Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0036

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

Auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung verlaufen also in der Tat höchstens endlich viele Geraden[1].

Analog läßt sich abzählen, daß auf einer Fläche von höherer als dritter Ordnung im allgemeinen keine Gerade verläuft.

§ 25. Die Schläflische Doppelsechs.

Wir wollen zunächst einige einfache Betrachtungen über die möglichen Lagen von Geraden im Raum anstellen. Drei windschiefe Geraden a, b, c bestimmen ein Hyperboloid H. Eine beliebige vierte Gerade d wird H im allgemeinen in zwei Punkten schneiden. d kann aber auch H berühren oder ganz auf H liegen. Im allgemeinen Fall geht durch jeden der Durchstoßpunkte eine auf H verlaufende Gerade, die nicht zur selben Schar gehört wie a, b, c, die also diese Geraden schneidet. Umgekehrt muß jede Gerade, die a, b, c und d schneidet, auf H verlaufen und durch einen Durchstoßpunkt von H mit d gehen. Im allgemeinen gibt es also zu vier Geraden zwei und nur zwei Geraden, die jene vier Geraden schneiden. Tritt in unserem Beispiel der Fall ein, daß d Tangente von H ist, so gibt es nur eine (doppeltzählende) mit a, b, c, d incidente Gerade. Gibt es umgekehrt mehr als zwei Geraden, die a, b, c, d schneiden, so muß d ganz in H liegen. In diesem Fall gibt es also unendlich viele a, b, c, d schneidende Geraden. Man sagt dann, daß die vier Geraden hyperboloidische Lage haben.

Um nun die Schläflische Doppelsechs zu konstruieren, gehen wir von irgendeiner Geraden 1 aus und ziehen durch 1 drei paarweise windschiefe Geraden, die wir aus später ersichtlichen Gründen $2'$, $3'$, $4'$ nennen (Abb. 179). Nun legen wir durch 1 eine weitere Gerade $5'$, die möglichst allgemeine Lage zu $2'3'4'$ haben soll. Dann ist $5'$ windschief zu $2'3'4'$, und außer 1 gibt es noch genau eine zweite Gerade, die $2'3'4'5'$ schneidet. Diese Gerade wollen wir 6 nennen. Nun ziehen wir durch 1 noch eine letzte Gerade $6'$, die weder 6 noch $2'3'4'5'$ treffen möge. Ferner soll $6'$ so gewählt sein, daß die Quadrupel $2'3'4'6'$, $2'3'5'6'$, $2'4'5'6'$ und $3'4'5'6'$ möglichst allgemeine Lage haben. Dann gibt es außer 1 noch genau eine weitere Gerade 5, die $2'3'4'6'$ trifft. Analog bestimmen wir die Geraden 4, 3, 2 (z. B. ist 4 mit $2'3'5'6'$ incident und von 1 ver-

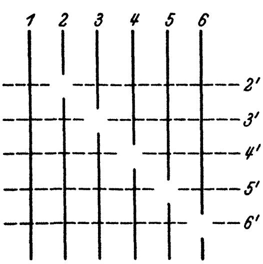

Abb. 179.

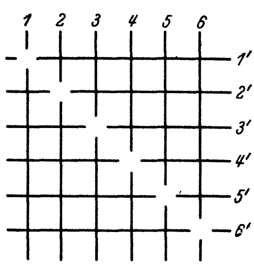

Abb. 180.

[1] Z. B. geht durch keinen endlichen Punkt der Fläche $xyz = 1$ eine auf der Fläche verlaufende Gerade.

schieden). Wir erhalten so das in Abb. 179 gezeichnete Incidenzschema. Man kann leicht einsehen, daß wegen unserer Wahl der Geraden $2'3'4'5'6'$ keine weiteren Incidenzen auftreten können. Wir betrachten nun die Geraden 2, 3, 4, 5. Ich behaupte, daß diese vier Geraden nicht hyperboloidisch liegen können. Andernfalls würde jede mit dreien von ihnen incidente Gerade auch die vierte treffen, und das müßte nach unserem Schema insbesondere für die vier Geraden $2'3'4'5'$ gelten. Dann würden

