

## Werk

**Titel:** Anschauliche Geometrie

**Autor:** Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

**Verlag:** Springer

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN379425343

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG\_0034

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

REYESchen Konfiguration nachweisen; wir wollen zeigen, daß diese Konfiguration regulär ist. Aus dem Bisherigen läßt sich das keineswegs vermuten, denn in bezug auf das System der Ähnlichkeitspunkte zerfallen die Ebenen in vier verschiedene Klassen, und bei der Verwirklichung der Konfiguration durch Würfel und Oktaeder spielen sowohl die Punkte als auch die Ebenen verschiedenartige Rollen. Wir wollen nun im folgenden Abschnitt eine Herleitung der REYESchen Konfiguration geben, bei der die Gleichberechtigung aller Elemente evident ist. Zu diesem Zweck müssen wir uns näher mit den regulären Körpern des drei- und des vierdimensionalen Raums vertraut machen. Wie man nämlich die Körper in die Ebene projizieren kann, so lassen sich die Gebilde des vierdimensionalen Raums in den dreidimensionalen Raum projizieren, und eins dieser Gebilde liefert bei geeigneter Projektionsmethode die REYESche Konfiguration als Bild.

### § 23. Reguläre Körper und Zelle und ihre Projektionen.

Im ersten Kapitel haben wir die fünf regulären Körper des dreidimensionalen Raumes zusammengestellt. Unter ihnen nimmt das Tetraeder eine Sonderstellung ein, weil es zu sich selbst dual ist, während sich die übrigen vier Körper paarweise dual entsprechen; das Oktaeder dem Würfel und das Dodekaeder dem Ikosaeder. Vielleicht hängt mit dieser Besonderheit des Tetraeders eine zweite Erscheinung zusammen, wodurch sich dieser Körper von den vier anderen unterscheidet. Diese nämlich sind als „zentrisch symmetrisch“ zu bezeichnen, weil paarweise die Ecken unter sich, die Kanten unter sich und die Flächen unter sich symmetrisch zum Mittelpunkt liegen; verbindet man z. B. eine Würfelfecke mit dem Mittelpunkt des Würfels, so trifft die Verbindungslinie den Würfel in einer weiteren Ecke. Dagegen ist das Tetraeder nicht zentrisch symmetrisch; die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkt trifft das Tetraeder zum zweitenmal in der Mitte einer Seitenfläche.

Durch entsprechende Untersuchungen, wie wir sie im ersten Kapitel angestellt haben, kann man nachweisen, daß im vierdimensionalen Raum ebenfalls nur endlich viele reguläre Körper, und zwar sechs, möglich sind<sup>1</sup>. An diesen Gebilden treten natürlich außer den Ecken, Kanten und Flächen auch noch Raumstücke als Begrenzungsstücke auf. Genau wie wir im dreidimensionalen Raum forderten, daß die begrenzenden Flächen reguläre Polygone sein sollten, haben wir im vierdimensionalen Raum zu verlangen, daß die begrenzenden Räume des Gebildes reguläre Polyeder sind. Wir bezeichnen ein derartiges Gebilde als „Zell“, und zwar als  $n$ -Zell, wenn es von  $n$  Polyedern begrenzt wird. Wir stellen in

<sup>1</sup> Man vergleiche z. B. das Buch von H. DE VRIES: Die vierte Dimension, Leipzig und Berlin, 1926.

der folgenden Tabelle die wichtigsten Angaben über die regulären Zelle des vierdimensionalen Raums zusammen.

4-dimensionaler Raum.			
	Zahl und Art der begrenzenden Polyeder	Zahl der Ecken	Dualität
1. 5-Zell	5 Tetraeder	5	sich selbst dual
2. 8-Zell	8 Würfel	16	} einander dual
3. 16-Zell	16 Tetraeder	8	
4. 24-Zell	24 Oktaeder	24	sich selbst dual
5. 120-Zell	120 Dodekaeder	600	} einander dual
6. 600-Zell	600 Tetraeder	120	

Die Dualitätsverhältnisse, wie sie in der letzten Spalte angegeben sind, folgen ohne weiteres aus der Betrachtung der Tabelle. Im vierdimensionalen Raum sind nämlich die Punkte zu den Räumen sowie die Geraden zu den Ebenen dual.

Aus der Tabelle sehen wir, daß das Tetraeder dem 5-Zell entspricht; ferner entsprechen Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder der Reihe nach dem 8-, 16-, 120- und 600-Zell. Das 24-Zell nimmt eine Sonderstellung ein. Es ist nämlich nicht nur sich selbst dual, sondern auch zentrisch symmetrisch, während das andere selbstduale Zell, das 5-Zell, ebenso wie das ihm entsprechende reguläre Tetraeder des dreidimensionalen Raums keine zentrische Symmetrie besitzt.

Dieselben Untersuchungen sind auch auf Räume noch höherer Dimensionenzahl ausgedehnt worden. Es tritt aber in diesen Fällen eine größere Einfachheit und Regelmäßigkeit zutage, da in allen diesen Räumen nur drei reguläre Körper möglich sind. Wir stellen die wichtigsten Angaben wieder in Tabellenform zusammen:

$n$ -dimensionaler Raum. $n \geq 5$ .			
	Zahl und Art der begrenzenden Zelle von $n-1$ Dimensionen	Zahl der Ecken	Dualität
1. $(n+1)$ -Zell	$n+1$ $n$ -Zelle	$n+1$	sich selbst dual
2. $2n$ -Zell	$2n$ $(2n-2)$ -Zelle	$2^n$	} einander dual
3. $2^n$ -Zell	$2^n$ $n$ -Zelle	$2n$	

Im dreidimensionalen Raum entspricht diesen drei Arten von Zellen das Tetraeder, der Würfel und das Oktaeder ( $n+1=4$ ,  $2n=6$ ,  $2^n=8$ ), im vierdimensionalen Raum das 5-, 8-, 16-Zell. Dodekaeder und Ikosaeder sowie andererseits das 24-, 120- und 600-Zell haben also kein Analogon in Räumen höherer Dimensionenzahl.

