gleichberechtigt und die Seiten als vertauschbar mit den Ecken; man kann daraus schließen, daß die Konfiguration regulär und dual invariant sein muß.

§ 20. Gegenüberstellung des Pascalschen und des Desarguesschen Satzes.

Zwischen dem Satz von Desargues und dem letzten Satz von Pascal haben wir weitgehende Analogien gefunden. Beide Sätze wurden durch Projektion aus dem Raum bewiesen, beide Sätze führten auf Konfigurationen, und zwar auf Konfigurationen ähnlicher Art; denn beide Konfigurationen waren regulär, dual invariant, mit dem Lineal allein konstruierbar, bei beiden war die letzte Incidenz von selbst erfüllt, und beide konnten als sich selbst ein- und umbeschriebene Polygone aufgefaßt werden.

Dennoch besteht zwischen den beiden Sätzen ein prinzipieller Unterschied. Beim Beweise des Desarguesschen Satzes haben wir eine räumliche Figur benutzt, die allein auf Grund der angeführten räumlichen (S. 117) Axiome der Verknüpfung ohne Voraussetzung weiterer Axiome konstruiert werden kann. Dagegen ergab sich die Brianchon-Pascalsche Konfiguration durch Betrachtung einer Fläche zweiter Ordnung. Scheinbar bildet zwar den Kernpunkt des Beweises eine reine Incidenzbetrachtung zwischen den Punkten, Geraden und Ebenen eines räumlichen Sechsecks, aber eine nähere Untersuchung lehrt, daß die Konstruktion derartiger räumlicher Sechsecke mit der Konstruktion einer Regelfläche zweiter Ordnung im wesentlichen gleichbedeutend ist und daß die Möglichkeit dieser Konstruktion sich aus den Axiomen der Verknüpfung allein nicht erweisen läßt.

Wir hatten im ersten Kapitel die Kegelschnitte und die Flächen zweiter Ordnung durch metrische Betrachtungen eingeführt. Es wäre also denkbar, daß der Pascalsche Satz sich nicht ohne Vergleichung von Strecken und Winkeln beweisen ließe. Man kann aber die Kurven und Regelflächen zweiter Ordnung auch ohne metrische Hilfsmittel erzeugen, indem man allein die Methode des Projizierens benutzt. Mit dieser Methode lassen sich nämlich die Punkte einer Geraden so auf die Punkte einer beliebigen Geraden abbilden, daß harmonische Quadrupel stets in harmonische Quadrupel übergehen und daß drei beliebig vorgegebene Punkte der einen Geraden auf drei beliebig vorgegebene Punkte der anderen Geraden abgebildet werden. Man sagt dann, daß die eine Gerade auf die andere projektiv abgebildet ist. Die Konstruktion einer solchen Abbildung erfordert allein die ebenen und räumlichen Axiome der Verknüpfung. Dagegen läßt sich mit deren alleiniger Hilfe nicht schließen, daß die Abbildung durch die beiden genannten Forderungen — Invarianz der harmonischen Lage und Vorgabe der Abbildung dreier

Punkte — eindeutig für alle Punkte der Geraden bestimmt ist. Zu diesem Zweck bedarf es eines Stetigkeitsaxioms, das wir weiter unten sogleich formulieren werden. Ist aber die Eindeutigkeit der projektiven Abbildung im angegebenen Sinne bewiesen, so läßt sich die allgemeinste Regelfläche zweiter Ordnung als die Fläche definieren, die von einer variablen Geraden überstrichen wird, die entsprechende Punkte zweier fester windschiefer projektiv bezogener Geraden verbindet. Aus der Eindeutigkeit der projektiven Abbildung folgt dann, daß auf einer solchen Fläche noch eine zweite Schar von Geraden verläuft. Sind die projektiv aufeinander bezogenen Geraden nicht windschief, sondern incident, so läuft die Verbindungsgerade entsprechender Punkte in einer Ebene und umhüllt eine Kurve zweiter Ordnung. Alle in der projektiven Geometrie wesentlichen Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung lassen sich aus dieser Definition ableiten.

