Werk

Titel: Anschauliche Geometrie
Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan
Verlag: Springer
Ort: Berlin
Jahr: 1932
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN379425343
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

LOG Id: LOG_0035
LOG Titel: § 24. Abzählende Methoden der Geometrie.
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Abb. 176 ist insofern einfacher als Abb. 175, als nur zwei Arten von Oktaedern vorkommen (sechs Oktaeder haben dieselbe Gestalt wie 1, 2, 3, 4, 5, 10, die sechs übrigen sind kongruent zu 2, 5, 6, 9, 10, 11), während in Abb. 175 die Oktaeder dreierlei Gestalt haben. Eins ist nämlich ein reguläres Oktaeder, und von den übrigen haben drei die unendlich ferne Ebene zur Symmetrieebene (z. B. 1, 6, 7, 8, 9, 10), und acht werden von ihr begrenzt (z. B. 3, 4, 7, 8, 10, 11).

Aus dieser Erzeugungsweise der Konfiguration ergibt sich ohne weiteres die am Schluß des vorigen Abschnitts aufgestellte Behauptung: *Die* REYE*sche Konfiguration ist regulär.*

Die vorstehenden Betrachtungen legen es nahe, die n-dimensionalen regulären Gebilde auf einen Raum möglichst niedriger Dimensionszahl zu projizieren, also auf eine Gerade. Wir wollen untersuchen, wie der n-dimensionale Würfel sich auf eine seiner Hauptdiagonalen projiziert, wenn wir das Verfahren der senkrechten Parallelprojektion verwenden. Die Endpunkte A, B einer solchen Diagonale sind ihre eigenen Bilder. Die Bildpunkte der übrigen Würfelecken wollen wir $C_1, C_2, \ldots$ nennen, in der Reihenfolge, in der sie von A aus gerechnet auf AB liegen. Nun laufen n Würfelkanten von A aus, und sie alle bilden mit AB gleiche Winkel. Alle ihre Endpunkte haben daher notwendig den Punkt C_1 zum Bilde auf AB. Ferner ist jede beliebige Würfelkante einer der von A ausgehenden Kanten parallel, der Abstand konsekutiver Punkte C_k, C_{k+1} ist daher stets gleich AC_1, also konstant. Demnach wird die Hauptdiagonale in gleiche Abschnitte geteilt. Man kann zeigen, daß es gerade n Abschnitte sind und daß der Punkt C_k für jedes k zwischen 1 und $n - 1$ Bild von $\binom{n}{k}$ Würfelecken ist, wobei $\binom{n}{k}$ das bekannte Symbol der Binomialkoeffizienten ist. C_k ist nämlich das Bild aller und nur der Ecken, die man mit A durch k und nicht weniger als k Würfelkanten verbinden kann. Es läßt sich abzählen, daß es gerade $\binom{n}{k}$ solche Ecken gibt. Am Fall des Quadrats und des gewöhnlichen Würfels kann man sich die angegebenen Tatsachen leicht klarmachen.

§ 24. Abzählende Methoden der Geometrie.

Die letzte räumliche Konfiguration, die wir betrachten wollen, die SCHLÄFLIsche Doppelsechs, führt auf eine geometrische Methode besonderer Art, die man als abzählende Geometrie bezeichnet. Wir wollen zunächst diese Methode darlegen, um die Untersuchung über die Doppelsechs nicht auseinanderreißen zu müssen, und weil jene Methoden auch für sich großes Interesse bieten.

Es gibt in der Ebene unendlich viele Geraden und unendlich viele Kreise. Um zunächst die Mannigfaltigkeit aller Geraden der Ebene zu charakterisieren, denken wir uns ein cartesisches Koordinatensystem in der Ebene fest gewählt. Dann ist im allgemeinen eine Gerade durch die beiden gerichteten Strecken, die sie von den Koordinatenachsen abschneidet, vollständig bestimmt. Wir können also — abgesehen von einer sogleich zu erwähnenden Ausnahme — die Gerade durch Angabe zweier Zahlen analytisch festlegen. Diejenigen Geraden, die einer Achse parallel sind, können wir auch noch durch dieses Verfahren mit erfassen, indem wir einen der Achsenabschnitte als unendlich groß vorgeben. Dagegen entziehen sich unserer Bestimmungsweise alle und nur die Geraden, die durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehen; alle diese Geraden führen auf eine und dieselbe Angabe, daß nämlich beide Abschnitte Null sind.

