

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG_0033

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

andersartigen mathematischen Problemen eine Rolle spielen. Es sind dies die REYESche Konfiguration und die SCHLÄFLISCHE Doppelsechs.

§ 22. Die REYESche Konfiguration.

Die REYESche Konfiguration besteht aus zwölf Punkten und zwölf Ebenen. Sie enthält einen projektiv-geometrischen Satz, so daß die letzte Incidenz stets von selbst erfüllt ist, wie wir auch die Lage der Punkte und Ebenen annehmen. Um aber eine anschauliche Vorstellung

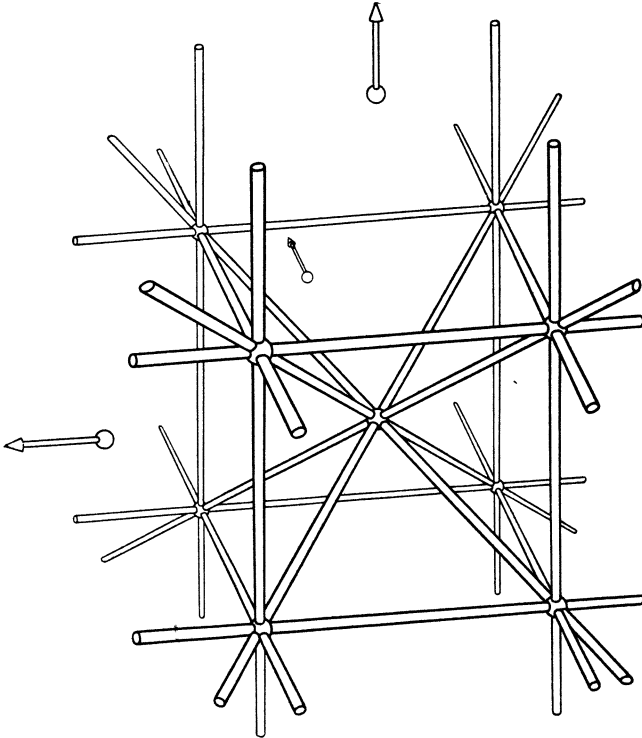


Abb. 145.

von der REYESchen Konfiguration zu gewinnen, wollen wir zunächst den einzelnen Konfigurationspunkten eine spezielle symmetrische Anordnung geben.

Als Konfigurationspunkte nehmen wir die acht Eckpunkte eines Würfels, ferner den Würfelmittelpunkt, und schließlich die drei unendlich fernen Punkte, in denen sich je vier parallele Würfelmanten treffen (Abb. 145). Als Konfigurationsebenen nehmen wir die sechs Würfelflächen und die sechs Diagonalebenebenen, die durch je zwei gegenüberliegende Kanten laufen. In dem so entstandenen Gebilde liegen auf jeder Ebene sechs Punkte; nämlich auf den Würfebenen vier Eck-

punkte und zwei unendlich ferne Punkte und auf den Diagonalebene der Mittelpunkt des Würfels, vier Eckpunkte und ein unendlich ferner Punkt. Andererseits schneiden sich auch in jedem Punkt sechs Ebenen; nämlich im Würfelmittelpunkt die sechs Diagonalebene, in jeder Würfelsecke drei Diagonalebene und drei Würfebenen, in den unendlich fernen Punkten vier Würfebenen und zwei Diagonalebene. Wir haben also durch unsere Konstruktion in der Tat eine Punkt-Ebenen-Konfiguration gewonnen, und zwar ist ihr Symbol (12_6) .

Wir können aber das Gebilde auch als Punkt-Geraden-Konfiguration auffassen, indem wir einige Schnittgeraden der vorher angegebenen Ebenen auswählen, und zwar die zwölf Kanten und vier Hauptdiagonalen des Würfels. Jede dieser Geraden enthält drei Konfigurationspunkte; die Kanten nämlich enthalten je zwei Ecken und einen unendlich fernen Punkt, die Diagonalen je zwei Ecken und den Mittelpunkt. Ferner gehen durch jeden Punkt vier Geraden; nämlich durch die Ecken je drei Kanten und eine Hauptdiagonale, durch den Mittelpunkt vier Hauptdiagonalen und durch jeden unendlich fernen Punkt je vier Kanten. Die Punkte und Geraden der REYESchen Konfiguration bilden also eine Konfiguration $(12_4, 16_3)$.

