§ 19. Unendlich ferne Elemente und Dualitätsprinzip im Raum. Desarguesscher Satz und Desarguessche Konfiguration (10_3).

Wir haben durch Projektion im Raum den Begriff der projektiven Ebene gewonnen. Auch der Raum als Ganzes wird nun in der projektiven Geometrie durch Hinzunahme unendlich ferner Elemente zu einem in mancher Hinsicht einfacheren Gebilde, dem „projektiven Raum", umgestaltet, nur läßt sich in diesem Fall das Verfahren nicht mehr anschaulich, sondern nur noch abstrakt begründen. Wir denken uns zunächst nach dem früheren Prinzip auf allen Ebenen des gewöhnlichen Raumes die unendlich fernen Elemente eingeführt. Dann liegt es nahe, die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte und Geraden als eine Ebene, die „unendlich ferne Ebene" des Raumes zu deuten. Diese Gesamtheit hat nämlich mit den gewöhnlichen Ebenen des Raumes die Eigenschaft gemein, von jeder Ebene in einer Geraden getroffen zu werden, der unendlich fernen Geraden jener Ebene. Mit jeder gewöhnlichen Geraden hat die unendlich ferne Ebene wie jede andere Ebene, die die Gerade nicht enthält, genau einen Punkt gemein, den unendlich fernen Punkt der Geraden. Ferner können zwei Ebenen dann und nur dann parallel sein, wenn sie dieselbe unendlich ferne Gerade besitzen[1].

Viele Erscheinungen der räumlichen Geometrie werden durch diese Auffassung vereinfacht. So können wir die Parallelprojektion als einen Spezialfall der Zentralprojektion ansehen, bei dem das Projektionszentrum ein unendlich ferner Punkt ist. Ferner läßt sich z. B. der Unterschied zwischen dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid dadurch kennzeichnen, daß das Hyperboloid die unendlich ferne Ebene in einem nichtausgearteten Kegelschnitt schneidet, während das Paraboloid die unendlich ferne Ebene in einem Geradenpaar von Erzeugenden schneidet. Diese Unterscheidung ist nämlich gleichbedeutend mit der auf S. 13 gegebenen Erklärung, daß drei windschiefe Geraden dann und nur dann auf einem Paraboloid und nicht auf einem Hyperboloid liegen, wenn sie einer festen Ebene parallel sind; denn das besagt, daß die drei Geraden eine unendlich ferne Gerade treffen, die auf der Fläche liegen muß, weil sie drei Punkte mit ihr gemein hat.

Im projektiven Raum sind alle Ebenen offenbar als projektive Ebenen anzusehen, in ihnen gilt also das ebene Dualitätsprinzip. Im Raum als Ganzem herrscht aber noch ein davon verschiedenes Dualitätsprinzip.

Um es zu erhalten, stellen wir analog wie in der Ebene die Axiomgruppe zusammen, durch die im projektiven Raum die Incidenz zwischen den Punkten, Geraden und Ebenen geregelt wird, wenn wir zwischen

---

[1] Denn die Parallelität einerseits, die Gemeinsamkeit der unendlich fernen Geraden andererseits sind beide mit der Eigenschaft gleichbedeutend, daß sich zu jeder Geraden der einen Ebene eine Parallele in der anderen Ebene ziehen läßt.

den endlichen und den unendlich fernen Gebilden keinen Unterschied machen. Diese Axiome lassen sich folgendermaßen formulieren:

1. Zwei Ebenen bestimmen eine und nur eine Gerade; drei Ebenen, die nicht durch eine Gerade gehen, bestimmen einen und nur einen Punkt.

2. Zwei sich schneidende Geraden bestimmen einen und nur einen Punkt und eine und nur eine Ebene.

3. Zwei Punkte bestimmen eine und nur eine Gerade; drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen eine und nur eine Ebene.