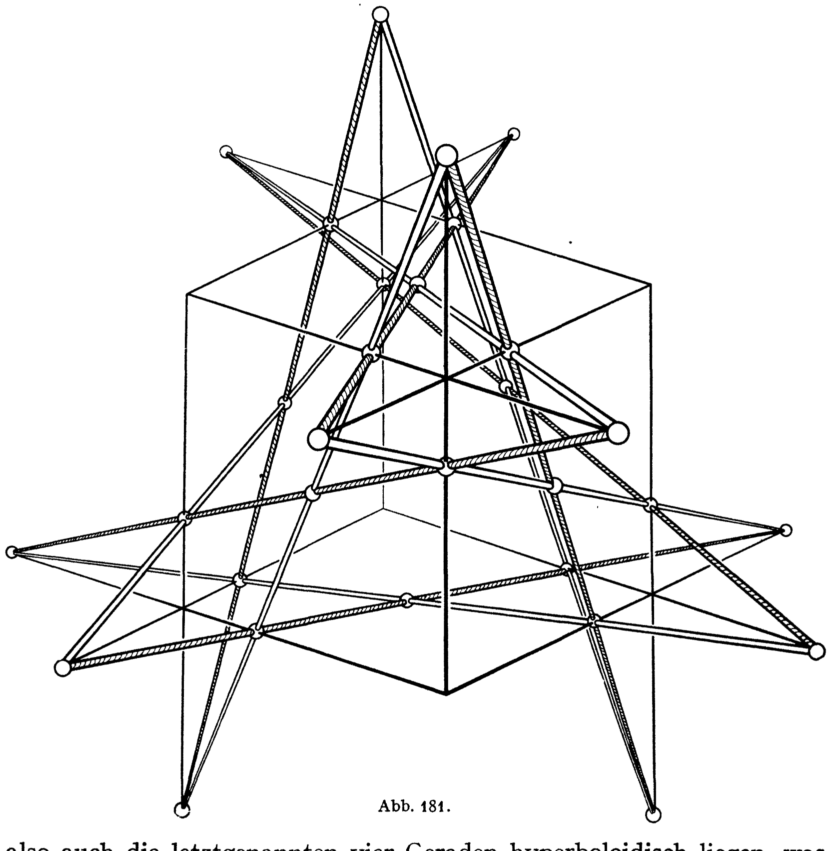

Abb. 181.

also auch die letztgenannten vier Geraden hyperboloidisch liegen, was unserer Konstruktion widerspricht. Es gibt demnach höchstens zwei mit 2, 3, 4, 5 incidente Geraden. Nun sind 2, 3, 4, 5 nach unserer Konstruktion sämtlich mit $6'$ incident. Ich bezeichne die zweite mit 2, 3, 4, 5 incidente Gerade mit $1'$ und behaupte, daß $1'$ nicht mit $6'$ zusammenfällt und überdies auch 6 schneidet. Nach dieser sogleich zu beweisenden Behauptung vervollständigt sich Abb. 179 zu dem in Abb. 180 dargestellten Schema. Dieses Schema stellt die Doppelsechs dar. Man erkennt unmittelbar, daß es sich um eine reguläre Konfiguration handelt, ihr Punkt-Geraden-Schema ist $(30_2, 12_5)$. Man kann die Doppelsechs in besonders übersichtlicher und symmetrischer Lage konstuieren, indem man auf jede der sechs Seitenflächen eines Würfels je eine Gerade jedes Sextupels in geeigneter Weise legt. Aus Abb. 181 dürfte die Anordnung ohne weiteres verständlich sein (vgl. auch Abb. 102, S. 83).