Man sagt nun, daß die nicht durch den Anfangspunkt gehenden Geraden eine zweiparametrige Schar bilden, und bringt damit zum Ausdruck, daß jedes Exemplar der Schar durch zwei Zahlen (die „Parameter" der Schar) festgelegt ist und daß einer stetigen Änderung der Parameter eine stetige Änderung des zugehörigen Gebildes entspricht. Die Geraden, die durch den Anfangspunkt gehen, bilden nach dieser Definition eine einparametrige Schar, denn man kann sie durch den Winkel festlegen, den sie mit einer der Achsen bilden. Man nimmt nun an, daß eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit, grob gesprochen, nicht wesentlich vermehrt wird, wenn man ihr noch eine einparametrige Schar hinzufügt, die sich der ersten Schar stetig einlagert. In diesem Sinne nennt man die Gesamtheit *aller* Geraden der Ebene ebenfalls eine zweiparametrige Schar. Wir werden die Zweckmäßigkeit dieser Betrachtungsweise bald einsehen.

Wir können die Geraden der Ebene noch auf viele andere Arten bestimmen, z. B. durch den Winkel, den sie mit einer beliebig festgelegten Geraden bilden, und durch einen Punkt, durch den sie hindurchgehen. Da zur Festlegung eines Punkts der Ebene zwei Koordinaten nötig sind, brauchen wir im ganzen drei Parameter, wenn wir eine Gerade auf die angegebene Art kennzeichnen wollen. Nun können wir aber auf der Geraden den bestimmenden Punkt willkürlich wählen, und die Punkte einer Geraden bilden ersichtlich eine einparametrige Schar. Eine analoge Erscheinung bemerken wir, wenn wir eine Gerade durch zwei auf ihr liegende Punkte bestimmen. Dann brauchen wir vier Parameter, dafür bestimmt aber eine zweiparametrige Schar von Punktepaaren dieselbe Gerade. Um die wahre Parameterzahl zu erhalten, werden wir also im letzten Beispiel zwei, im vorhergehenden Beispiel einen Parameter abzuziehen haben, und finden dann in Übereinstimmung mit der zuerst verfolgten Methode, daß die Geraden der Ebene eine zweiparametrige Schar bilden. Dieses hier nur angedeutete Verfahren läßt sich analytisch präzisieren, und es läßt sich dann beweisen, daß die Anzahl der Parameter einer Schar geometrischer Gebilde unabhängig davon ist, auf welche Art man die Parameter wählt. Mit Hilfe des Symbols ∞ lassen sich derartige Überlegungen kürzer schreiben. Wir sagen, daß es in der Ebene

∞^2 Geraden gibt, daß es auf einer Geraden ∞^1 Punkte und ∞^2 Punktpaare gibt. Die Abzählung erhält dann Analogie zur Division von Zahlpotenzen; wir haben die „Anzahl" ∞^4 aller Punktepaare der Ebene durch die „Anzahl" ∞^2 der Punktepaare einer Geraden zu „dividieren", um die richtige „Anzahl" ∞^2 aller Geraden der Ebene zu erhalten.