Ferner läßt sich abzählen, daß durch jede Gerade drei Ebenen gehen und in jeder Ebene vier Geraden liegen. Sie bilden mit den sechs in dieser Ebene gelegenen Punkten die Geraden und Punkte eines vollständigen Vierseits.

Die REYESche Konfiguration tritt in mehreren geometrischen Zusammenhängen auf, z. B. im System der Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln, das wir jetzt betrachten wollen.

Als Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise oder Kugeln bezeichnet man bekanntlich die beiden Punkte, die die Verbindungsstrecke der Kreis- oder Kugelmittelpunkte innen und außen im Radienverhältnis teilen. Der Punkt innerhalb der Strecke heißt der innere, der Punkt auf der Verlängerung der äußere Ähnlichkeitspunkt. Wenn zwei Kreise außerhalb einander liegen, so treffen sich im inneren Ähnlichkeitspunkt die beiden Geraden, die die Kreise zu verschiedenen Seiten berühren, im äußeren Ähnlichkeitspunkt die beiden Geraden, die die Kreise von derselben Seite her berühren (Abb. 146). Durch Rotation dieser Figur um die Mittellinie ergibt sich eine analoge Tangenteneigenschaft für die Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. (Doch gibt es viele gemeinsame Tangenten der beiden Kugeln, die durch keinen Ähnlichkeitspunkt gehen). Wir wollen mit (ik) den äußeren, mit $(ik)'$ den inneren Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise oder Kugeln i, k bezeichnen.

Wir betrachten nun drei Kreise oder Kugeln 1, 2, 3. Sie besitzen drei innere und drei äußere, also sechs Ähnlichkeitspunkte; wir denken uns die Mittelpunkte auf einem Dreieck und nicht in einer Geraden angeordnet, so daß keine zwei Ähnlichkeitspunkte zusammenfallen

und nicht alle sechs auf einer Geraden liegen können. Nach einem Satz von MONGE liegen dann stets die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte (12), (23) und (31) auf einer Geraden (Abb. 147) sowie jeder äußere Ähnlichkeitspunkt mit den beiden inneren Ähnlichkeitspunkten, die nicht mit ihm zusammengehören, z. B. (12)', (23)' und (31)*.

Alle Ähnlichkeitspunkte liegen demnach auf vier Geraden, die man die Ähnlichkeitsachsen von 1, 2, 3 nennt. Man kann den Satz von MONGE dahin zusammenfassen, daß die Ähnlichkeitspunkte und -achsen

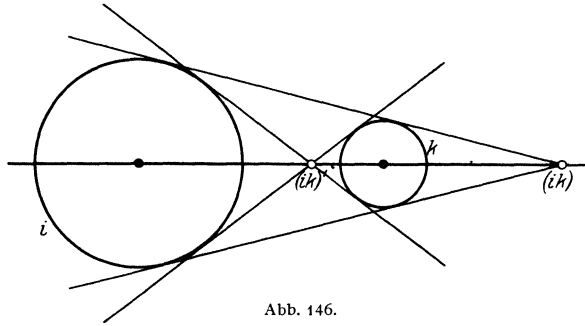


Abb. 146.

die sechs Punkte und vier Geraden eines vollständigen Vierseits bilden, in dem die Mittelpunkte von 1, 2, 3 das Diagonaldreieck darstellen. Wir wollen auch für die Ähnlichkeitsachsen Symbole einführen; wir bezeichnen mit (123) die Verbindungsgerade der äußeren Ähnlichkeitspunkte, mit (1'23) die Achse, auf der (23), (12)' und (13)' liegen usw.

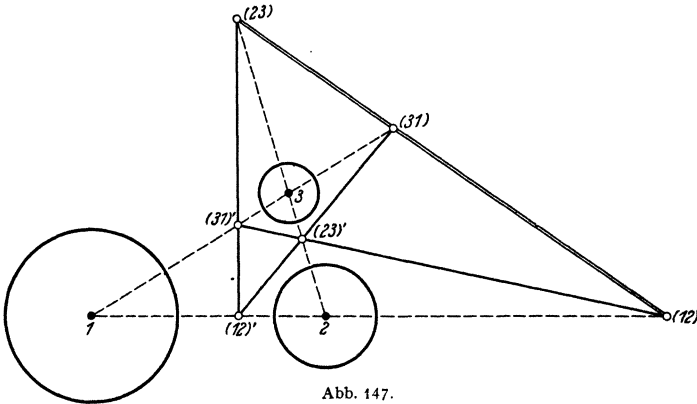


Abb. 147.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns zu vier Kugeln 1, 2, 3, 4, deren Mittelpunkte nicht alle in einer Ebene liegen, so daß also auch