Dieses Axiomensystem bleibt ungeändert, wenn man die Worte Punkt und Ebene miteinander vertauscht (das erste Axiom wird dabei mit dem dritten vertauscht, und das zweite bleibt ungeändert). Ebenso bleiben auch die übrigen Axiome der räumlichen projektiven Geometrie

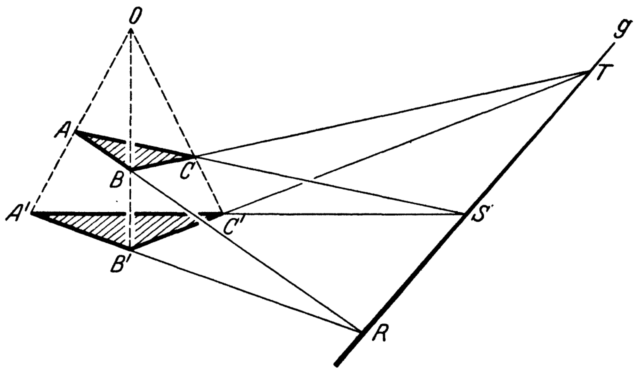

Abb. 133.

bei dieser Vertauschung in ihrem Gesamtinhalt ungeändert, so daß also im Raum Ebene und Punkt einander dual entsprechen, während die Gerade sich selbst entspricht. Der Gesamtheit der Punkte einer Fläche entspricht dual das System der Tangentialebenen einer anderen Fläche. Wie die Kegelschnitte der Ebene, so sind im Raum die Flächen zweiten Grades zu sich selbst dual.

Der einfachste und zugleich wichtigste Satz der räumlichen projektiven Geometrie wird nach DESARGUES benannt. Der DESARGUESsche Satz lautet (Abb. 133):

Es seien zwei im Raum liegende Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben. Diese Dreiecke mögen so angeordnet sein, daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen einzigen Punkt O gehen. Dann schneiden sich zunächst die drei Paare von entsprechenden Dreiecksseiten in drei Punkten RST, und zweitens liegen diese Schnittpunkte auf einer Geraden.

Der erste Teil des Satzes ist einfach zu beweisen. Die beiden sich schneidenden Geraden AA' und BB' bestimmen nach dem zweiten räumlichen Axiom eine Ebene. In dieser Ebene verlaufen aber auch die Geraden AB und $A'B'$, so daß sie nach dem zweiten ebenen Axiom einen Schnittpunkt R besitzen. Es bleibt dahingestellt, ob R im Endlichen oder Unendlichen liegt. Die Existenz der anderen beiden Punkte S und T wird ebenso bewiesen.

Der zweite Teil des Satzes ist in dem Fall leicht einzusehen, daß die Dreiecke in verschiedenen Ebenen liegen. Dann bestimmen diese Ebenen eine — endliche oder unendlich ferne — Schnittgerade (räumliches Axiom 1). Von jedem Paar entsprechender Dreieckseiten verläuft die eine in der einen Ebene, die andere in der anderen Ebene. Da sich nun die beiden Seiten schneiden, muß ihr Schnittpunkt auf der Geraden liegen, die beide Ebenen gemeinsam haben. Im allgemeinen Fall ist der DESARGUESsche Satz hiermit bewiesen.

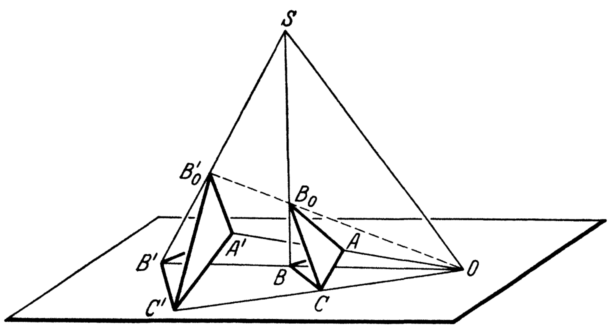

Abb. 134.