Wir wenden das Verfahren an, um die Mannigfaltigkeit aller Kreise der Ebene zu kennzeichnen. Ein Kreis ist durch Mittelpunkt und Radius, also durch drei Zahlenangaben bestimmt, und umgekehrt gehört zu jedem Kreis nur ein einziges solches Zahlentripel. Demnach gibt es ∞^3 Kreise in der Ebene. Da die Schar aller Geraden nur zweiparametrig ist und jede Gerade als Grenzfall von Kreisen aufgefaßt werden kann, ist die Schar aller Kreise *und* Geraden der Ebene ebenfalls dreiparametrig. Damit steht in Einklang, daß durch drei Punkte der Ebene stets ein Kreis oder eine Gerade gelegt werden kann. Denn es gibt in der Ebene ∞^6 Punktetripel, und je ∞^3 Punktetripel bestimmen dieselbe Kurve. Analog kann man zeigen, daß es in einer n-parametrigen Schar ebener Kurven stets eine Kurve gibt, die durch n ganz beliebig gewählte Punkte der Ebene hindurchgeht, daß aber durch $n+1$ beliebige Punkte der Ebene im allgemeinen keine Kurve der Schar geht. Der Satz gilt jedoch nur, wenn man in der Schar auch alle Grenzfälle mitzählt; ebenso wie zwischen den Kreisen und Punktetripeln eine eindeutige Zuordnung erst möglich wird, wenn wir zu den Kreisen auch die Geraden als deren Grenzfälle mitrechnen. Streng formulieren lassen sich diese Aussagen nur mit analytischen und algebraischen Mitteln, insbesondere müssen auch die imaginären Gebilde mitberücksichtigt werden.

Wir wollen die Anzahl der verschiedenen Kegelschnitte abzählen. Eine Ellipse ist durch ihre beiden Brennpunkte (vier Parameter) und die konstante Abstandssumme von diesen Punkten, also durch fünf Parameter bestimmt, und zu jeder Ellipse gehört nur ein einziges System solcher fünf Angaben. Also gibt es ∞^5 Ellipsen in der Ebene. Ebenso zeigt man, daß es ∞^5 Hyperbeln in der Ebene gibt. Die Ellipsen lassen sich auch durch ihre beiden Achsenlängen, ihren Mittelpunkt und die Richtung der großen Achse festlegen, das sind, in Einklang mit der allgemeinen Theorie, wiederum fünf Parameter. Hieraus folgt, daß die Schar aller Parabeln einer Ebene vierparametrig ist, denn nach der Konstruktion von S. 3 ergeben sich die Parabeln als Grenzfälle der Ellipsen, wobei stets eine einparametrige Schar von Ellipsen dieselbe Parabel bestimmt und jede Ellipse nur endlich vielen, nämlich zwei, solchen Scharen angehört.

Gibt man die beiden Ellipsenachsen gleich lang vor, so entsteht ein Kreis. Hier liegt ein Trugschluß nahe. Setzen wir fest, daß beide Achsen gleich lang sein sollen, so bleiben vier Zahlenangaben übrig. Also könnte man denken, daß es ∞^4 Kreise gäbe und nicht ∞^3, wie wir eben abgezählt haben. Der Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß bei Gleichheit der Achsen auch noch die Angabe der Achsenrichtungen überflüssig wird, da jedes beliebige Paar senkrechter Kreisdurchmesser als Grenzfall von Ellipsenachsen aufgefaßt werden kann.

Nach dem Früheren werden wir nicht erwarten können, daß durch fünf beliebige Punkte der Ebene stets eine Ellipse gelegt werden kann; der Satz könnte höchstens gelten, wenn man zu den Ellipsen auch noch die Parabeln und Kreise als Grenzfälle rechnet. Es zeigt sich aber, daß man auch noch die Hyperbeln hinzunehmen muß. Die Gesamtheit aller Kegelschnitte der Ebene, also alle Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen, Kreise, Geradenpaare und (doppelt zählende) Geraden, bilden im Sinne der abzählenden Geometrie eine einzige Schar. Nach dem Früheren muß diese Schar fünfparametrig sein, da jeder der unter den Kegelschnitten vorkommenden Typen einer von fünf oder weniger Parametern bestimmten Schar angehört. Für die Gesamtheit aller Kegelschnitte gilt nun in der Tat der Satz, daß durch fünf beliebige Punkte der Ebene ein Kegelschnitt geht. Eine nähere Betrachtung, die aber nicht abzählender Natur ist, lehrt, daß der Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist, wenn nicht vier der gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen. In diesem Ausnahmefall ist die Bestimmung ersichtlich vieldeutig; denn durch vier Punkte einer Geraden g und einen fünften Punkt P kann ich ∞^1 Geradenpaare g, h, also ∞^1 Kegelschnitte spezieller Art legen, indem ich h als beliebige durch P gehende Gerade wähle. Liegt auch noch P auf g, so gibt es sogar ∞^2 Geradenpaare, denn dann ist h ganz beliebig wählbar.

