieses Abschnitts erwähnten Tatsache, daß zwei Parallelen in ihrem auf dem Horizont gelegenen Fluchtpunkt zusammenzulaufen scheinen. Als Beispiel dafür, wie sich die geometrischen Begriffe durch die Einführung der unendlich fernen Elemente vereinfachen, erwähnen wir die

Kegelschnitte. Da sie, wie im ersten Kapitel bewiesen, durch Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel entstehen, so können sie alle als perspektive Bilder eines Kreises angesehen werden. Je nachdem kein oder ein oder zwei Projektionsstrahlen zur Bildebene parallel liefen, ergab sich eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel. Dafür können wir jetzt sagen: Ein Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem er die unendlich ferne Gerade entweder gar nicht trifft oder sie in einem Punkte berührt oder sie in zwei Punkten schneidet. Bei Zentralprojektion auf eine andere Ebene entsteht dann ein Kegelschnitt, der den Horizont nicht trifft, berührt oder schneidet. Welcher Art dieser Kegelschnitt ist, hängt von der Stellung der Bildebene ab.

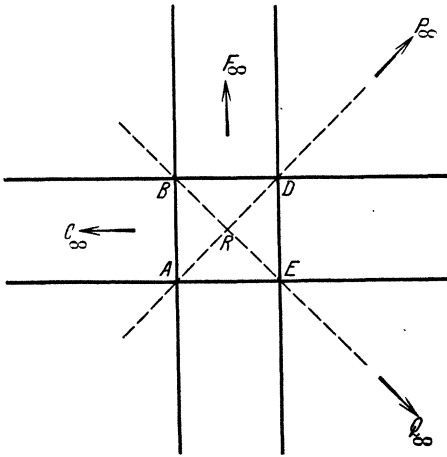


Abb. 130.

Auch sonst ist die Zentralprojektion ein wichtiges Hilfsmittel, um aus speziellen Figuren viel allgemeinere herzustellen; so kann die Figur des vollständigen Vierecks (S. 85) stets aus der nebenstehenden einfachen Abb. 130 abgeleitet werden.

Die Bedeutung der unendlich fernen Elemente besteht aber vor allem darin, daß durch sie die axiomatische Grundlegung der ebenen Geometrie abgeändert und wesentlich vereinfacht werden kann. Beschränkt man

sich nämlich auf die endlichen Punkte der Ebene, so wird die Incidenz zwischen Punkten und Geraden durch die folgenden Axiome eingeschränkt:

1. Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen stets eine mit ihnen incidente Gerade.
2. Zwei verschiedene Punkte bestimmen nur eine mit ihnen incidente Gerade.

Aus dem zweiten Axiom wird gefolgert: Zwei Geraden einer Ebene haben einen oder keinen Punkt gemeinsam. Denn hätten sie zwei oder mehr Punkte gemein, so müßten sie in eine einzige Gerade zusammenfallen.

Der Fall, daß zwei Geraden einer Ebene keinen Punkt gemeinsam haben, wird durch das euklidische Axiom der Parallelen erläutert und eingeschränkt:

Wenn in einer Ebene eine beliebige Gerade a und ein beliebiger Punkt A außerhalb a gegeben ist, so gibt es in der Ebene eine einzige Gerade b , die durch A läuft und a nicht schneidet; die Gerade b wird die Parallele zu a durch A genannt.

Wenn wir nun nicht bloß die endlichen Punkte betrachten, sondern die Ebene durch Hinzunahme der unendlich fernen Geraden zur „projektiven Ebene“ erweitern, so können wir statt der erwähnten drei Axiome die beiden folgenden Axiome zugrundelegen:

1. Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen eine und nur eine Gerade.
2. Zwei voneinander verschiedene Geraden bestimmen einen und nur einen Punkt.

Auf diese beiden Axiome ist die Incidenz von Punkten und Geraden in der projektiven Ebene zurückzuführen. Dabei sind die unendlich fernen Punkte und die unendlich ferne Gerade in keiner Weise von den anderen Punkten und Geraden unterschieden. Wenn wir die projektive Ebene durch ein Gebilde realisieren wollen, in dem die Gleichberechtigung aller Punkte und aller Geraden auch anschaulich zu erkennen ist, so können wir wieder auf das Bündel der Geraden und Ebenen durch einen festen Punkt zurückgreifen, indem wir die Geraden als „Punkte“ und die Ebenen als „Geraden“ ansehen. An diesem Modell ist die Gültigkeit der beiden genannten Axiome am leichtesten einzusehen.

Dieses Axiomenpaar hat nun die rein formale Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn man das Wort Gerade durch Punkt und das Wort Punkt durch Gerade ersetzt. Durch nähere Untersuchung ergibt sich, daß auch in den übrigen Axiomen der ebenen projektiven Geometrie diese beiden Worte vertauschbar sind, ohne daß der Inhalt des Axiomensystems sich ändert. Dann müssen die beiden Worte aber auch in allen aus diesen Axiomen abgeleiteten Lehrsätzen auswechselbar sein. Die Vertauschbarkeit der Punkte mit den Geraden wird als das Prinzip

der *Dualität* in der projektiven Ebene bezeichnet. Nach diesem Prinzip gehört zu jedem Lehrsatz ein zweiter, dem ersten dual entsprechender Satz, und ebenso gehört zu jeder Figur eine dual entsprechende Figur. Dabei entsprechen den Punkten einer Kurve eine Reihe von Geraden, die im allgemeinen eine zweite Kurve als Tangenten einhüllen. Eine nähere Betrachtung lehrt, daß die Geradenschar, die den Punkten eines Kegelschnittes dual entspricht, stets wieder einen Kegelschnitt einhüllt.