* Beweis: Sind r_1, r_2, r_3 die Radien von 1, 2, 3, so werden die Seiten des von den Mittelpunkten gebildeten Dreiecks durch die äußeren Ähnlichkeitspunkte in den Verhältnissen $-\frac{r_1}{r_2}, -\frac{r_2}{r_3}, -\frac{r_3}{r_1}$ geteilt. Da das Produkt dieser Verhältnisse -1 beträgt, liegen die äußeren Ähnlichkeitspunkte nach dem Satz von MENELAUS auf einer Geraden. Ersetzt man zwei äußere Ähnlichkeitspunkte durch die entsprechenden inneren, so ändern zwei der Teilungsverhältnisse ihr Vorzeichen. Das Produkt bleibt also -1 , d. h. wir haben wieder drei Punkte einer Geraden erhalten.

nicht drei Mittelpunkte in eine Gerade fallen können (vgl. Abb. 148, S. 124). Ich behaupte, daß die Gesamtheit der Ähnlichkeitspunkte und -achsen dieser Kugeln die Punkte und Geraden einer REYESchen Konfiguration bilden. Da ich die Ziffern 1, 2, 3, 4 zu sechs verschiedenen Paaren zusammenfassen kann und jedes Paar einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt darstellt, gibt es im ganzen zwölf Ähnlichkeitspunkte. Ebenso haben die Achsen die richtige Anzahl sechzehn. Ich kann nämlich aus den vier Ziffern vier verschiedene Tripel bilden, und jedes Tripel stellt vier verschiedene Achsen dar, z. B. (123), (1'23), (12'3) und (123'). Jede Achse ist mit drei Punkten incident, z. B. (123) mit (12), (23), (13). Ebenso ist jeder Punkt mit vier Achsen incident, z. B. (12) mit (123), (123'), (124), (124)' oder (12)' mit (1'23), (12'3), (1'24), (12'4).

Die Ähnlichkeitspunkte und -achsen bilden also in der Tat eine Konfiguration (12₄, 16₃). Um sie als identisch mit der REYESchen Konfiguration zu erkennen, müssen wir noch zwölf geeignete Ebenen ausfindig machen. Wir nehmen zunächst die vier Ebenen, in denen je drei Kugelmittelpunkte liegen; in jeder dieser Ebenen bilden die mit ihr incidenten Punkte und Achsen wie in der REYESchen Konfiguration ein Vierseit. Um nun noch acht weitere solche Ebenen zu finden, nehmen wir einfach sämtliche noch fehlenden Ebenen, die von irgend zwei in einem Konfigurationspunkt incidenten Achsen aufgespannt werden. Diese Achsen müssen jedenfalls zu verschiedenen Zahlentripeln gehören, denn zwei Achsen des gleichen Tripels, z. B. (123) und (1'23) spannen stets die Ebene dreier Kugelmittelpunkte auf (in unserem Beispiel die Ebene 1, 2, 3), führen also zu nichts Neuem. Nehmen wir zunächst zwei Achsen, die nur äußere Ähnlichkeitspunkte enthalten, etwa (123) und (124). Sie spannen eine Ebene auf, die durch (12) geht. In dieser Ebene liegen noch die vier weiteren Punkte jener Achsen: (13), (23), (14), (24). Nun liegen aber (23) und (24) auf der weiteren Achse (234), die auch den letzten noch fehlenden äußeren Ähnlichkeitspunkt (34) enthält. Die sechs äußeren Ähnlichkeitspunkte liegen also sämtlich in einer und derselben Ebene, die wir betrachtet haben. An Achsen enthält diese Ebene außer (123) und (124) auch die übrigen „äußeren“ Achsen (134) und (234); sie ist also in der Tat mit sechs Punkten und vier Geraden incident. Wir nehmen jetzt den Fall einer äußeren und einer inneren Achse, die zu verschiedenen Zahlentripeln gehören und incident sind; da sie sich nur in einem äußeren Ähnlichkeitspunkt treffen können und da alle Ziffern gleichberechtigt auftreten, dürfen wir (123) und (124)' wählen. Auf diesen Achsen liegen außer dem Schnittpunkt (12) noch (13), (23), (14)', (24)'. Wie oben schließen wir, daß noch die Achsen (134') und (234') und der Punkt (34)' auf dieser Ebene liegen. Wir finden also, daß die drei inneren Ähnlichkeitspunkte, die die Kugel 4 mit den übrigen Kugeln bestimmt, mit den drei äußeren