Wir wollen jetzt die abzählenden Methoden auf räumliche Gebilde anwenden. Wenn wir eine Ebene durch ihre drei Achsenabschnitte in einem festen räumlichen Koordinatensystem bestimmen, sehen wir, daß es im Raum ∞^3 Ebenen gibt; denn die Ebenen durch den Anfangspunkt des Systems, die allein sich dieser Bestimmungsweise entziehen, bilden eine nur zweiparametrige Schar. Wir bestätigen durch Abzählung den elementaren Satz, daß durch drei beliebige Raumpunkte eine Ebene geht; in der Tat gibt es im Raum ∞^9 Punktetripel, in jeder Ebene dagegen ∞^6, so daß die Punktetripel des Raums „∞^9/∞^6", d. h. ∞^3 Ebenen bestimmen.

Indem wir eine Gerade durch zwei Punkte bestimmen, finden wir, daß es ∞^4 Geraden im Raum gibt; denn die Mannigfaltigkeit der Punktepaare beträgt im Raum ∞^6 und auf der Geraden ∞^2.

Die Kugeln können wir durch Mittelpunkt und Radius bestimmen. Demnach gibt es ∞^4 Kugeln im Raum. Nehmen wir zu dieser Schar noch die Ebenen als Grenzfälle hinzu, so bestätigt sich uns durch Abzählung die bekannte Tatsache, daß durch vier Raumpunkte stets eine Kugel oder Ebene gelegt werden kann. Wie beim Beispiel der Kegelschnitte, so ist auch hier die Bestimmung der Kugel nicht immer eindeutig, sondern in unserem Fall dann und nur dann, wenn die vier Punkte nicht auf einem Kreis oder auf einer Geraden liegen. Die analoge Erscheinung gilt allgemein. Wenn eine n-parametrige Flächenschar hinreichend umfassend definiert wird (wie in der Ebene die Schar aller Kegelschnitte im Gegensatz zur Schar aller Ellipsen), dann geht durch n Raumpunkte stets eine Fläche der Schar. Diese ist aber nicht ausnahmslos durch die n Punkte eindeutig bestimmt, sondern nur, wenn die n Punkte „allgemeine Lage" haben, d. h. wenn nicht zwischen ihnen bestimmte geometrische Relationen bestehen, deren Art von der gegebenen Flächenschar abhängt.

Eine Regelfläche zweiter Ordnung ist durch drei windschiefe Geraden bestimmt. Im Raum gibt es $\infty^{4\cdot 3} = \infty^{12}$ Gradentripel. Da aber auf einer Regelfläche zweiter Ordnung jede Gerade einer einparametrigen Schar angehört, so bestimmen ∞^3 Geradentripel dieselbe Fläche. Also gibt es ∞^9 Regelflächen zweiter Ordnung.

Ebenso gibt es ∞^9 dreiachsige Ellipsoide. Denn wir erhalten alle Ellipsoide, und jedes nur einmal, wenn wir den Mittelpunkt (drei Parameter), die Achsenlängen (drei Parameter), die Richtung der großen Achse (zwei Parameter) und in der darauf senkrechten Ebene durch den Mittelpunkt die Richtung der kleinen Achse (ein Parameter) vorgeben.

Die analytische Betrachtung lehrt, daß es überhaupt ∞^9 Flächen zweiter Ordnung gibt. Für diese Schar gilt der Satz, daß durch neun beliebige Raumpunkte stets eine Fläche geht. Damit die Bestimmung eindeutig werde, damit also die Punkte die für diese Schar hinreichend allgemeine Lage haben, muß man ausschließen, daß die Punkte auf gewissen Raumkurven vierter Ordnung liegen; diese lassen sich nämlich als Schnittkurven zweier Flächen zweiter Ordnung konstruieren, so daß durch beliebig viele Punkte einer solchen Kurve naturgemäß keine eindeutige Bestimmung einer Fläche zweiter Ordnung möglich ist.