Besonders wichtig ist aber gerade der Spezialfall, daß die Dreiecke in einer Ebene liegen. Dann läßt sich der Beweis ähnlich wie der des BRIANCHONschen Satzes durch Projektion aus dem Raum erbringen. Wir haben nur zu zeigen, daß jede ebene DESARGUESsche Figur sich als Projektion einer räumlichen DESARGUESschen Figur auffassen läßt. Zu diesem Zwecke verbinden wir alle Punkte und Geraden der ebenen DESARGUESschen Figur mit einem außerhalb der Ebene gelegenen Punkt S (Abb. 134). Ferner legen wir durch die Gerade AC eine Ebene, die BS in dem von S verschiedenen Punkt B_0 treffen möge. Sodann ziehen wir die Gerade OB_0. Diese Gerade liegt mit $B'S$ in einer Ebene, also besitzen die beiden Geraden einen Schnittpunkt B_0'. Dann bilden aber die Dreiecke AB_0C und $A'B_0'C'$ eine räumliche DESARGUESsche Figur, da die Verbindungslinien entsprechender Ecken alle durch O gehen. Aus der Schnittgeraden der Ebenen jener beiden Dreiecke entsteht durch Projektion von S aus eine Gerade in der Zeichenebene, auf der sich die Paare entsprechender Seiten der ursprünglich betrachteten Dreiecke ABC und $A'B'C'$ schneiden müssen. Damit ist der DESARGUESsche Satz vollständig bewiesen.

Sowohl das ebene wie auch das räumliche Dualitätsprinzip führen auf interessante Umformungen des DESARGUESschen Satzes. Zunächst sieht man leicht ein, daß von diesem Satz auch die Umkehrung richtig ist; aus der Existenz der DESARGUESschen Geraden, auf der sich Paare entsprechender Dreieckseiten schneiden, folgt die Existenz des DESARGUESschen Punktes, durch den die Verbindungslinien entsprechender Ecken laufen. Falls nun die Dreiecke in einer Ebene liegen, erweist sich die Umkehrung als identisch mit dem Satz, der nach dem ebenen Dualitätsprinzip aus dem DESARGUESschen Satz hervorgeht. Die folgende Gegenüberstellung möge das erläutern:

Es seien drei Punktepaare AA', BB', CC' gegeben, so daß die Verbindungslinien jedes Paares durch einen Punkt gehen. Dann müssen die drei Schnittpunkte der Geraden AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ auf einer Geraden liegen.

Es seien drei Geradenpaare aa', bb', cc' gegeben, so daß die Schnittpunkte jedes Paares auf einer Geraden liegen. Dann müssen die drei Verbindungslinien der Punkte (ab) und $(a'b')$, (bc) und $(b'c')$, (ca) und $(c'a')$ durch einen Punkt gehen.

Wir betrachten nun die Figur, die aus den Ecken und Seiten zweier in einer Ebene gelegener DESARGUESscher Dreiecke, den Verbindungslinien entsprechender Eckenpaare, den Schnittpunkten entsprechender Seitenpaare, dem DESARGUESschen Punkt O und der DESARGUESschen Geraden g (Abb. 135) besteht. Eine einfache Abzählung ergibt, daß diese

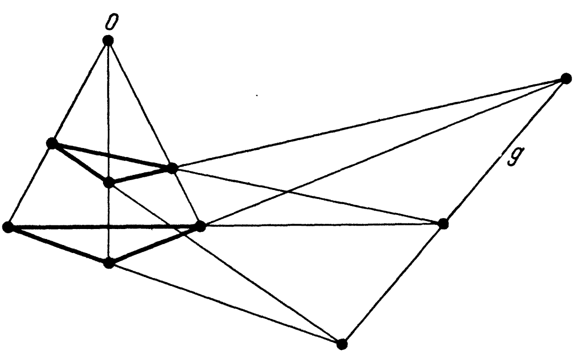

Abb. 135.

Figur eine Konfiguration (10_3) ist. Sie wird als DESARGUESsche Konfiguration bezeichnet. Sie hat mit der PASCALschen Konfiguration die Eigenschaft gemeinsam, daß bei schrittweiser Konstruktion die letzte Incidenz stets von selbst erfüllt ist. Ferner ist die Konfiguration von DESARGUES ebenso wie die von PASCAL dual invariant. Denn sie stellt sowohl den DESARGUESschen Satz als auch seine Umkehrung dar, und diese ist zum Satz selbst das duale Gegenstück.