Wir wollen nun die Projektionen der regulären Körper in den um eine Dimension niedrigeren Raum betrachten. Wir beginnen mit den Projektionen der regulären Polyeder des dreidimensionalen Raums auf

eine Ebene. Je nach Wahl des Projektionszentrums und der Bildebene fallen diese Projektionen natürlich ganz verschieden aus. In den Abb. 95 bis 99, S. 81 hatten wir Parallelprojektion gewählt, also das Projektionszentrum ins Unendliche gerückt. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß Parallelen parallel bleiben. Es hat aber den Nachteil, daß die Flächen einander teilweise überschneiden. Diesen Nachteil können

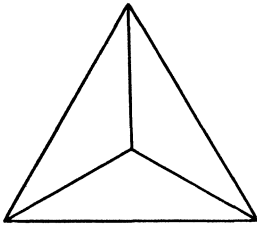


Abb. 153. Tetraeder.

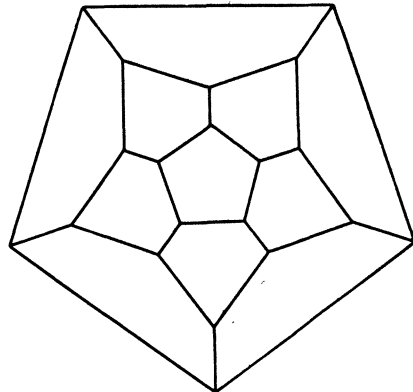


Abb. 156. Dodekaeder.

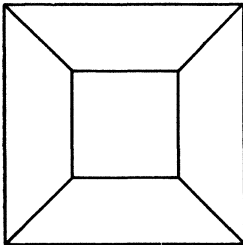


Abb. 154. Würfel.

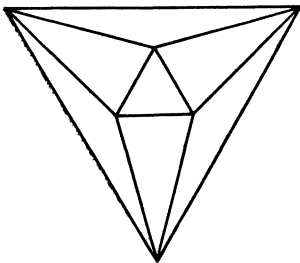


Abb. 155. Oktaeder.

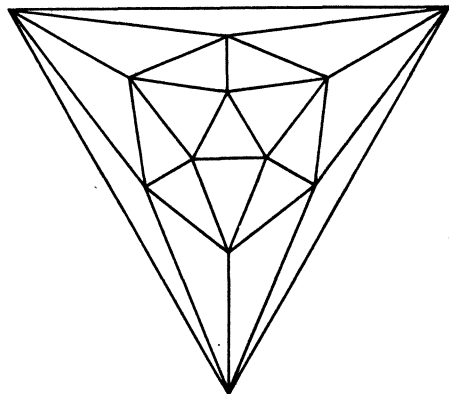


Abb. 157. Ikosaeder.

wir beseitigen, wenn wir das Projektionszentrum sehr nahe an eine Seitenfläche heranrücken. Der Symmetrie halber wollen wir es senkrecht dicht über die Mitte einer Seitenfläche legen und diese Fläche als Bildebene wählen. Dann ergeben sich für die fünf regulären Körper die in Abb. 153 bis 157 gezeichneten Bilder. Wir erhalten diese Ansichten, wenn wir eine Fläche des Polyeders entfernen und durch das so entstandene Loch ins Innere sehen.

Wenn wir das Zentrum auf die Begrenzung selbst legen, erscheinen die durchs Zentrum gehenden Seitenflächen als Geraden, das Bild wird also stark unsymmetrisch.

Lassen wir nun das Zentrum ins Innere des Körpers rücken, so tritt bei der Abbildung eine wesentliche Änderung ein; die Abbildung muß sich dann durchs Unendliche hindurchziehen, wie wir die Bildebene auch legen. Jede Ebene durchs Zentrum schneidet nämlich das Polyeder. Das gilt insbesondere für die durchs Zentrum gehende Parallelebene der Bildtafel, die die unendlich fernen Bildpunkte liefert (vgl. S. 101). Trotzdem führt diese Art der Abbildung auf eine geometrisch interessante Erscheinung, und zwar wenn wir das Projektionszentrum in den Mittelpunkt des Polyeders legen. In diesem und nur in diesem Fall ergibt sich nämlich eine symmetrische Einteilung im Bündel der Sehstrahlen. Wir können das Strahlenbündel, wie S. 103 er-

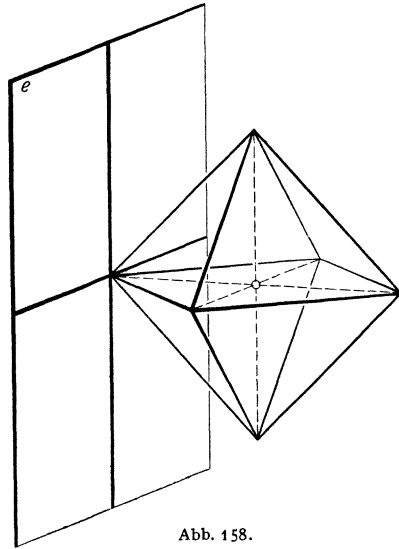


Abb. 158.

wähnt, als Modell der projektiven Ebene ansehen, wenn wir die Geraden des Bündels als „Punkte“ und die Ebenen des Bündels als „Geraden“ deuten. Somit führen die regulären Körper zu regulären Einteilungen der projektiven Ebene. Diese Einteilung kann aber nur bei zentrisch symmetrischen Körpern die projektive Ebene einfach über-

