

## Werk

**Titel:** Anschauliche Geometrie

**Autor:** Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

**Verlag:** Springer

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN379425343

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

**LOG Id:** LOG\_0032

**LOG Titel:** § 21. Vorbemerkungen über räumliche Konfigurationen.

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

man nämlich in der Ebene die Verknüpfungsaxiome und die Gültigkeit des DESARGUESSchen Satzes voraus, so läßt sich der PASCALSche Satz nicht beweisen. Dagegen läßt sich der DESARGUESSche Satz beweisen, wenn man die ebenen Verknüpfungsaxiome und den PASCALSchen Satz voraussetzt. Wir wollen den Beweis für den Spezialfall führen, daß die DESARGUESSche Gerade die unendlich ferne Gerade der Ebene ist. Diese Annahme dient wie bei der Aufstellung des Archimedischen Axioms nur dazu, den Beweis kürzer und anschaulicher zu formulieren. Wir setzen also voraus (Abb. 144):

Die drei Geraden  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  gehen alle durch einen Punkt  $O$ . Ferner ist  $AB \parallel A'B'$ ,  $AC \parallel A'C'$ . Es ist mit Hilfe des letzten PASCALSchen Satzes zu beweisen, daß dann auch gilt:  $BC \parallel B'C'$ .

Zum Beweise ziehe ich durch  $A$  die Parallele zu  $OB$ , die  $A'C'$  in  $L$  und  $OC$  in  $M$  treffen möge. Ferner möge die Verbindungsgerade  $LB'$  die Gerade  $AB$  in  $N$  treffen. Auf diese Figur wende ich nun dreimal den Satz von PASCAL an, und zwar in der speziellen Form, die S. 105 als Satz von PAPPUS erwähnt war. Ein PASCALSches Sechseck ist zunächst  $ONALA'B'$ , da je drei dieser Punkte abwechselnd auf je einer Geraden liegen. Nun ist  $NA \parallel A'B'$  nach Voraussetzung und  $AL \parallel B'O$  nach Konstruktion. Nach dem Satz von PAPPUS ist daher auch das dritte Paar gegenüberliegender Seiten dieses Sechsecks parallel, also  $ON \parallel AC$ . Ich betrachte nunmehr das PASCALSche Sechseck  $ONMACB$ . In ihm ist  $ON \parallel AC$ , wie eben bewiesen, und  $MA \parallel BO$  nach Voraussetzung. Nach dem Satz von PAPPUS ist daher  $NM \parallel CB$ . Zum Schluß betrachten wir das PASCALSche Sechseck  $ONMLC'B'$ . In ihm ist  $ON \parallel LC'$  und  $ML \parallel B'O$ . Daraus folgt wie oben:  $NM \parallel C'B'$ . Da aber beim vorigen Schritt auch bewiesen war:  $NM \parallel CB$ , so folgt die Behauptung:  $BC \parallel B'C'$ .

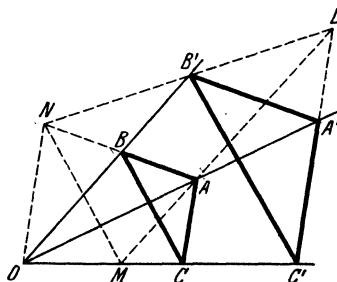


Abb. 144.

(Aus „HILBERT, Grundlagen der Geometrie“ 7. Aufl., S. 111. Teubner 1930.)

Nun lassen sich in der Ebene alle Schnittpunktsätze aus den Sätzen von DESARGUES und PASCAL ableiten. Da wir jetzt den Satz von DESARGUES als eine Folge des PASCALSchen erkannt haben, so können wir sagen, daß der Satz von PASCAL der einzig wesentliche Schnittpunktsatz der Ebene ist, daß also die Konfiguration  $(9_3)_1$  die wichtigste Figur der ebenen Geometrie darstellt.

## § 21. Vorbemerkungen über räumliche Konfigurationen.

Man kann den Konfigurationsbegriff von der Ebene auf den Raum verallgemeinern. Ein System von Punkten und Ebenen wird als eine räumliche Konfiguration bezeichnet, wenn jeder Punkt mit gleich vielen

Ebenen und jede Ebene mit gleich vielen Punkten incident ist. Ein einfaches Beispiel einer solchen Konfiguration liefert der räumliche DESARGUËSSCHE Satz. Als Konfigurationspunkte definieren wir dabei dieselben zehn Punkte wie bei der entsprechenden ebenen Figur. Als Konfigurationsebenen nehmen wir die zwei Ebenen der beiden Dreiecke und die drei Ebenen, durch die die Dreiecke vom DESARGUËSSCHEN Punkt aus projiziert werden. Dann gehen durch jeden Punkt drei Ebenen, und in jeder Ebene liegen sechs Punkte. Aus demselben Grund wie bei den ebenen Konfigurationen erfüllen die vier für diese Konfiguration charakteristischen Zahlen die Gleichung  $5 \cdot 6 = 10 \cdot 3$ .