Nunmehr wenden wir auf den räumlichen Fall des DESARGUESschen Satzes das *räumliche* Dualitätsprinzip an. Dann erhalten wir folgende Gegenüberstellung:

Es seien drei Punktepaare AA', BB', CC' gegeben, so daß die Verbindungslinien jedes Paares durch einen Punkt gehen. Dann müssen die drei Schnittpunkte der Geraden AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ auf einer Geraden liegen.

Es seien drei Ebenenpaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ gegeben, so daß die Schnittgeraden jedes Paares in einer Ebene liegen. Dann müssen die drei Verbindungsebenen der Geraden $(\alpha\beta)$ und $(\alpha'\beta')$, $(\beta\gamma)$ und $(\beta'\gamma')$, $(\gamma\alpha)$ und $(\gamma'\alpha')$ durch eine Gerade gehen.

Der auf der rechten Seite aufgestellte Satz wird durch Abb. 136 veranschaulicht. An Stelle zweier Dreiecke treten bei diesem Satz zwei körperliche Ecken, die von den Ebenen α, β, γ und α', β', γ' gebildet werden. Ähnlich wie in der Ebene wollen wir nun die räumliche Figur betrachten, die aus den beiden DESARGUESschen Ecken, den Verbindungsebenen entsprechender Kanten, den Schnittgeraden entsprechender Seitenflächen, der „DESARGUESschen Ebene" ($\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ in Abb. 136) und der „DESARGUESschen Geraden" (VW in Abb. 136) besteht. Schneiden wir diese räumliche Figur durch eine beliebige Ebene, die nicht durch die Punkte V, W, X, Y, Z geht, so entsteht in dieser Ebene eine DESARGUESsche Konfiguration, da die DESARGUESschen Ecken in DESARGUESschen Dreiecken geschnitten werden. Den Ebenen und Geraden der räumlichen Figur entsprechen die Geraden und Punkte der ebenen Konfiguration. Nun besitzt aber die räumliche Figur eine innere Symmetrie, die sich an der ebenen Konfiguration nicht aufweisen läßt. Die räumliche Figur besteht nämlich aus den sämtlichen Verbindungsgeraden und Verbindungsebenen der fünf Punkte V, W, X, Y, Z. Diese fünf Punkte erscheinen dabei als völlig gleichberechtigt. Umgekehrt führt jedes räumliche Fünfeck auf die räumliche DESARGUESsche Figur, wenn man zwei Ecken willkürlich herausgreift[1]. Da nun in der räumlichen Figur alle Geraden und Ebenen gleichberechtigt sind, müssen es auch die Punkte und Geraden der ebenen DESARGUESschen Konfigu-

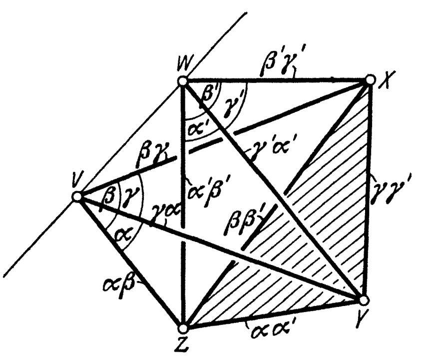

Abb. 136.

[1] Nur müssen die fünf Punkte allgemeine Lage haben, d. h. es dürfen nicht vier unter ihnen in einer Ebene, also auch nicht drei unter ihnen auf einer Geraden liegen.

ration sein. Dadurch ist bewiesen, daß die DESARGUESsche Konfiguration regulär ist und daß wir den DESARGUESschen Punkt oder die DESARGUESsche Gerade ganz beliebig in der Konfiguration wählen dürfen[1].

