

## **Werk**

**Titel:** Anschauliche Geometrie

**Autor:** Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

**Verlag:** Springer

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN379425343

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

**LOG Id:** LOG\_0037

**LOG Titel:** Viertes Kapitel. Differentialgeometrie.

**LOG Typ:** chapter

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

gelegt, und es gibt natürlich nur endlich viele Doppelsechsen in einer und derselben Konfiguration  $K$ . Nun haben wir ein Verfahren angegeben, um durch jede Konfiguration  $K$  eine  $F_3$  zu legen. Die Mannigfaltigkeit der so konstruierten Flächen  $F_3$  beträgt demnach entweder  $\infty^{19}$ , oder falls die Mannigfaltigkeit geringer sein sollte, müßten mindestens  $\infty^1$  Konfigurationen  $K$  auf einer und derselben Fläche  $F_3$  liegen, d. h.  $F_3$  müßte eine Regelfläche dritter Ordnung sein. Nun kann man jedoch zeigen, daß es weniger als  $\infty^{18}$  Regelflächen dritter Ordnung gibt; demnach müßten mindestens  $\infty^2$  Doppelsechsen auf den von uns konstruierten  $F_3$  liegen. Da aber diese, wie schon ausgeführt wurde, kein Hyperboloid enthalten, und da auf Regelflächen höherer als zweiter Ordnung nur eine Regelschar verläuft, so können unmöglich  $\infty^2$  Doppelsechsen auf einer solchen  $F_3$  Platz finden. Im allgemeinen können also die von uns konstruierten Flächen keine Regelflächen sein, und daraus folgt, daß wir nicht weniger als  $\infty^{19}$  Flächen durch unsere Konstruktion erfaßt haben. Andererseits gibt es, wie im vorigen Abschnitt erwähnt, überhaupt nicht mehr als  $\infty^{19}$  Flächen dritter Ordnung. Hieraus läßt sich mit Rücksicht auf die algebraische Natur der von uns betrachteten Gebilde streng schließen, daß auf jeder Fläche dritter Ordnung tatsächlich eine Konfiguration  $K$  verläuft.

#### Viertes Kapitel.

### Differentialgeometrie.

Bisher haben wir geometrische Gebilde in ihrer Gesamtstruktur betrachtet. Die Differentialgeometrie stellt ein prinzipiell anderes Verfahren der Forschung dar. Wir wollen nämlich jetzt Kurven und Flächen zunächst nur in der unmittelbaren Umgebung irgendeines ihrer Punkte beschreiben. Zu diesem Zweck vergleichen wir diese Umgebung mit einem möglichst einfachen Gebilde, etwa einer Geraden, einer Ebene, einem Kreis oder einer Kugel, die sich der Kurve in der betrachteten Umgebung möglichst eng anschmiegt; so entsteht z. B. der bekannte Begriff der Tangente einer Kurve in einem Punkt.

Diese Betrachtungsweise, lokale Differentialgeometrie oder Differentialgeometrie im kleinen genannt, wird durch ein anderes wichtiges Prinzip, die Differentialgeometrie im großen, vervollständigt. Wenn wir nämlich von einem stetigen geometrischen Gebilde wissen, daß es in der Umgebung *jedes* seiner Punkte irgendeine bestimmte differentialgeometrische Eigenschaft hat, so können wir in der Regel auch über den Gesamtverlauf des Gebildes wesentliche Aussagen machen. Wenn man z. B. von einer ebenen Kurve weiß, daß sie in der Umgebung

keines ihrer Punkte ganz auf einer Seite ihrer Tangente liegt, so läßt sich zeigen, daß die Kurve notwendig eine Gerade sein muß.

Neben den stetigen Mannigfaltigkeiten von Punkten werden in der Differentialgeometrie auch Mannigfaltigkeiten anderer Gebilde, z. B. Mannigfaltigkeiten von Geraden, betrachtet; Probleme dieser Art stellt uns unter anderem die geometrische Optik, die stetige Systeme von Lichtstrahlen untersucht.