Wir wollen nun plausibel machen, daß auf jeder Fläche zweiter Ordnung unendlich viele Geraden liegen. Zu diesem Zweck gehen wir von einer Tatsache aus, die aus der analytischen Definition der Flächen zweiter Ordnung unmittelbar folgt: daß nämlich eine Gerade, die drei Punkte mit einer solchen Fläche gemein hat, stets ganz in ihr verläuft. Nun gibt es offenbar ∞^6 Punktetripel auf einer Fläche zweiter Ordnung (und auf jeder beliebigen anderen Fläche). Sucht man diejenigen Tripel heraus, die auf einer und derselben Geraden liegen, so liefert die abzählende Geometrie den Schluß, daß es ∞^4 solcher Tripel gibt, daß also zwei Parameter fortfallen. Das rührt daher, daß man zwei analytische Relationen braucht, um auszudrücken, daß einer der Punkte auf der durch die anderen beiden bestimmten Geraden liegt. Es gilt nun allgemein der Satz, daß die Parameterzahl einer Schar um n vermindert wird, wenn man sich auf diejenigen Scharelemente beschränkt, die n unabhängigen Relationen genügen; unabhängig heißen n Relationen, wenn man sie nicht durch weniger als n Relationen ersetzen kann. Demnach muß es in der Tat auf jeder Fläche zweiter Ordnung ∞^4 kollineare Punkttripel geben. Jede Gerade, die ein solches Punktetripel enthält, muß nach dem Früheren ganz in die Fläche fallen. Nun liegen aber auf einer Geraden ∞^3 solche Punktetripel. Die kollinearen Punktetripel einer Fläche zweiter Ordnung liegen also auf ∞^1 auf der Fläche verlaufenden Geraden. Auf dem Ellipsoid, dem elliptischen Paraboloid und dem zweischaligen Hyperboloid sind diese Geraden imaginär.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen über die Flächen dritter Ordnung, da diese Flächen mit den Eigenschaften der im folgenden zu betrachtenden SCHLÄFLIschen Doppelsechs eng zusammenhängen. Analytisch sind diese Flächen dadurch gekennzeichnet, daß ihre Gleichung in cartesischen Koordinaten vom dritten Grade ist. Nun kommen in der allgemeinen Gleichung dritten Grades zwischen drei Veränderlichen zwanzig Koeffizienten vor, die durch die zugehörige Fläche bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind. Hieraus folgt, daß es ∞^{19} Flächen dritter Ordnung gibt und daß durch neunzehn beliebige Raumpunkte stets eine solche Fläche geht. Dabei müssen verschiedene Ausartungsfälle mitgezählt werden, z. B. ist eine Fläche zweiter Ordnung zusammen mit einer Ebene als Fläche dritter Ordnung anzusehen.

Eine Gerade hat im allgemeinen drei Punkte mit einer Fläche dritter Ordnung gemein, und eine Gerade, die mit einer solchen Fläche vier Punkte gemein hat, muß ganz in ihr verlaufen. Man kann das leicht daraus schließen, daß die Gleichung der Fläche vom dritten Grade ist. Wir wollen nun durch Abzählung zeigen, daß auf der allgemeinsten Fläche dritter Ordnung nur endlich viele Geraden liegen können. Es gibt auf jeder Fläche ∞^8 Punktquadrupel. Nun sind vier Bedingungen nötig, damit ein solches Quadrupel kollinear sei; denn je zwei Bedingungen besagen, daß der dritte und vierte Punkt auf der Geraden liegt, die durch die ersten beiden Punkte geht. Demnach liegen ∞^4 solche Quadrupel auf einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung. Jede Gerade, die ein solches Quadrupel enthält, liegt ganz auf der Fläche und enthält ∞^4 andere solche Quadrupel. Gäbe es also unendlich viele Geraden auf der Fläche, so müßte sie mehr als ∞^4 kollineare Punktquadrupel enthalten.