Wir wollen jetzt die DESARGUESsche Konfiguration als ein Paar von einander ein- und umbeschriebenen Fünfecken darstellen. Dazu müssen wir zunächst überhaupt Fünfecke aufsuchen, die in der Konfiguration liegen. Wir verlangen also, daß alle Ecken und Seiten des Polygons Konfigurationselemente sind und daß nicht drei aufeinanderfolgende Ecken auf einer Geraden liegen. Die Aufgabe vereinfacht sich nun wesentlich, wenn wir auf das Raumfünfeck zurückgehen. Den Ecken des ebenen Polygons entsprechen die Kanten des räumlichen. Da zwei konsekutive Ecken des ebenen Polygons auf einer Konfigurationsgeraden liegen sollen, so fallen die entsprechenden Kanten in eine Ebene, sind also incident. Damit nicht drei konsekutive Ecken in eine Gerade fallen, haben wir nur zu vermeiden, daß die entsprechenden Kanten in eine Ebene fallen; das tritt dann und nur dann ein, wenn drei aufeinanderfolgende Kanten ein Dreieck bilden. Wenn wir nun die Grundpunkte $VWXYZ$ des Raumfünfecks in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen, z. B. der hingeschriebenen, so erhalten wir einen geschlossenen Kantenzug, wie wir ihn brauchen; er liefert in der Konfiguration ein Fünfeck der verlangten Art. Die Kanten des Raumfünfecks, die bei dieser Durchlaufung unbenutzt geblieben sind, schließen sich aber zu einem zweiten räumlichen Polygon der gleichen Art zusammen. Durch jeden Grundpunkt des Raumfünfecks gehen nämlich zwei solche Kanten, da im ganzen vier Kanten von jedem Grundpunkt auslaufen und zwei bei der ersten Durchlaufung verbraucht waren. Dem zweiten Kantenzug entspricht in der Konfiguration ein zweites Fünfeck, und eine einfache Abzählung ergibt, daß dieses dem ersten einbeschrieben sein muß. Aus Symmetriegründen muß auch das erste dem zweiten einbeschrieben sein. In Abb. 137a, b ist die Beziehung zwischen dem räumlichen Schema und dem ebenen Fünfeckpaar zum Ausdruck gebracht.

Nun lassen sich noch andersartige Systeme von fünf Kanten des Raumfünfecks ausfindig machen, die einem ebenen in der Konfiguration ent-

---

[1] Als vollständiges räumliches n-Eck bezeichnet man das System aller Verbindungsgeraden und -ebenen von n Punkten allgemeiner Lage im Raum. Ebenso wie für $n = 5$ erhält man auch für beliebiges n stets eine Konfiguration, wenn man das vollständige n-Eck mit einer Ebene zum Schnitt bringt, die durch keinen Eckpunkt geht. Alle diese Konfigurationen sind regulär. Sie sind vom Typus $p = \frac{n(n-1)}{2}$, $\gamma = n - 2$, $g = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $\pi = 3$. Eine Konfiguration vom speziellen Typ $p = g$ ergibt sich also nur für den Fall $n = 5$. Zu weiteren regulären Konfigurationen gelangt man, wenn man von n-Ecken allgemeiner Lage in höherdimensionalen Räumen ausgeht. Alle diese Konfigurationen werden „polyedral“ genannt.

haltenen Fünfeck entsprechen. Ein Beispiel gibt Abb. 138. Man kann aber nachprüfen, daß sich dann die fünf übrigen Kanten auf keine Weise cyclisch so anordnen lassen, daß zwei konsekutive immer incident sind und drei konsekutive nie ein Dreieck bilden. Die zuerst angegebene Konstruktion erschöpft daher alle Möglichkeiten. Da nun jeder Per-

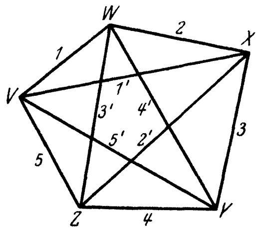

Abb. 137 a.

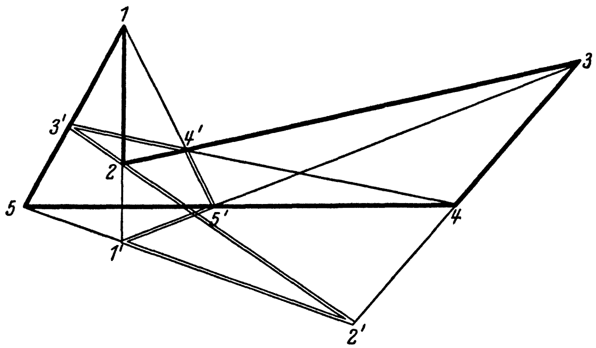

Abb. 137 b.

mutation der Grundpunkte ein Automorphismus der Konfiguration entspricht und da die Zerlegung des Raumfünfecks in zwei Kantenzüge durch die Reihenfolge der Grundpunkte im ersten Kantenzug fest bestimmt ist, so sehen wir, daß es, von Automorphismen abgesehen, nur eine Möglichkeit der Zerlegung der DESARGUESschen Konfiguration in zwei wechselseitig einbeschriebene Fünfecke gibt.