Ähnlichkeitspunkten des Tripels 1, 2, 3 in einer Ebene liegen. Es muß vier Ebenen dieser Art geben. In unserer Betrachtung fehlt noch der Fall, daß wir von zwei inneren incidenten Achsen ausgehen; nun liegen zwar auf der soeben betrachteten Ebene drei paarweise incidente innere Achsen; sie haben aber stets einen inneren Ähnlichkeitspunkt gemein. Wir gehen daher nunmehr von zwei Achsen, z. B. (123') und (124') aus, die sich in einem äußeren Ähnlichkeitspunkt — in diesem Fall (12) — schneiden. In der von ihnen bestimmten Ebene liegen außer dem Schnittpunkt (12) noch die Punkte (13)', (23)', (14)', (24)'. In dieser Ebene liegen also auch die Achsen (1'34) und (2'34) sowie der Punkt (34). Diese Ebene enthält demnach vier innere Achsen; sie trifft von den Kanten des Tetraeders 1, 2, 3, 4 die Gegenkanten 1, 2 und 3, 4 in den äußeren, die übrigen vier Kanten in inneren Ähnlichkeitspunkten. Es muß drei Ebenen dieser Art geben, da jedes Tetraeder drei Paare gegenüberliegender Kanten enthält. Wir haben also durch unser Verfahren im ganzen $1 + 4 + 3 = 8$ Ebenen erhalten.

Der Übersicht halber wollen wir noch die beiden Schemata aufstellen, die die Incidenz zwischen den Punkten und Ebenen und zwischen den Achsen und Ebenen angeben. Die Seitenflächen des Tetraeders sind mit *I, II, III, IV* bezeichnet, wobei *I* dem Punkt 1 gegenüberliegt. Die Ebene der äußeren Ähnlichkeitspunkte ist e_a genannt, die vier Ebenen mit je drei äußeren und drei inneren Ähnlichkeitspunkten sind je nach der ausgezeichneten Ziffer e_1 bis e_4 genannt, die drei übrigen Ebenen sind entsprechend der Kantenpaarung des Tetraeders mit (12, 34), (13, 24), (14, 23) bezeichnet. Bei der Bezeichnung der Punkte und Geraden sind die Klammern der Kürze halber fortgelassen.

		Ebenen											
		<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	e_a	e_1	e_2	e_3	e_4	(12,34)	(13,24)	(14,23)
Punkte	23	13	12	12	12	23	13	12	12	12	12	13	14
	24	14	14	13	13	24	14	14	13	34	24	23	
	34	34	24	23	14	34	34	24	23	13'	12'	12'	
	23'	13'	12'	12'	23	12'	12'	13'	14'	14'	14'	13'	
	24'	14'	14'	13'	24	13'	23'	23'	24'	23'	23'	24'	
	34'	34'	24'	23'	34	14'	24'	34'	34'	24'	34'	34'	

		Ebenen											
		<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	e_a	e_1	e_2	e_3	e_4	(12,34)	(13,24)	(14,23)
Geraden	234	134	124	123	123	234	134	124	123	123'	12'3	1'23	
	2'34	1'34	1'24	1'23	124	1'23	12'3	123'	124'	124'	1'24	12'4	
	23'4	13'4	12'4	12'3	134	1'24	12'4	13'4	134'	1'34	134'	13'4	
	234'	134'	124'	123'	234	1'34	2'34	23'4	234'	2'34	23'4	234'	

In Abb. 148 ist die Konfiguration dargestellt¹. Daß es dieselbe Konfiguration ist wie Abb. 145, erkennt man anschaulich, wenn man sich (12), (12)' und (34) in paarweise senkrechten Richtungen ins Unendliche gerückt denkt; dann werden das die drei unendlich fernen Konfigurations-