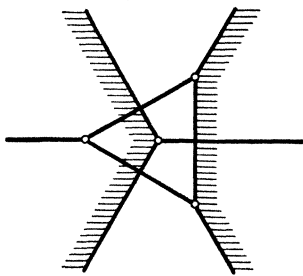


Abb. 159. Tetraeder.

decken; beim Tetraeder liefert jeder Sehstrahl zwei verschiedene Bilder, je nach seinen beiden Durchstoßpunkten mit dem Körper; die projektive Ebene erscheint daher doppelt überdeckt. Bei allen anderen Körpern dagegen liefert jedes Paar diametraler Elemente genau einen Bestandteil der projektiven Ebene. Wenn wir das Strahlenbündel mit einer Ebene zum Schnitt bringen, also eine Projektion im eigentlichen Sinne

betrachten, können wir die Symmetrie nicht vollständig aufrechterhalten. Besonders einfach wird aber das Bild, wenn wir eine Projektionsebene wählen, die durch eine Ecke geht und dort auf der Verbindungslinie der Ecke mit dem Mittelpunkt des Körpers senkrecht steht (Abb. 158 fürs Oktaeder). Die fünf so entstehenden Figuren sind in Abb. 159 bis 163

dargestellt. Jedesmal ist eins der durchs Unendliche gehenden Gebiete durch Schraffur hervorgehoben. Beim Tetraeder ist die Bildebene doppelt überdeckt. In allen übrigen Figuren stellt jedes Polygon der Ebene genau zwei Diametralflächen des Körpers dar.

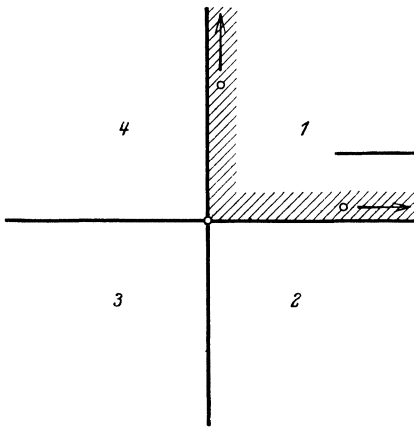


Abb. 160. Oktaeder.

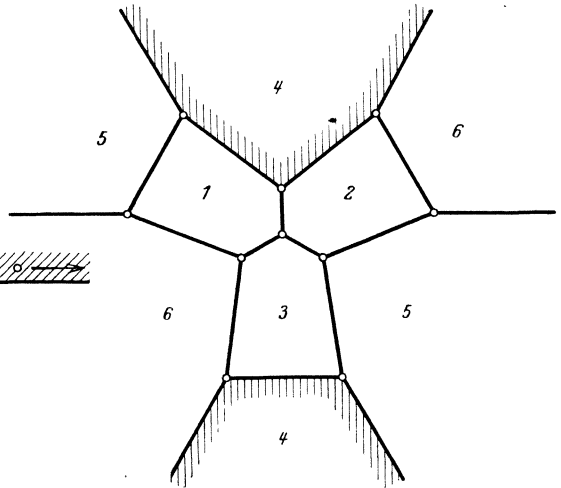


Abb. 162. Dodekaeder.

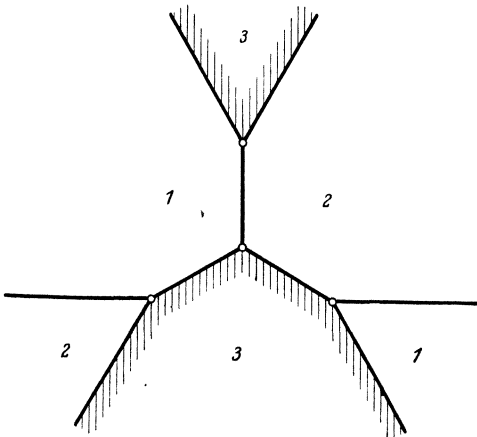


Abb. 161. Würfel.

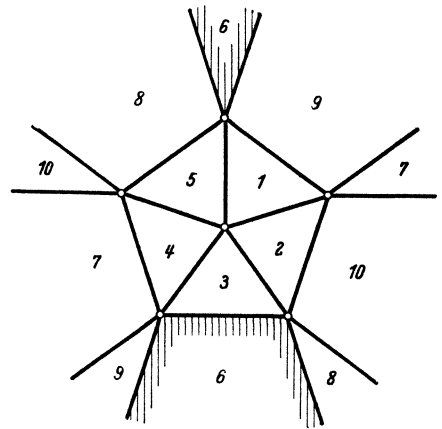


Abb. 163. Ikosaeder.

Eine weitere Reihe einfacher Figuren erhält man, wenn man bei den symmetrischen Körpern (Abb. 164 für den Würfel) die Bildebene in eine Seitenfläche legt (beim Tetraeder entsteht dadurch keine neue Figur). In Abb. 165 bis 168 sind diese Ansichten dargestellt<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Die Projektion des Oktaeders entspricht in diesem Fall der Einteilung der Ebene in vier Dreiecke durch ein projektives Koordinatensystem.

Wir können nun analoge Projektionsmethoden anwenden, um die Zelle des vierdimensionalen Raums durch Körper des dreidimensionalen

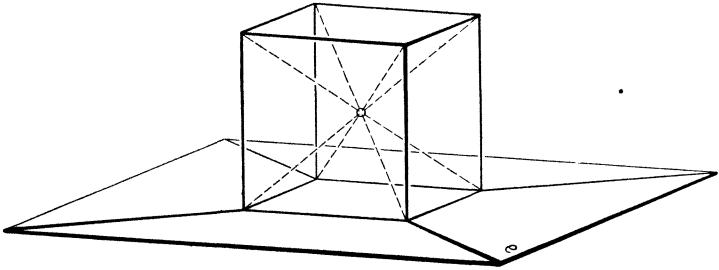


Abb. 164.