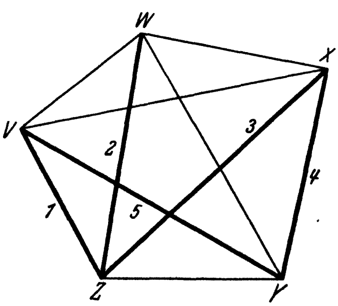

Abb. 138.

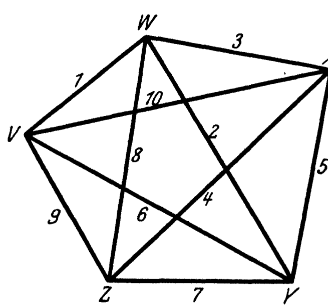

Abb. 139.

In ähnlicher Weise läßt sich die Frage erledigen, ob und auf wie viele Arten sich die DESARGUESsche Konfiguration als ein Zehneck auffassen läßt, das sich selbst ein- und umbeschrieben ist. Man findet, daß der entsprechende räumliche Kantenzug dann stets so angeordnet werden kann, wie in Abb. 139 angegeben. Es gibt also eine und, abgesehen von Automorphismen, auch nur eine Art, die DESARGUESsche Konfiguration als ein sich selbst ein- und umbeschriebenes Zehneck zu deuten (Abb. 140). Diese Figur verrät eine gewisse Regelmäßigkeit. Ich muß nämlich bei der Durchlaufung des Zehnecks immer abwechselnd eine und drei Ecken überspringen, wenn ich zu der auf einer Seite liegenden weiteren Ecke gelangen will (Ecke 5 auf Seite 23, 8 auf 34, 7 auf 45, 10 auf 56 usw.). An dem räumlichen Schema erkennt man noch eine andere Eigenschaft dieses Zehnecks. Seine Seiten bilden nämlich, abwechselnd genommen, zwei einander einbeschriebene Fünfecke.

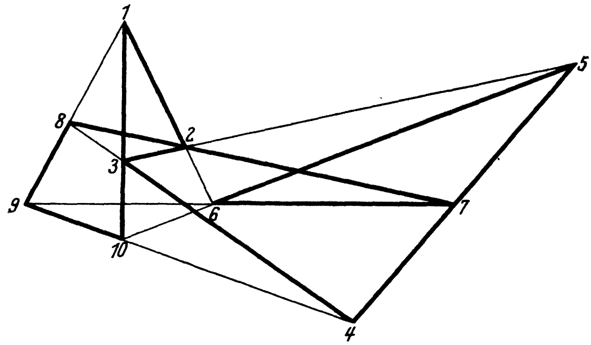

Abb. 140.

Die Desarguessche Konfiguration ist nicht die einzige Konfiguration (10_3). Für das Schema einer solchen Konfiguration ergeben sich vielmehr noch neun andere Möglichkeiten. Eins dieser Schemata ist ebenso wie die Konfiguration (7_3) weder im Reellen noch im Komplexen realisierbar, da seine Gleichungen einen Widerspruch enthalten. Die acht übrigen dagegen sind ebenso wie die Konfigurationen (9_3) sämtlich mit dem Lineal allein konstruierbar. Im Gegensatz zur Desarguesschen Konfiguration ist aber bei den acht übrigen realisierbaren Konfigurationen (10_3) die letzte Incidenz nicht von selbst erfüllt. Sie stellen daher keinen allgemeinen geometrischen Satz dar und sind dementsprechend weniger wichtig als die Konfiguration von Desargues. Eine dieser Konfigurationen ist in Abb. 141 gezeichnet. In der angegebenen Reihenfolge der Punkte durchlaufen, stellt diese Konfiguration wieder ein sich selbst ein- und umbeschriebenes Zehneck dar. In dieser Figur brauche ich aber jedesmal nur eine Ecke zu überspringen, um die auf jeder Seite gelegene weitere Ecke des Polygons zu erhalten. In dieser Vorschrift erscheinen alle Ecken als