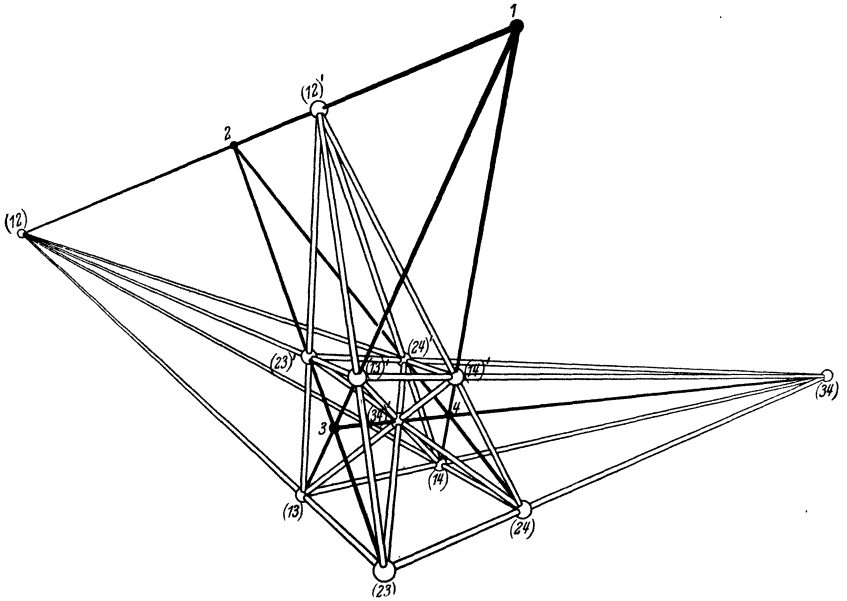


Abb. 148.

punkte von Abb. 145. Die acht Punkte (13), (14), (23), (24), (13)', (14)', (23)', (24)' werden die Würfecken, und (34)' wird der Würfelmittelpunkt. In diesem Falle rücken aber auch die Punkte 1 und 2 ins Unendliche. Um auch zu Abb. 145 vier zugehörige Kugeln zu bestimmen, muß man daher die Definition des Ähnlichkeitspunktes durch Hinzunahme von Grenzfällen erweitern.

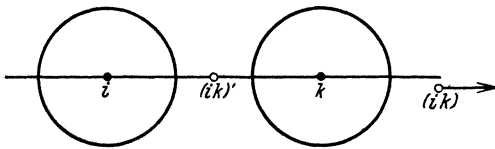


Abb. 149.

Zuächst hat man als äußeren Ähnlichkeitspunkt gleich großer Kreise oder Kugeln den unendlich fernen Punkt auf der Mittellinie anzusehen (Abb. 149). Betrachtet

man ferner eine Kugel k und eine Ebene e (Abb. 150), so hat man als Ähnlichkeitspunkte dieser beiden Gebilde die beiden Endpunkte (ke) und $(ke)'$ des auf e senkrechten Durchmessers von k zu wählen. Schneidet e näm-

¹ Faßt man Abb. 148 als ebene Figur auf, so stellt sie eine ebene Konfiguration $(12_4 16_3)$ dar, die aus den Ähnlichkeitspunkten und Achsen vierer in einer Ebene gelegener Kreise besteht. Die Mittelpunkte sind wieder 1, 2, 3, 4, die Radien kann man ebenso groß wie im räumlichen Fall wählen.

lich die Verlängerung dieses Durchmessers in P und ersetzt man e durch eine Schar immer größerer Kugeln K , die e in P berühren, so erkennt man, daß die Ähnlichkeitspunkte von k und K gegen (ke) und $(ke)'$ rücken. Für zwei Ebenen e und f endlich, die sich in einer Geraden g schneiden (Abb. 151), hat man als Ähnlichkeitspunkte die unendlich fernen Punkte anzusehen, deren Richtungen auf g senkrecht stehen und die beiden von e und f gebildeten Winkel halbieren. Man kann auch diese Definition durch Grenzübergang rechtfertigen, indem man g durch den Schnittkreis zweier immer größerer, jedoch stets paarweise kongruenter Kugeln ersetzt, die e und f in einem festen Punkt von g berühren.