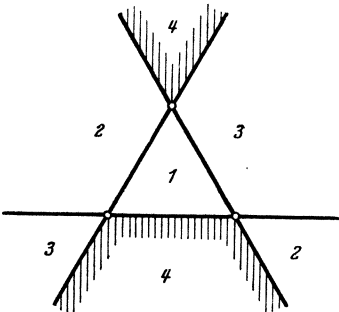


Abb. 165. Oktaeder.

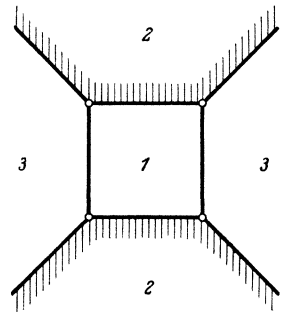


Abb. 166. Würfel.

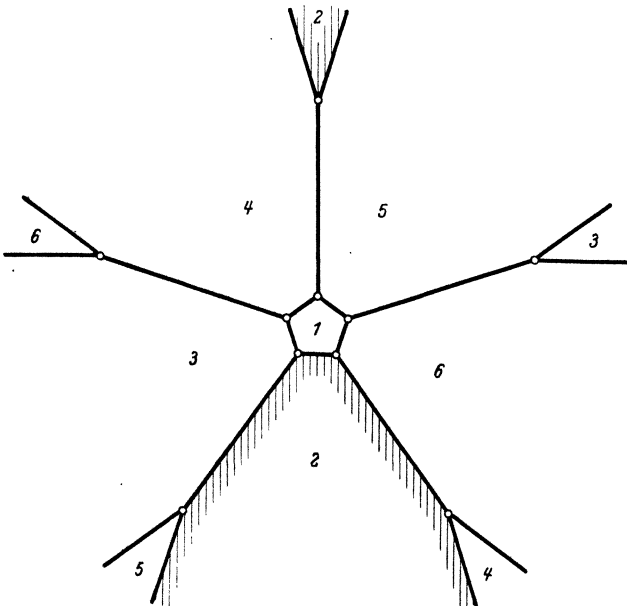


Abb. 167. Dodekaeder.

Raums abzubilden. Als ungeeignet erweist sich dabei die Parallelprojektion, weil dann die begrenzenden Polyeder des Zells durch Polyeder

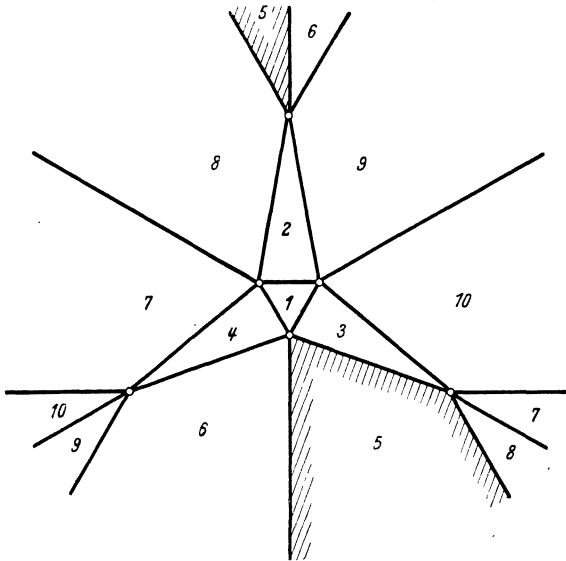


Abb. 168. Ikosaeder.

im Raum dargestellt werden, die einander teilweise überdecken und durchdringen müssen. Dagegen erhalten wir übersichtliche Bilder, wenn wir das Verfahren anwenden, das in den Abb. 153 bis 157 benutzt war. Die begrenzenden Polyeder des Zells werden durch ein

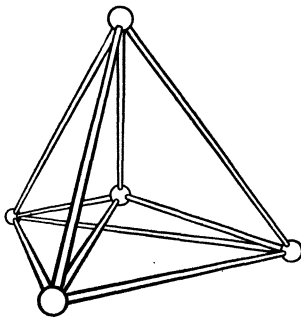


Abb. 169. 5-Zell.

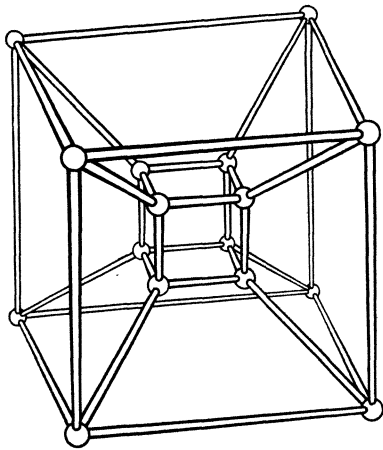


Abb. 170. 8-Zell.

System von Polyedern dargestellt, von denen eins ausgezeichnet ist und durch die anderen lückenlos und einfach ausgefüllt wird. Wenn wir diese Modelle wiederum in die Ebene projizieren, so erhalten wir Bilder, wie sie in Abb. 169 bis 172 dargestellt sind. In Abb. 172 kann



man mit einiger Mühe feststellen, daß das große Oktaeder von 23 kleineren Oktaedern (von viererlei Gestalt) ausgefüllt ist, so daß im ganzen 24 Körper auftreten. Beim 120- und 600-Zell würden die Figuren zu unübersichtlich werden.