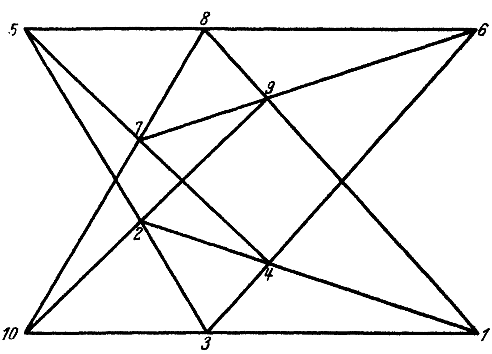

Abb. 141.

gleichberechtigt und die Seiten als vertauschbar mit den Ecken; man kann daraus schließen, daß die Konfiguration regulär und dual invariant sein muß.

§ 20. Gegenüberstellung des Pascalschen und des Desarguesschen Satzes.

Zwischen dem Satz von Desargues und dem letzten Satz von Pascal haben wir weitgehende Analogien gefunden. Beide Sätze wurden durch Projektion aus dem Raum bewiesen, beide Sätze führten auf Konfigurationen, und zwar auf Konfigurationen ähnlicher Art; denn beide Konfigurationen waren regulär, dual invariant, mit dem Lineal allein konstruierbar, bei beiden war die letzte Incidenz von selbst erfüllt, und beide konnten als sich selbst ein- und umbeschriebene Polygone aufgefaßt werden.

Dennoch besteht zwischen den beiden Sätzen ein prinzipieller Unterschied. Beim Beweise des Desarguesschen Satzes haben wir eine räumliche Figur benutzt, die allein auf Grund der angeführten räumlichen (S. 117) Axiome der Verknüpfung ohne Voraussetzung weiterer Axiome konstruiert werden kann. Dagegen ergab sich die Brianchon-Pascalsche Konfiguration durch Betrachtung einer Fläche zweiter Ordnung. Scheinbar bildet zwar den Kernpunkt des Beweises eine reine Incidenzbetrachtung zwischen den Punkten, Geraden und Ebenen eines räumlichen Sechsecks, aber eine nähere Untersuchung lehrt, daß die Konstruktion derartiger räumlicher Sechsecke mit der Konstruktion einer Regelfläche zweiter Ordnung im wesentlichen gleichbedeutend ist und daß die Möglichkeit dieser Konstruktion sich aus den Axiomen der Verknüpfung allein nicht erweisen läßt.

Wir hatten im ersten Kapitel die Kegelschnitte und die Flächen zweiter Ordnung durch metrische Betrachtungen eingeführt. Es wäre also denkbar, daß der Pascalsche Satz sich nicht ohne Vergleichung von Strecken und Winkeln beweisen ließe. Man kann aber die Kurven und Regelflächen zweiter Ordnung auch ohne metrische Hilfsmittel erzeugen, indem man allein die Methode des Projizierens benutzt. Mit dieser Methode lassen sich nämlich die Punkte einer Geraden so auf die Punkte einer beliebigen Geraden abbilden, daß harmonische Quadrupel stets in harmonische Quadrupel übergehen und daß drei beliebig vorgegebene Punkte der einen Geraden auf drei beliebig vorgegebene Punkte der anderen Geraden abgebildet werden. Man sagt dann, daß die eine Gerade auf die andere projektiv abgebildet ist. Die Konstruktion einer solchen Abbildung erfordert allein die ebenen und räumlichen Axiome der Verknüpfung. Dagegen läßt sich mit deren alleiniger Hilfe nicht schließen, daß die Abbildung durch die beiden genannten Forderungen — Invarianz der harmonischen Lage und Vorgabe der Abbildung dreier