Nach dem Dualitätsprinzip können wir nun aus den BRIANCHONSCHEN Sätzen eine Reihe weiterer Sätze herleiten, die nach ihrem Entdecker die Sätze von PASCAL genannt werden. Um die Dualität der beiden Satzgruppen deutlich hervortreten zu lassen, sollen sie in genau entsprechender Form nebeneinandergeschrieben werden:

Sätze von BRIANCHON.

1, 2, 3. Es sei ein Sechseck aus sechs Geraden gebildet, die Tangenten eines Kegelschnittes sind (Sechseck, das einem Kegelschnitt umbeschrieben ist). Dann schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkt.

4. Es seien sechs Gerade gegeben, von denen drei mit einem Punkt A und drei mit einem Punkt B incident sind. Ich greife sechs Schnittpunkte heraus, so daß sie mit den zugehörigen Verbindungslinien ein Sechseck bilden, dessen Seiten abwechselnd durch A und B gehen. Dann schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkt (BRIANCHONscher Punkt des Sechsecks).

Sätze von PASCAL.

1, 2, 3. Es sei ein Sechseck aus sechs Punkten gebildet, die auf einem Kegelschnitt liegen (Sechseck, das einem Kegelschnitt eingeschrieben ist). Dann liegen die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.

4. Es seien sechs Punkte gegeben, von denen drei mit einer Geraden a und drei mit einer Geraden b incident sind. Ich greife sechs Verbindungsgeraden heraus, so daß sie mit den zugehörigen Schnittpunkten ein Sechseck bilden, dessen Ecken abwechselnd auf a und b liegen. Dann liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden (PASCALSche Gerade des Sechsecks).

Die Figur, die zum letzten Satz von PASCAL gehört, muß offenbar der Konfiguration $(9_3)_1$ dual entsprechen. Nun ist allgemein die duale Figur zu einer Konfiguration $(p_\gamma g_\pi)$ wieder eine Konfiguration, und zwar vom Typus $(g_\pi p_\gamma)$. Die speziellen Konfigurationen, die wir mit (p_γ) bezeichnen, und nur diese Konfigurationen besitzen als duale Figur wieder eine Konfiguration desselben Typus. Nun wäre es denkbar, daß die Konfiguration des PASCALSchen Satzes, also die duale Figur zu $(9_3)_1$ eine der beiden anderen Konfigurationen (9_3) wäre. Es zeigt sich jedoch (Abb. 131), daß auch der PASCALSche Satz durch $(9_3)_1$ dargestellt wird. Deswegen hatten wir diese Konfiguration von vorn-

herein als die BRIANCHON-PASCALSche bezeichnet. $(9_3)_1$ ist also „dual invariant“. Ebenso wie den BRIANCHONschen Punkt können wir auch die PASCALSche Gerade ganz beliebig in der Konfiguration wählen.

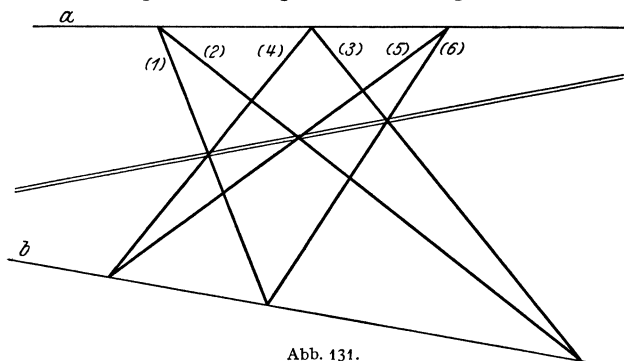


Abb. 131.

Aus dem letzten PASCALSchen Satz läßt sich mit Hilfe des Unendlichfernen ein Spezialfall ableiten, der ohne Zuhilfenahme dieses Begriffes in gar keinem erkennbaren Zusammenhang mit dem ursprünglichen Lehrsatz stehen würde. Wenn wir nämlich die PASCALSche Gerade ins Unendlichferne legen, erhalten wir den Lehrsatz (Abb. 132): Wenn die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden liegen, und außerdem zwei Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind, so muß auch das dritte Seitenpaar parallel sein.

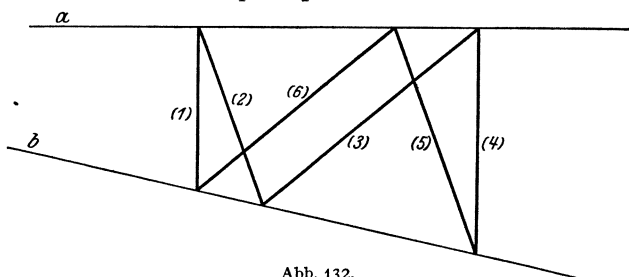


Abb. 132.

Dieser Spezialfall des PASCALSchen Satzes wird als der Satz von PAPPUS bezeichnet.

Nachdem wir gesehen haben, daß $(9_3)_1$ dual invariant ist, läßt sich leicht schließen, daß auch $(9_3)_2$ und $(9_3)_3$ dual invariant sein müssen. Denn sonst gäbe es nur die eine Möglichkeit, daß $(9_3)_2$ durch Anwendung des Dualitätsprinzips in $(9_3)_3$ überginge. Nun ist aber $(9_3)_2$ regulär, $(9_3)_3$ nicht. Also kann die eine dieser Figuren nicht zur anderen dual sein.

Wir gehen jetzt zu den Konfigurationen (10_3) über. Zum Verständnis der wichtigsten unter diesen Konfigurationen, der von DESARGUES, müssen wir die Einführung der unendlich fernen Elemente und das Dualitätsprinzip von der Ebene auf den Raum übertragen.