Wenn wir das Projektionszentrum in den Mittelpunkt des Zells legen, so müssen wir reguläre Einteilungen des projektiven Raums erhalten. Wir können uns für den projektiven Raum kein ebenso symmetrisches Modell herstellen, wie es das Strahlenbündel für die projektive Ebene ist; denn dann hätten wir ein vierdimensionales Gebilde zu betrachten. Wir müssen also einen bestimmten dreidimensionalen Raum

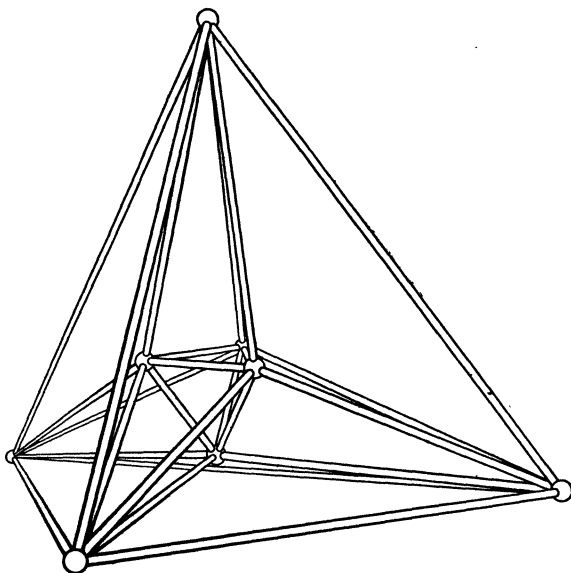


Abb. 171. 16-Zell.

als Bildraum auszeichnen, wobei die Symmetrie teilweise verlorengeht. Wir wollen aber, um die Symmetrie wenigstens teilweise zu erhalten, den Bildraum in den analogen Stellungen annehmen wie die Projektionsebene in dem um eine Dimension niedrigeren Fall; entweder soll der Bildraum entsprechend der in Abb. 164 dargestellten Anordnung mit einem der begrenzenden Räume zusammenfallen, oder er soll durch eine Ecke des Zells gehen und die entsprechende Lage haben wie die Projektionsebene in Abb. 158. Im ersten Fall wird eins der Grenzpolyeder unverzerrt wiedergegeben, weil es im Bildraum selbst liegt, im zweiten Fall herrscht zentrische Symmetrie in bezug auf die ausgezeichnete Ecke, die ihr eigenes Bild ist. Wir betrachten hier zunächst die je zwei Abbilder des 16- und des 8-Zells (Abb. 173 und 174)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Das 5-Zell ist für diese Abbildungsweise nicht geeignet, weil es keine zentrische Symmetrie besitzt.

Der Raum ist dabei in acht bzw. vier Teile geteilt, und jedes Teilgebiet entspricht zwei diametral angeordneten Grenzkörpern des Zells. In Abb. 173 a haben die Raumteile, die sich durchs Unendliche erstrecken, zweierlei Gestalt. Vier dieser Gebiete besitzen eine ganz im Endlichen

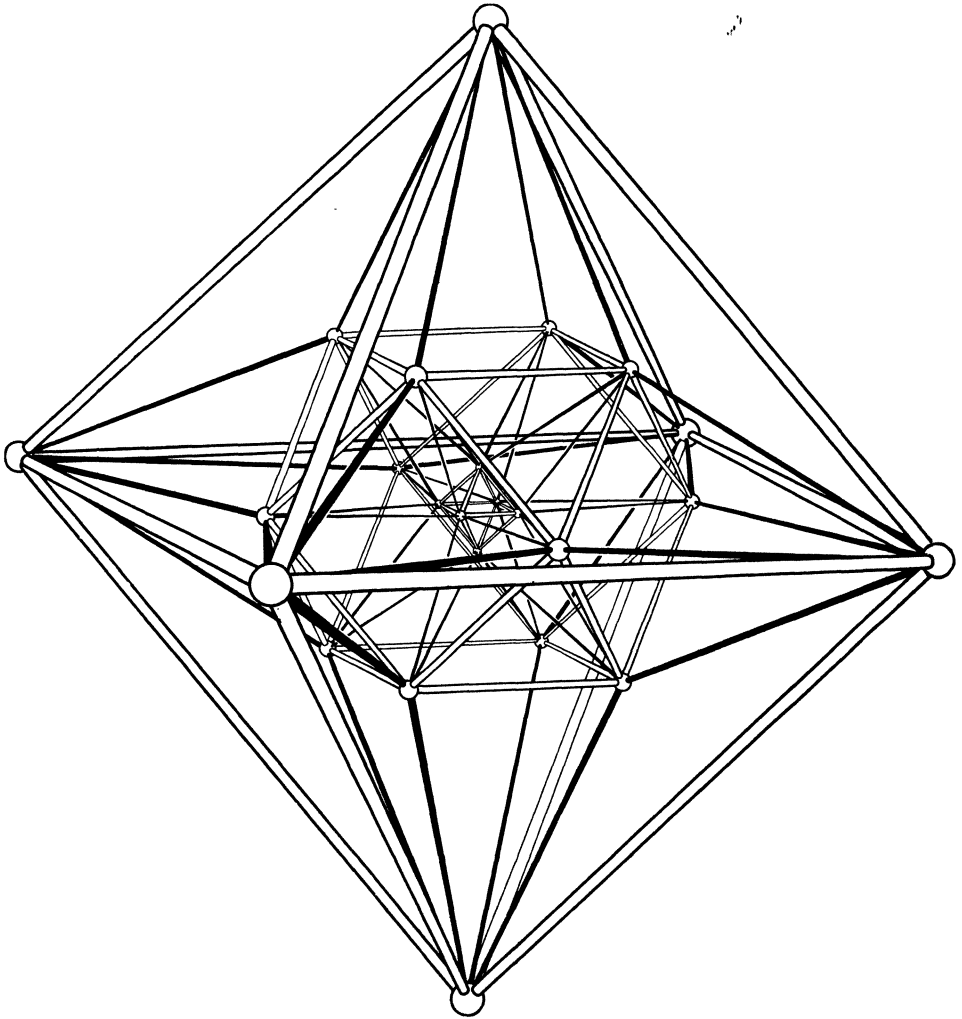


Abb. 172. 24-Zell.