Es gibt unter den Flächen dritter Ordnung auch viele Regelflächen, auf denen also ∞^5 oder noch mehr kollineare Punktquadrupel liegen. Die Gleichung einer Regelfläche dritter Ordnung muß demnach die spezielle Eigenschaft haben, daß diese Gleichung zusammen mit den vier Bedingungen der Kollinearität eines Punktquadrupels durch ein System von weniger Gleichungen ersetzt werden kann. Man kann zeigen, daß eine solche Reduktion nur eintritt, wenn zwischen den zwanzig Koeffizienten der Gleichung dritten Grades spezielle Relationen erfüllt sind.

Auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung verlaufen also in der Tat höchstens endlich viele Geraden[1].

Analog läßt sich abzählen, daß auf einer Fläche von höherer als dritter Ordnung im allgemeinen keine Gerade verläuft.

§ 25. Die Schläflische Doppelsechs.

Wir wollen zunächst einige einfache Betrachtungen über die möglichen Lagen von Geraden im Raum anstellen. Drei windschiefe Geraden a, b, c bestimmen ein Hyperboloid H. Eine beliebige vierte Gerade d wird H im allgemeinen in zwei Punkten schneiden. d kann aber auch H berühren oder ganz auf H liegen. Im allgemeinen Fall geht durch jeden der Durchstoßpunkte eine auf H verlaufende Gerade, die nicht zur selben Schar gehört wie a, b, c, die also diese Geraden schneidet. Umgekehrt muß jede Gerade, die a, b, c und d schneidet, auf H verlaufen und durch einen Durchstoßpunkt von H mit d gehen. Im allgemeinen gibt es also zu vier Geraden zwei und nur zwei Geraden, die jene vier Geraden schneiden. Tritt in unserem Beispiel der Fall ein, daß d Tangente von H ist, so gibt es nur eine (doppeltzählende) mit a, b, c, d incidente Gerade. Gibt es umgekehrt mehr als zwei Geraden, die a, b, c, d schneiden, so muß d ganz in H liegen. In diesem Fall gibt es also unendlich viele a, b, c, d schneidende Geraden. Man sagt dann, daß die vier Geraden hyperboloidische Lage haben.

Um nun die Schläflische Doppelsechs zu konstruieren, gehen wir von irgendeiner Geraden 1 aus und ziehen durch 1 drei paarweise windschiefe Geraden, die wir aus später ersichtlichen Gründen 2′, 3′, 4′ nennen (Abb. 179). Nun legen wir durch 1 eine weitere Gerade 5′, die möglichst allgemeine Lage zu 2′ 3′ 4′ haben soll. Dann ist 5′ windschief zu 2′3′4′, und außer 1 gibt es noch genau eine zweite Gerade, die 2′3′4′5′ schneidet. Diese Gerade wollen wir 6 nennen. Nun ziehen wir durch 1 noch eine letzte Gerade 6′, die weder 6 noch 2′3′4′5′ treffen möge. Ferner soll 6′ so gewählt sein, daß die Quadrupel 2′3′4′6′, 2′3′5′6′, 2′4′5′6′ und 3′4′5′6′ möglichst allgemeine Lage haben. Dann gibt es außer 1 noch genau eine weitere Gerade 5, die 2′3′4′6′ trifft. Analog bestimmen wir die Geraden 4, 3, 2 (z. B. ist 4 mit 2′3′5′6′ incident und von 1 ver-

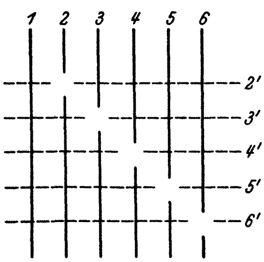

Abb. 179.

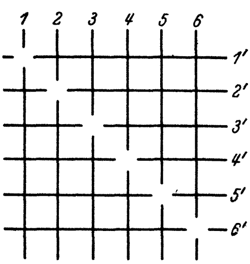

Abb. 180.

[1] Z. B. geht durch keinen endlichen Punkt der Fläche $xyz = 1$ eine auf der Fläche verlaufende Gerade.