Wir haben nun die soeben ausgesprochene Behauptung zu beweisen, daß es eine von 6′ verschiedene, mit 2, 3, 4, 5 incidente Gerade 1′ gibt, und daß diese Gerade von selbst auch noch 6 trifft. Nehmen wir zunächst den ersten Teil der Behauptung als bewiesen an. Wir wollen dann zeigen, daß 1′ mit 6 incident ist. Zu diesem Zweck zeichnen wir auf der Geraden 1 vier Punkte und auf den Geraden 2′ bis 6′ je drei Punkte, also im ganzen neunzehn Punkte aus, wobei wir aber die Schnittpunkte der genannten Geraden vermeiden wollen. Nach den Ausführungen des vorigen Abschnitts läßt sich durch diese neunzehn Punkte eine Fläche dritter Ordnung F_3 legen. Nun hat F_3 mit der Geraden 1 vier Punkte gemein, muß also diese Gerade ganz enthalten. Mit jeder der Geraden 2′ bis 6′ hat F_3 ebenfalls vier Punkte, nämlich die ausgewählten drei Punkte und den (davon verschiedenen) Schnittpunkt mit 1 gemein, somit enthält F_3 auch 2′ bis 6′. Daraus wiederum folgt, daß F_3 auch 2 bis 6 enthält, denn jede dieser Geraden trifft vier in der Fläche verlaufende Geraden. Aus demselben Grunde muß F_3 endlich auch 1′ enthalten. Nehmen wir nun an, 1′ wäre mit 6 nicht incident, dann betrachten wir die Gerade g, die ebenso wie 5′ mit den vier Geraden 2, 3, 4, 6 incidiert. Wir schließen wieder, wie bei Konstruktion von 1′, den Fall, daß g mit 5′ zusammenfällt, zunächst aus. g kann mit 1′ nicht zusammenfallen, weil wir angenommen haben, daß 1′ mit 6 nicht incidiert. g ist eine in F_3 verlaufende Gerade, weil g vier in F_3 verlaufende Geraden, nämlich 2, 3, 4, 6 trifft. Wir betrachten nun das Geradenquadrupel g, 1′, 5′, 6′. Alle diese Geraden treffen gemäß unserer Konstruktion die drei Geraden 2, 3, 4. Das Quadrupel ist also hyperboloidisch. Ich behaupte, das zugehörige Hyperboloid ist ganz in F_3 enthalten; dies folgt einfach daraus, daß jede mit g, 1′, 5′, 6′ incidente Gerade ganz auf F_3 verläuft. Die Gesamtheit solcher Geraden überstreicht aber das fragliche Hyperboloid.

Man kann nun leicht algebraisch beweisen, daß eine Fläche dritter Ordnung, die eine Fläche zweiter Ordnung vollständig enthält, notwendig aus dieser und einer Ebene bestehen muß. Sind nämlich $G = 0$ bzw. $H = 0$ die Gleichungen der Fläche dritter bzw. zweiter Ordnung, so muß das Polynom dritten Grades G durch das Polynom zweiten Grades H teilbar sein, und das ist nur möglich, wenn G das Produkt von H mit einem linearen Ausdruck ist. Daß nun die von uns durch neunzehn Punkte bestimmte Fläche F_3 einen solchen Ausartungsfall darstellen sollte, führt leicht auf einen Widerspruch. Da nämlich unter den Geraden 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ keine vier hyperboloidischen vorkommen, so könnten höchstens drei von ihnen auf dem zu F_3 gehörigen Hyperboloid liegen, und mindestens zwei von ihnen müßten dem anderen Bestandteil von F_3, einer Ebene, angehören und somit incident sein, was unserer Konstruktion widerspricht.

Der Beweisgang bleibt im wesentlichen ungeändert, wenn wir die bisher ausgeschlossene Möglichkeit in Betracht ziehen, daß $1'(2345)$ mit $6'$, oder $g(2346)$ mit $5'$ zusammenfällt. Auch in diesem Fall kann man schließen, daß das von 2, 3, 4 bestimmte Hyperboloid in F_3 liegen müßte. Der Grenzübergang, der diesen Fall aus dem allgemeinen ableitet, kann aber nur auf algebraischem Wege gerechtfertigt werden.

Wir haben beim Beweis der letzten Incidenz $(1'6)$ der Doppelsechs die auch an sich interessante Tatsache benutzt, daß durch diese Konfiguration stets eine Fläche dritter Ordnung F_3 hindurchgeht. Man kann nun die Konfiguration leicht durch mehrere weitere Geraden ergänzen, die ebenfalls sämtlich auf F_3 verlaufen. Wir betrachten z. B. die Ebene, die von den incidenten Geraden 1, $2'$ aufgespannt wird, und ebenso die Ebene von $1'$ und 2, und nennen (12) die Schnittgerade dieser Ebenen. Dann ist diese Gerade mit den vier Geraden 1, $1'$, 2, $2'$ incident, die sämtlich in F_3 liegen. Demnach liegt auch (12) in F_3. Es gibt im ganzen fünfzehn Geraden, die zur Doppelsechs in analoger Beziehung stehen wie (12), und die deswegen auch alle auf F_3 verlaufen. Man kann nämlich aus den Ziffern 1 bis 6 genau fünfzehn verschiedene Paare bilden. Somit haben wir im ganzen $2 \cdot 6 + 15 = 27$ Geraden aufgefunden, die alle auf F_3 verlaufen.