liegende Seitenfläche (z. B. 1, 3, 4), von der aus sie durchs Unendliche bis zur gegenüberliegenden Spitze (z. B. 2) reichen, drei weitere Gebiete dagegen haben zwei gegenüberliegende endliche Kanten (z. B. 1, 2 und 3, 4), während alle Seitenflächen durchs Unendliche laufen. In Abb. 173 b ist die unendlich ferne Ebene selbst eine begrenzende

Ebene. Wir sehen, daß das 16-Zell auf bekannte Einteilungen führt; nämlich auf die Oktantenteilung des Raums durch ein projektives oder

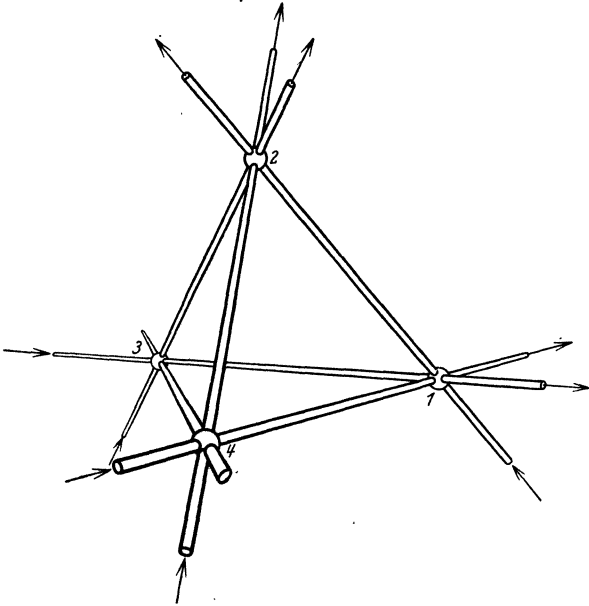


Abb. 173 a. 16-Zell.

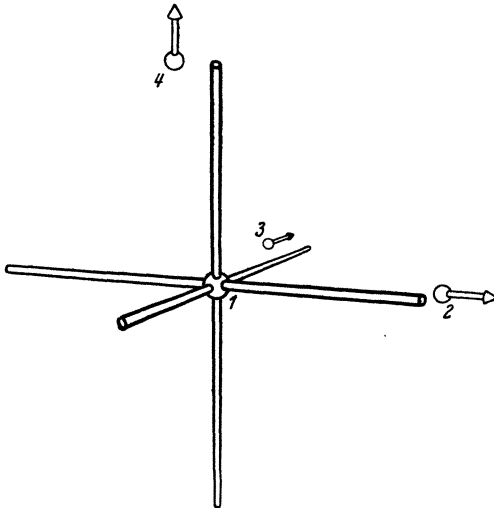


Abb. 173 b. 16-Zell.

cartesisches Koordinatensystem. Beim 8-Zell, in der Darstellung von Abb. 174 a, haben die drei Raumteile, die durchs Unendliche gehen, alle dieselbe Gestalt. In Abb. 174 b sind durch die Pfeile die Kanten

desjenigen Gebiets hervorgehoben, das dem endlichen Würfel von Abb. 174 a entspricht. Zu den Kanten dieses Gebiets gehören auch die endlichen von 1 auslaufenden Kanten außer 1,6.

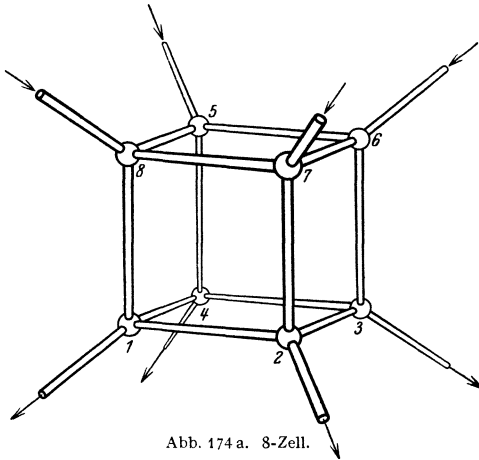


Abb. 174 a. 8-Zell.

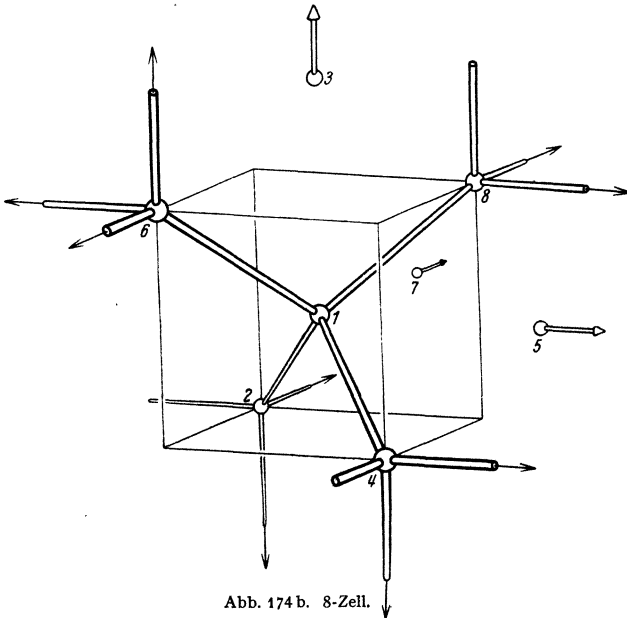


Abb. 174 b. 8-Zell.