Zur völligen Erfassung des Stetigkeitsbegriffes braucht man zwei verschiedene Axiome; beim Eindeutigkeitsbeweis der projektiven Abbildung kommt aber nur eines von ihnen, das *archimedische* Axiom, zur Anwendung. In arithmetischer Fassung lautet dieses Axiom: Es seien mir zwei beliebige positive Zahlen a und A gegeben, von denen a noch so klein und A noch so groß sein möge; ich kann dann trotzdem a so oft zu sich selbst addieren, daß die Summe nach endlich vielen Schritten größer wird als A:

$$a + a + a + \cdots + a > A .$$

Dieses Axiom ist notwendig, wenn ich eine Entfernung durch eine andere Länge ausmessen will, es bildet also in dieser Form eine wesentliche Grundlage der Metrik. Von metrischen Begriffen unabhängig ist folgende Fassung des Axioms. Es seien mir zwei parallele Geraden gegeben (Abb. 142); ferner sollen auf einer dieser Geraden zwei verschiedene Punkte O und A liegen. Wir ziehen nun von dem Punkte O nach einem beliebigen Punkt B_1 der anderen Geraden die Verbindungsgerade, und B_1 verbinden wir wiederum geradlinig mit einem Punkt C_1 der ersten Geraden, der zwischen O und A liegt. Dann ziehen wir durch C_1 die Parallele zu OB_1, welche die andere Gerade in B_2 treffen möge; von B_2 ziehen wir wieder die Parallele zu B_1C_1, die die erste Gerade in C_2 treffen möge. Wenn wir so immer weitere Parallelen zu OB_1 und B_1C_1 ziehen, so besagt das archimedische Axiom, daß wir schließlich nach endlich vielen Schritten zu einem Punkt C_r kommen, der nicht mehr zwischen O und A liegt. In dieser Formulierung haben wir die Vorstellung verwendet, daß ein Punkt einer Geraden zwischen zwei anderen Punkten dieser Geraden liegt. Aussagen dieser

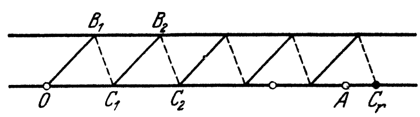

Abb. 142.

Art werden durch eine andere Axiomgruppe, die Axiome der Anordnung, präzisiert, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Den Parallelenbegriff dagegen haben wir nur verwendet, um das Axiom kürzer und anschaulicher formulieren zu können; es genügt in der projektiven Geometrie, die Möglichkeit einer Konstruktion zu fordern, wie sie durch Abb. 143 angedeutet ist. Diese Figur ergibt sich aus Abb. 142 durch Zentralprojektion auf eine andere Ebene.

Die ebenen und räumlichen Axiome der Verknüpfung, die Anordnungsaxiome und das archimedische Axiom genügen, um die Eindeutigkeit der projektiven Abbildung zu beweisen; allerdings ist dieser Beweis außerordentlich langwierig und mühsam. Aus der Eindeutigkeit der

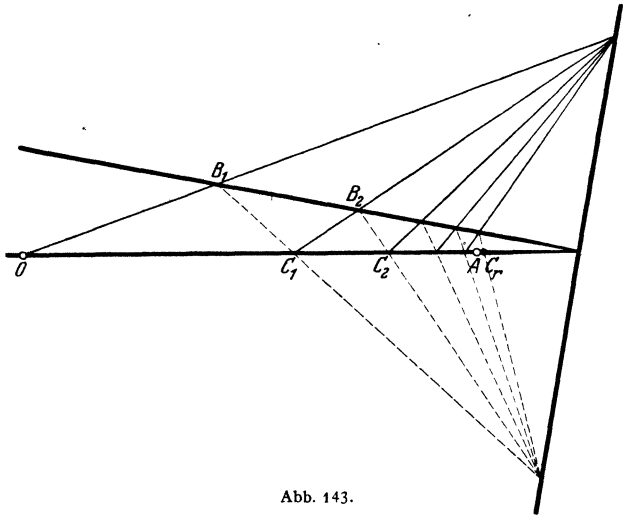

Abb. 143.

projektiven Abbildung in der Ebene läßt sich dann der letzte Satz von Pascal und von Brianchon (und zwar ohne räumliche Hilfskonstruktion) beweisen.

Der Satz von Desargues läßt sich im Raum allein mit den Axiomen der Verknüpfung beweisen; wenn ich dagegen die ebene Fassung des Satzes beweisen will, ohne in den Raum herauszugehen, kann ich nicht ohne die Axiome der Kongruenz auskommen, auch wenn ich das archimedische Axiom und die Anordnungsaxiome voraussetze. Dagegen genügen zum Beweise die ebenen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome sowie die Kongruenzaxiome; das archimedische Axiom ist entbehrlich.