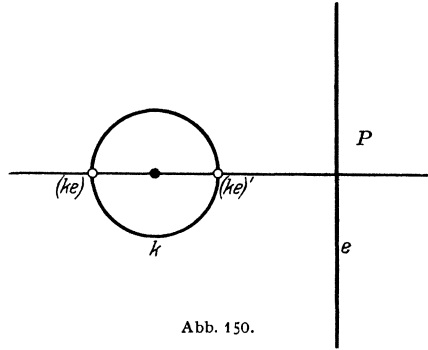


Abb. 150.

Mit Hilfe dieser Definitionen kann ich die REYESche Konfiguration auch in der ursprünglich betrachteten Gestalt als System von Ähnlichkeits-

punkten auffassen. Um die Mittelpunkte der vorderen und hinteren Würfffläche (Abb. 145) schlage ich die Kugeln 3 und 4. Ihre Radien wähle ich gleich groß, und zwar so groß, daß jede Kugel durch die vier Ecken der zugehörigen Fläche geht. Senkrecht zu den Diagonalen dieser Flächen lege ich in beliebigem Abstand die Ebenen 1 und 2. Dann erscheinen die Konfigurationspunkte als Ähnlichkeitspunkte von 1, 2, 3, 4 in der zu Abb. 148 analogen Verteilung.

Es liegt nahe, statt dieses Ausartungsfalles vier gleich große Kugeln zugrunde zu legen, deren Mitten ein reguläres Tetraeder bilden. Die äußeren Ähnlichkeitspunkte müssen dann in die unendlich fernen Punkte der sechs Tetraederkanten fallen, die unendlich ferne Ebene gehört also der Konfiguration an, als Ebene e_a in unserer Be-

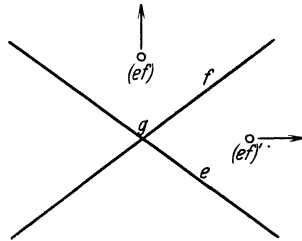


Abb. 151.

zeichnung. Die inneren Ähnlichkeitspunkte sind die Tetraederkantenmitten. Diese sechs Punkte bilden (Abb. 152) die Ecken eines regulären Oktaeders. Seine Seitenflächen sind sämtlich Konfigurationsebenen; es sind nämlich die Tetraederflächen I, II, III, IV und die in unserem Schema mit e_1, e_2, e_3, e_4 bezeichneten Ebenen. Die noch fehlenden drei Ebenen sind die drei Symmetrieebenen des Oktaeders. Die Geraden der Konfiguration sind die vier unendlich fernen Geraden der Tetraederflächen (äußere Ähnlichkeitsachsen) und die zwölf Oktaederkanten (innere Ähnlichkeitsachsen).

Wir haben schon im ersten Kapitel auf die Verwandtschaft zwischen Würfel und Oktaeder hingewiesen. Nach den Ausführungen von § 19 können wir sagen, daß Würfel und Oktaeder einander dual entsprechen. Ebenso läßt es sich nun allgemeiner zeigen, daß die Punkte und Ebenen von Abb. 152 zu den Ebenen und Punkten von Abb. 145 dual sind; die Ecken und Flächen des Würfels entsprechen den Flächen und Ecken des Oktaeders, der Würfelmittelpunkt und die sechs mit ihr incidenten Ebenen entsprechen der unendlich fernen Ebene und den sechs mit ihr incidenten Punkten der Oktaederfigur, die drei unendlich fernen Punkte beim Würfel entsprechen den drei Symmetrieebenen des Oktaeders¹.

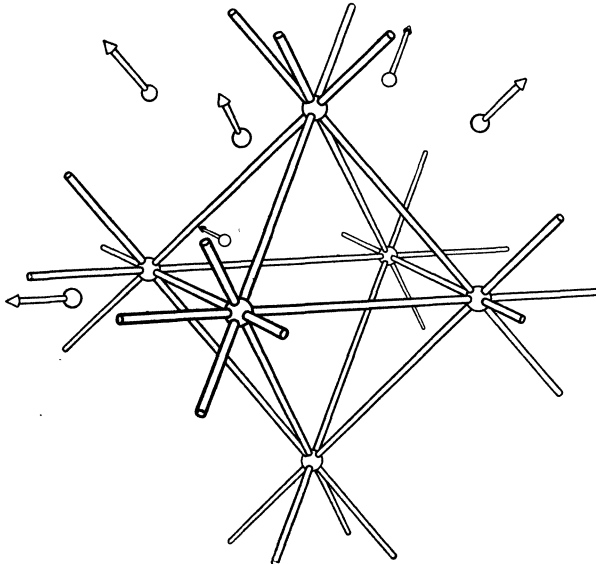


Abb. 152.