In den Abb. 175 und 176 sind nun dieselben beiden Projektionsmethoden auf das 24-Zell angewandt. Wir erhalten also eine Einteilung des Raums in zwölf Oktaeder, von denen alle bis auf das mittlere von Abb. 175 durchs Unendliche gehen. In diesen Figuren erkennen wir aber die beiden symmetrischen Anordnungen der REYESchen Konfi-

## III. Konfigurationen.

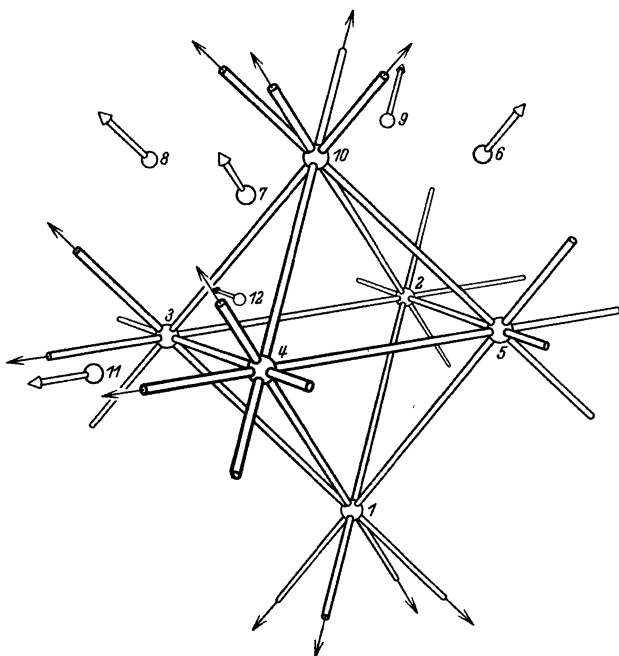


Abb. 175.

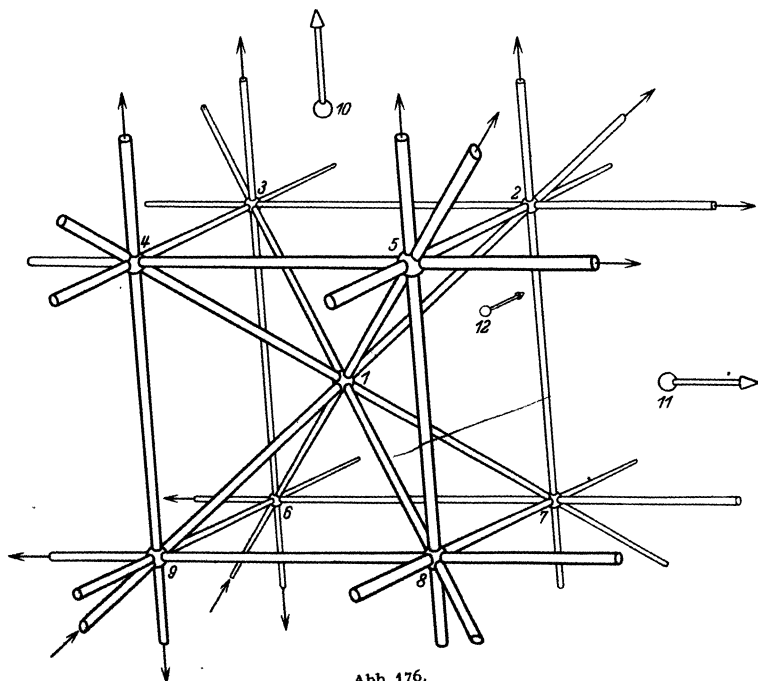


Abb. 176.

guration wieder, die wir im vorigen Abschnitt behandelt haben<sup>1</sup>. An dem im Endlichen gelegenen Oktaeder in Abb. 175 sehen wir, daß die Ebenen der Konfiguration sowohl die Begrenzung als auch die Symmetrieebenen der zwölf Oktaeder bilden. Eine nähere Betrachtung läßt den inneren Grund dafür erkennen; durch ein vollständiges Vierseit wird nämlich die projektive Ebene in drei Vierecke und vier Dreiecke zerlegt (Abb. 177; Vierecke 1, 2, 3, Dreiecke I, II, III, IV). In der REYESchen Konfiguration wird jede Ebene durch die Konfigurationsgeraden in dieser Weise eingeteilt; da nun die Grenzflächen der Oktaeder Dreiecke sind, während die Symmetrieebenen das

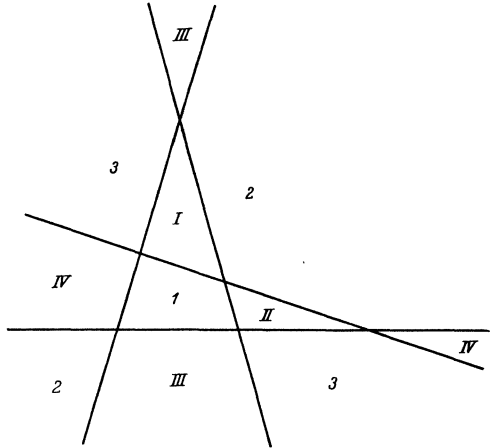


Abb. 177.