Neben den Konfigurationen aus Punkten und Ebenen kann man aber im Raum auch Konfigurationen betrachten, die wie in der Ebene aus Punkten und Geraden bestehen, wobei jeder Punkt mit gleich viel Geraden und jede Gerade mit gleich viel Punkten inciidiert. Diese beiden verschiedenen Auffassungen kann man oft auf eine und dieselbe Figur anwenden; so liefert die soeben betrachtete räumliche DESARGUËSSCHE Figur eine räumliche Punkt-Geraden-Konfiguration, die mit der ebenen DESARGUËSSCHEN Konfiguration im wesentlichen identisch ist. Entsprechend bilden auch in vielen allgemeineren Fällen gewisse Schnittgeraden der in einer Punkt-Ebenen-Konfiguration auftretenden Ebenen zusammen mit den Konfigurationspunkten eine Punkt-Geraden-Konfiguration, und umgekehrt kann man oft eine Punkt-Geraden-Konfiguration in eine Punkt-Ebenen-Konfiguration verwandeln, indem man gewisse Verbindungsebenen incidenter Konfigurationsgeraden hinzunimmt.

Beschränken wir uns ähnlich wie in der Ebene zunächst auf den Fall, daß die Anzahl der Punkte und Ebenen gleich ist, daß wir also eine Punkt-Ebenen-Konfiguration von  $p$  Punkten und  $p$  Ebenen vor uns haben. Ist dann jeder Punkt mit  $n$  Ebenen incident, so muß aus demselben Grund wie in der Ebene auch jede Konfigurationsebene mit  $n$  Punkten incident sein; wir wollen solche Konfigurationen mit  $(p_n)$  bezeichnen.

Um die trivialen Fälle auszuschließen, müssen wir annehmen, daß  $n$  mindestens 4 ist. Für  $p \leq 7$  ist eine Konfiguration  $(p_4)$  nicht möglich. Für  $p = 8$  dagegen lassen sich bereits fünf verschiedene Schemata aufstellen, die sämtlich geometrisch verwirklicht werden können. Eine dieser Konfigurationen  $(8_4)$ , die sog. MÖBIUSSCHE Konfiguration, ist geometrisch wichtig, da ihre letzte Incidenz von selbst erfüllt ist, sie also einen geometrischen Satz enthält. Diese Konfiguration besteht aus zwei Tetraedern, die einander zugleich ein- und umbeschrieben sind.

Wenn wir zu höheren Konfigurationen übergehen, wird die Zahl der Möglichkeiten immer größer, so daß sich bald keine Übersicht mehr behalten läßt. So gibt es z. B. bereits sechsundzwanzig geometrisch realisierbare Konfigurationen  $(9_4)$ . Wir wollen daher nur zwei besonders wichtige räumliche Konfigurationen näher betrachten, die auch bei

andersartigen mathematischen Problemen eine Rolle spielen. Es sind dies die REYESche Konfiguration und die SCHLÄFLISCHE Doppelsechs.

## § 22. Die REYESche Konfiguration.

Die REYESche Konfiguration besteht aus zwölf Punkten und zwölf Ebenen. Sie enthält einen projektiv-geometrischen Satz, so daß die letzte Incidenz stets von selbst erfüllt ist, wie wir auch die Lage der Punkte und Ebenen annehmen. Um aber eine anschauliche Vorstellung

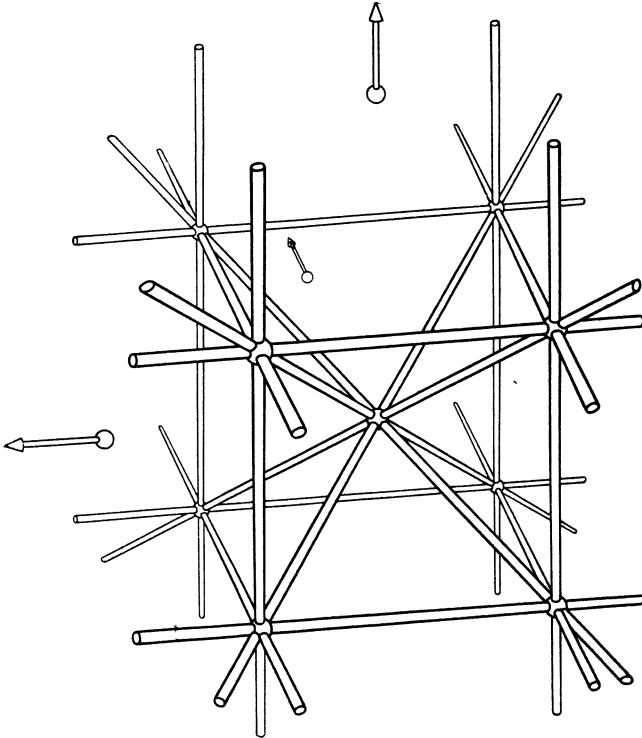


Abb. 145.

von der REYESchen Konfiguration zu gewinnen, wollen wir zunächst den einzelnen Konfigurationspunkten eine spezielle symmetrische Anordnung geben.

Als Konfigurationspunkte nehmen wir die acht Eckpunkte eines Würfels, ferner den Würfelmittelpunkt, und schließlich die drei unendlich fernen Punkte, in denen sich je vier parallele Würfelkanten treffen (Abb. 145). Als Konfigurationsebenen nehmen wir die sechs Würfel-ebenen und die sechs Diagonalebene, die durch je zwei gegenüberliegende Kanten laufen. In dem so entstandenen Gebilde liegen auf jeder Ebene sechs Punkte; nämlich auf den Würfebenen vier Eck-