Zwischen den Geraden dieser erweiterten Konfiguration bestehen nun noch weitere Incidenzbeziehungen. Es läßt sich nämlich zeigen, daß von den mit zwei Ziffern bezeichneten Geraden alle und nur die miteinander incident sind, deren Symbole in keiner Ziffer übereinstimmen. Der Beweis läßt sich auf denselben Gedankengang stützen, aus dem wir die Incidenz von $1'$ mit 6 hergeleitet haben; er sei hier nur angedeutet. Aus Symmetriegründen genügt es, zu zeigen, daß (12) mit (34) incidiert. Zum Beweis betrachte ich die drei Geraden $1, 2, (34)$. Dieses Tripel wird von $3'$ und $4'$ getroffen. Wäre nun (12) nicht mit (34) incident, so gäbe es eine Gerade a, die das Quadrupel 1, 2, $1'$, (34) träfe, und eine notwendig von a verschiedene Gerade b, die 1, 2, $2'$, (34) träfe. Fiele nämlich a mit b zusammen, so träfe diese Gerade das Quadrupel 1, 2, $1'$, $2'$, wäre also mit (12) identisch, und diese selbe Gerade träfe überdies (34), was wir vorläufig nicht annehmen. Ebenso sind a, b verschieden von $3'$ oder $4'$, denn fiele z. B. a mit $3'$ zusammen, so wäre $3'$ incident mit $1'$ entgegen unserer Konstruktion. a und b müßten nun ebenso wie $3'$ und $4'$ auf F_3 verlaufen, und diese vier Geraden würden, weil sämtlich mit dem Tripel 1, 2, (34) incident, hyperboloidisch liegen. Daß aber F_3 ein hyperboloidisches Geradenquadrupel enthält, haben wir schon als unmöglich erkannt. Demnach ist (12) in der Tat incident mit (34) und aus entsprechenden Gründen mit (35), (36), (45), (46), (56). Da (12) auch mit 1, 2, 1', 2' incidiert, so ist (12) und ebenso jede andere mit zwei Ziffern bezeichnete Gerade der erweiterten Konfiguration mit zehn Konfigurationsgeraden incident. Das gleiche gilt auch von den Geraden der Doppelsechs selbst, z. B. incidiert 1 mit den fünf Geraden 2' bis 6' und mit den fünf Geraden (12), (13), (14), (15), (16). Die Konfiguration der siebenundzwanzig Geraden von F_3 hat demnach das Schema $(135_2, 27_{10})$. Daß genau hundertfünfunddreißig Punkte zur Konfiguration gehören, folgt aus der Relation $135 \cdot 2 = 27 \cdot 10$. Man kann übrigens auch zeigen, daß die Konfiguration regulär ist, daß man daher aus ihr auf viele verschiedene Arten Doppelsechsen herausgreifen kann. Nimmt man noch die Ebenen hinzu, die zwei incidente Konfigurationsgeraden enthalten, so enthält eine solche Ebene stets eine dritte Konfigurationsgerade, wie man an dem Incidenzschema verifizieren kann. Zum selben Resultat führt auch eine einfache algebraische Überlegung. Jede Ebene trifft nämlich F_3 notwendig in einer Kurve dritter Ordnung. Diese Kurve muß, falls die Ebene durch zwei Konfigurationsgeraden geht, natürlich diese Geraden enthalten, und daraus läßt sich algebraisch schließen, daß die Kurve aus diesen beiden und einer dritten Geraden bestehen muß. Man kann leicht abzählen, daß durch jede der siebenundzwanzig Geraden fünf solche Ebenen gehen und daß es im ganzen fünfundvierzig solche Ebenen gibt. Die Konfiguration ist also nicht selbstdual, während die Doppelsechs selbstdual ist, da sie auf der dualinvarianten Beziehung der Geradenincidenz aufgebaut ist. Man kann die Doppelsechs leicht zu einer Konfiguration erweitern, die zur soeben konstruierten dual ist. Man hat dann statt der Geraden (12) und den übrigen Geraden (ik) andere Geraden $[ik]$ hinzuzunehmen, von denen z. B. [12] durch die Schnittpunkte von 1 mit 2' und von 1' mit 2 geht. Das Schema der so entstehenden Konfiguration ist $(35_3, 27_5)$.