Oktaeder in Vierecken schneiden, so erkennt man, daß jede Ebene der Konfiguration Symmetrieebene in drei Oktaedern und gemeinsame Grenzfläche in  $2 \cdot 4$  Oktaedern ist, während sie eins der zwölf Oktaeder nicht trifft; so ist in Abb. 175 die unendlich ferne Ebene Konfigurationsebene, und eins der Oktaeder liegt im Endlichen<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Dort hatten wir die eine Figur aus der anderen durch Polarenverwandschaft an der Kugel erhalten. Jetzt erkennen wir in ihnen Projektionen eines und desselben vierdimensionalen Gebildes, die durch Verlegung des dreidimensionalen Projektionsraumes ineinander überführt werden können.

<sup>2</sup> Wie das Oktaeder drei Symmetrieebenen besitzt, die durch den Mittelpunkt gehen und die Fläche in einem Quadrat schneiden, so gibt es zwölf dreidimensionale Symmetrieräume des 24-Zells. Sie gehen durch den Mittelpunkt des Zells und schneiden es in je einem Kubooktaeder (Abb. 178; eins dieser Kubooktaeder ist auch in Abb. 172 hervorgehoben). Bei der von uns betrachteten Projektion müssen sich diese Symmetrieräume wie jeder Raum durchs Zentrum in Ebenen verwandeln.

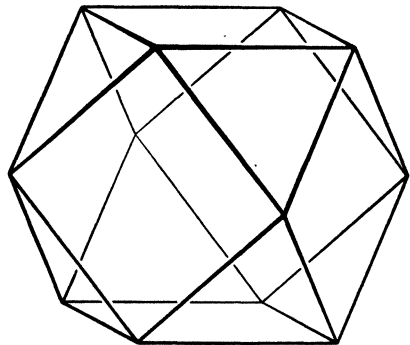


Abb. 178.

Das sind nun gerade die Ebenen der REYESchen Konfiguration. Den drei Vierecken und vier Dreiecken entsprechen die diametralen Paare von  $2 \cdot 3$  Quadraten und  $2 \cdot 4$  gleichseitigen Dreiecken des Kubooktaeders.

Abb. 176 ist insofern einfacher als Abb. 175, als nur zwei Arten von Oktaedern vorkommen (sechs Oktaeder haben dieselbe Gestalt wie 1, 2, 3, 4, 5, 10, die sechs übrigen sind kongruent zu 2, 5, 6, 9, 10, 11), während in Abb. 175 die Oktaeder dreierlei Gestalt haben. Eins ist nämlich ein reguläres Oktaeder, und von den übrigen haben drei die unendlich ferne Ebene zur Symmetrieebene (z. B. 1, 6, 7, 8, 9, 10), und acht werden von ihr begrenzt (z. B. 3, 4, 7, 8, 10, 11).

Aus dieser Erzeugungsweise der Konfiguration ergibt sich ohne weiteres die am Schluß des vorigen Abschnitts aufgestellte Behauptung: *Die REYESche Konfiguration ist regulär.*

Die vorstehenden Betrachtungen legen es nahe, die  $n$ -dimensionalen regulären Gebilde auf einen Raum möglichst niedriger Dimensionszahl zu projizieren, also auf eine Gerade. Wir wollen untersuchen, wie der  $n$ -dimensionale Würfel sich auf eine seiner Hauptdiagonalen projiziert, wenn wir das Verfahren der senkrechten Parallelprojektion verwenden. Die Endpunkte  $A, B$  einer solchen Diagonale sind ihre eigenen Bilder. Die Bildpunkte der übrigen Würfecken wollen wir  $C_1, C_2, \dots$  nennen, in der Reihenfolge, in der sie von  $A$  aus gerechnet auf  $AB$  liegen. Nun laufen  $n$  Würfelkanten von  $A$  aus, und sie alle bilden mit  $AB$  gleiche Winkel. Alle ihre Endpunkte haben daher notwendig den Punkt  $C_1$  zum Bilde auf  $AB$ . Ferner ist jede beliebige Würfelkante einer der von  $A$  ausgehenden Kanten parallel, der Abstand konsekutiver Punkte  $C_k, C_{k+1}$  ist daher stets gleich  $AC_1$ , also konstant. Demnach wird die Hauptdiagonale in gleiche Abschnitte geteilt. Man kann zeigen, daß es gerade  $n$  Abschnitte sind und daß der Punkt  $C_k$  für jedes  $k$  zwischen 1 und  $n - 1$  Bild von  $\binom{n}{k}$  Würfecken ist, wobei  $\binom{n}{k}$  das bekannte Symbol der Binomialkoeffizienten ist.  $C_k$  ist nämlich das Bild aller und nur der Ecken, die man mit  $A$  durch  $k$  und nicht weniger als  $k$  Würfelkanten verbinden kann. Es läßt sich abzählen, daß es gerade  $\binom{n}{k}$  solche Ecken gibt. Am Fall des Quadrats und des gewöhnlichen Würfels kann man sich die angegebenen Tatsachen leicht klarmachen.

## § 24. Abzählende Methoden der Geometrie.

Die letzte räumliche Konfiguration, die wir betrachten wollen, die SCHLÄFLISCHE Doppelsechs, führt auf eine geometrische Methode besonderer Art, die man als abzählende Geometrie bezeichnet. Wir wollen zunächst diese Methode darlegen, um die Untersuchung über die Doppelsechs nicht auseinanderreißen zu müssen, und weil jene Methoden auch für sich großes Interesse bieten.

Es gibt in der Ebene unendlich viele Geraden und unendlich viele Kreise. Um zunächst die Mannigfaltigkeit aller Geraden der Ebene zu charakterisieren, denken wir uns ein cartesisches Koordinatensystem in der Ebene fest gewählt. Dann ist im allgemeinen eine Gerade durch