Damit ist bewiesen, daß die REYESche Konfiguration dual invariant ist. Nun werden zwar bei der dualen Zuordnung zwischen Würfel und Oktaeder die Ebenen und Punkte einer REYESchen Konfiguration auf die Punkte und Ebenen einer anderen von der ersten ganz verschieden gestalteten REYESchen Konfiguration abgebildet; im Sinne der projektiven Geometrie sind aber alle REYESchen Konfigurationen als identisch anzusehen².

Wir wollen nun auch die andere wichtige Symmetrieeigenschaft, die wir bei den ebenen Konfigurationen kennengelernt haben, an der

¹ Diese Zuordnung entsteht durch Polarenverwandtschaft an der dem Würfel eingeschriebenen Kugel.

² Eine projektive Verallgemeinerung der Oktaederfigur erhält man, wenn man von irgendeinem projektiven Koordinatensystem im Raume ausgeht. Die Einheitspunkte der sechs Koordinatenachsen sowie deren Schnittpunkte mit der Einheitsebene sind stets die Punkte einer REYESchen Konfiguration.

REYESchen Konfiguration nachweisen; wir wollen zeigen, daß diese Konfiguration regulär ist. Aus dem Bisherigen läßt sich das keineswegs vermuten, denn in bezug auf das System der Ähnlichkeitspunkte zerfallen die Ebenen in vier verschiedene Klassen, und bei der Verwirklichung der Konfiguration durch Würfel und Oktaeder spielen sowohl die Punkte als auch die Ebenen verschiedenartige Rollen. Wir wollen nun im folgenden Abschnitt eine Herleitung der REYESchen Konfiguration geben, bei der die Gleichberechtigung aller Elemente evident ist. Zu diesem Zweck müssen wir uns näher mit den regulären Körpern des drei- und des vierdimensionalen Raums vertraut machen. Wie man nämlich die Körper in die Ebene projizieren kann, so lassen sich die Gebilde des vierdimensionalen Raums in den dreidimensionalen Raum projizieren, und eins dieser Gebilde liefert bei geeigneter Projektionsmethode die REYESche Konfiguration als Bild.

§ 23. Reguläre Körper und Zelle und ihre Projektionen.

Im ersten Kapitel haben wir die fünf regulären Körper des dreidimensionalen Raumes zusammengestellt. Unter ihnen nimmt das Tetraeder eine Sonderstellung ein, weil es zu sich selbst dual ist, während sich die übrigen vier Körper paarweise dual entsprechen; das Oktaeder dem Würfel und das Dodekaeder dem Ikosaeder. Vielleicht hängt mit dieser Besonderheit des Tetraeders eine zweite Erscheinung zusammen, wodurch sich dieser Körper von den vier anderen unterscheidet. Diese nämlich sind als „zentrisch symmetrisch“ zu bezeichnen, weil paarweise die Ecken unter sich, die Kanten unter sich und die Flächen unter sich symmetrisch zum Mittelpunkt liegen; verbindet man z. B. eine Würfelfecke mit dem Mittelpunkt des Würfels, so trifft die Verbindungslinie den Würfel in einer weiteren Ecke. Dagegen ist das Tetraeder nicht zentrisch symmetrisch; die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkt trifft das Tetraeder zum zweitenmal in der Mitte einer Seitenfläche.

Durch entsprechende Untersuchungen, wie wir sie im ersten Kapitel angestellt haben, kann man nachweisen, daß im vierdimensionalen Raum ebenfalls nur endlich viele reguläre Körper, und zwar sechs, möglich sind¹. An diesen Gebilden treten natürlich außer den Ecken, Kanten und Flächen auch noch Raumstücke als Begrenzungsstücke auf. Genau wie wir im dreidimensionalen Raum forderten, daß die begrenzenden Flächen reguläre Polygone sein sollten, haben wir im vierdimensionalen Raum zu verlangen, daß die begrenzenden Räume des Gebildes reguläre Polyeder sind. Wir bezeichnen ein derartiges Gebilde als „Zell“, und zwar als n -Zell, wenn es von n Polyedern begrenzt wird. Wir stellen in

¹ Man vergleiche z. B. das Buch von H. DE VRIES: Die vierte Dimension, Leipzig und Berlin, 1926.