Bei Fortlassung der räumlichen Verknüpfungsaxiome verhält sich der letzte Pascalsche Satz wie der Desarguessche. Man braucht dann zum Beweis die ebenen Axiome der Verknüpfung, Anordnung und Kongruenz. Trotzdem läßt sich ein wesentlicher Unterschied beider Sätze auch in der Ebene ohne räumliche Hilfsbetrachtungen feststellen. Setzt man nämlich in der Ebene die Verknüpfungsaxiome und die Gültigkeit des DESARGUESschen Satzes voraus, so läßt sich der PASCALsche Satz nicht beweisen. Dagegen läßt sich der DESARGUESsche Satz beweisen, wenn man die ebenen Verknüpfungsaxiome und den PASCALschen Satz voraussetzt. Wir wollen den Beweis für den Spezialfall führen, daß die DESARGUESsche Gerade die unendlich ferne Gerade der Ebene ist. Diese Annahme dient wie bei der Aufstellung des Archimedischen Axioms nur dazu, den Beweis kürzer und anschaulicher zu formulieren. Wir setzen also voraus (Abb. 144):

Die drei Geraden AA', BB', CC' gehen alle durch einen Punkt O. Ferner ist $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$. Es ist mit Hilfe des letzten PASCALschen Satzes zu beweisen, daß dann auch gilt: $BC \parallel B'C'$.

Zum Beweise ziehe ich durch A die Parallele zu OB, die $A'C'$ in L und OC in M treffen möge. Ferner möge die Verbindungsgerade LB' die Gerade AB in N treffen. Auf diese Figur wende ich nun dreimal den Satz von PASCAL an, und zwar in der speziellen Form, die S. 105 als Satz von PAPPUS erwähnt war. Ein PASCALsches Sechseck ist zunächst $ONALA'B'$, da je drei dieser Punkte abwechselnd auf je einer Geraden liegen. Nun ist $NA \parallel A'B'$ nach Voraussetzung und $AL \parallel B'O$ nach Konstruktion. Nach dem Satz von PAPPUS ist daher auch das dritte Paar gegenüberliegender Seiten dieses Sechsecks parallel, also $ON \parallel AC$. Ich betrachte nunmehr das PASCALsche Sechseck $ONMACB$. In ihm ist $ON \parallel AC$, wie eben bewiesen, und $MA \parallel BO$ nach Voraussetzung. Nach dem Satz von PAPPUS ist daher $NM \parallel CB$. Zum Schluß betrachten wir das PASCALsche Sechseck $ONMLC'B'$. In ihm ist $ON \parallel LC'$ und $ML \parallel B'O$. Daraus folgt wie oben: $NM \parallel C'B'$. Da aber beim vorigen Schritt auch bewiesen war: $NM \parallel CB$, so folgt die Behauptung: $BC \parallel B'C'$.

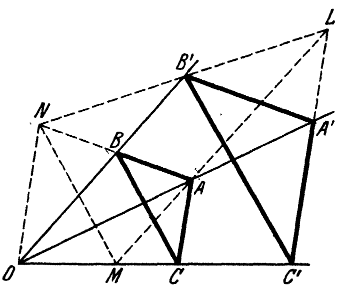

Abb. 144.
(Aus „HILBERT, Grundlagen der Geometrie" 7. Aufl., S. 111. Teubner 1930.)

Nun lassen sich in der Ebene alle Schnittpunktsätze aus den Sätzen von DESARGUES und PASCAL ableiten. Da wir jetzt den Satz von DESARGUES als eine Folge des PASCALschen erkannt haben, so können wir sagen, daß der Satz von PASCAL der einzig wesentliche Schnittpunktsatz der Ebene ist, daß also die Konfiguration $(9_3)_1$ die wichtigste Figur der ebenen Geometrie darstellt.

§ 21. Vorbemerkungen über räumliche Konfigurationen.

Man kann den Konfigurationsbegriff von der Ebene auf den Raum verallgemeinern. Ein System von Punkten und Ebenen wird als eine räumliche Konfiguration bezeichnet, wenn jeder Punkt mit gleich vielen