Wir wenden uns wieder zur ursprünglichen Konfiguration der siebenundzwanzig Geraden und wollen jetzt durch abzählende Methoden zeigen, daß auf jeder beliebigen Fläche dritter Ordnung F_3 eine solche Konfiguration K liegt. Dabei müssen, wie immer bei abzählenden Betrachtungen, auch Fälle in Betracht gezogen werden, in denen K teilweise imaginär wird oder ausartet. Zum Beweise unserer Behauptung zählen wir zunächst ab, wie groß die Mannigfaltigkeit der Doppelsechsen ist. Gemäß unserer Konstruktion haben wir für die Gerade 1 volle Freiheit, also vier Parameter, die Schnittpunkte von 1 mit 2' bis 6' hängen von fünf weiteren Parametern ab, und jede der Geraden 2' bis 6' kann, wenn der Schnittpunkt mit 1 festgehalten wird, noch ∞^2 Lagen annehmen (zehn Parameter). Durch die Geraden 1, 2', 3', 4', 5', 6' ist die Doppelsechs festgelegt. Wir finden also, daß es ∞^{19} Doppelsechsen gibt $(19 = 4 + 5 + 10)$. Ebenso groß ist die Mannigfaltigkeit der Konfigurationen K, denn jede ist durch eine zugehörige Doppelsechs festgelegt, und es gibt natürlich nur endlich viele Doppelsechsen in einer und derselben Konfiguration K. Nun haben wir ein Verfahren angegeben, um durch jede Konfiguration K eine F_3 zu legen. Die Mannigfaltigkeit der so konstruierten Flächen F_3 beträgt demnach entweder ∞^{19}, oder falls die Mannigfaltigkeit geringer sein sollte, müßten mindestens ∞^1 Konfigurationen K auf einer und derselben Fläche F_3 liegen, d. h. F_3 müßte eine Regelfläche dritter Ordnung sein. Nun kann man jedoch zeigen, daß es weniger als ∞^{18} Regelflächen dritter Ordnung gibt; demnach müßten mindestens ∞^2 Doppelsechsen auf den von uns konstruierten F_3 liegen. Da aber diese, wie schon ausgeführt wurde, kein Hyperboloid enthalten, und da auf Regelflächen höherer als zweiter Ordnung nur eine Regelschar verläuft, so können unmöglich ∞^2 Doppelsechsen auf einer solchen F_3 Platz finden. Im allgemeinen können also die von uns konstruierten Flächen keine Regelflächen sein, und daraus folgt, daß wir nicht weniger als ∞^{19} Flächen durch unsere Konstruktion erfaßt haben. Andererseits gibt es, wie im vorigen Abschnitt erwähnt, überhaupt nicht mehr als ∞^{19} Flächen dritter Ordnung. Hieraus läßt sich mit Rücksicht auf die algebraische Natur der von uns betrachteten Gebilde streng schließen, daß auf jeder Fläche dritter Ordnung tatsächlich eine Konfiguration K verläuft.

Viertes Kapitel.

Differentialgeometrie.

Bisher haben wir geometrische Gebilde in ihrer Gesamtstruktur betrachtet. Die Differentialgeometrie stellt ein prinzipiell anderes Verfahren der Forschung dar. Wir wollen nämlich jetzt Kurven und Flächen zunächst nur in der unmittelbaren Umgebung irgendeines ihrer Punkte beschreiben. Zu diesem Zweck vergleichen wir diese Umgebung mit einem möglichst einfachen Gebilde, etwa einer Geraden, einer Ebene, einem Kreis oder einer Kugel, die sich der Kurve in der betrachteten Umgebung möglichst eng anschmiegt; so entsteht z. B. der bekannte Begriff der Tangente einer Kurve in einem Punkt.

Diese Betrachtungsweise, lokale Differentialgeometrie oder Differentialgeometrie im kleinen genannt, wird durch ein anderes wichtiges Prinzip, die Differentialgeometrie im großen, vervollständigt. Wenn wir nämlich von einem stetigen geometrischen Gebilde wissen, daß es in der Umgebung *jedes* seiner Punkte irgendeine bestimmte differentialgeometrische Eigenschaft hat, so können wir in der Regel auch über den Gesamtverlauf des Gebildes wesentliche Aussagen machen. Wenn man z. B. von einer ebenen Kurve weiß, daß sie in der Umgebung