Endlich führt die Differentialgeometrie auf das von GAUSS und RIEMANN zuerst erfaßte Problem, die Geometrie als Ganzes durch Begriffe und Axiome aufzubauen, die nur die unmittelbare Umgebung jedes Punkts betreffen. So entstand eine bis heute noch nicht erschöpfte Fülle von Möglichkeiten allgemeinerer Geometrien, von denen die „nicht-euklidische Geometrie“ ein wichtiges, aber nur höchst spezielles Beispiel bildet. Die allgemeine Relativitätstheorie hat uns gelehrt, daß der sinn-gemäßen Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit nicht die gewöhnliche euklidische Geometrie, sondern eine allgemeinere RIEMANNsche Geometrie zugrunde gelegt werden muß.

## § 26. Ebene Kurven.

Um mit dem Einfachsten zu beginnen, betrachten wir zunächst ebene Kurven. Wir beschränken uns dabei auf ein kleines Stück der Kurve, in dem sie sich nicht selbst durchschneidet.

Eine Gerade, die die Kurve in zwei Punkten schneidet, heißt Sekante der Kurve. Drehen wir nun eine Sekante  $s$  so um einen ihrer Schnittpunkte, daß der andere Schnittpunkt immer näher an den ersten heran-

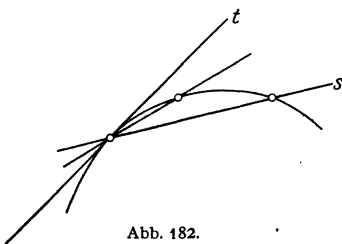


Abb. 182.

rückt (Abb. 182), so nähert sich die Sekante einer bestimmten Lage  $t$ . Die Gerade, die diese Lage einnimmt, heißt Tangente der Kurve. Der festgehaltene Punkt heißt der Berührungspunkt dieser Tangente. Offenbar ist die Tangente diejenige Gerade durch den Berührungspunkt, die dort den Verlauf der Kurve am genauesten annähert; als Richtung

einer Kurve in einem Punkt bezeichnet man deshalb die Richtung der zugehörigen Tangente. Man sagt, daß zwei Kurven sich in einem gemeinsamen Punkt unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden bzw. sich berühren, wenn die beiden Tangenten in diesem Punkt den Winkel  $\alpha$  bilden bzw. zusammenfallen. Eine Gerade, die auf einer Tangente im Berührungspunkt senkrecht steht, heißt Normale der Kurve.

Tangente und Normale bilden für jeden Kurvenpunkt die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Dieses System ist besonders geeignet, das Verhalten der Kurve im betrachteten Punkt zu untersuchen. Ich gebe hierzu der Kurve willkürlich eine Durchlaufungsrich-

tung. Ferner nummeriere ich die vier Quadranten, in die das Achsenkreuz die Ebene zerlegt. Und zwar erhält die Nummer 1 (Abb. 183) derjenige Quadrant, in dem ich mich befinde, wenn ich auf der Kurve im festgesetzten Sinne dem Nullpunkt des Systems zuwandere und ihm hinreichend nahe bin; die Nummern 2, 3, 4 erhalten die anderen Quadranten; und zwar soll stets die Tangente die Quadranten 1, 2 von den Quadranten 3, 4, und die Normale die Quadranten 1, 4 von den Quadranten 2, 3 trennen. Ich kann dann vier verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem ich mich im zweiten, dritten, vierten oder ersten Quadranten befinde, wenn ich auf der Kurve im festgesetzten Sinne den Nullpunkt gerade verlassen habe (I bis IV in Abb. 183). Nur im ersten Fall heißt der betrachtete Kurvenpunkt regulär, in den übrigen Fällen singulär. Das reguläre Verhalten zeigen nämlich fast alle Kurvenpunkte, während die singulären Fälle nur an einzelnen getrennten Stellen auftreten können<sup>1</sup>. Im Fall II spricht man von einem Wendepunkt, in den beiden letzten Fällen sagt man, daß die Kurve eine Hellebardenspitze bzw. eine Schnabelspitze hat, und nennt den Punkt einen Rückkehrpunkt der Kurve. Schließlich erkennt man, daß unsere Fallunterscheidung unabhängig

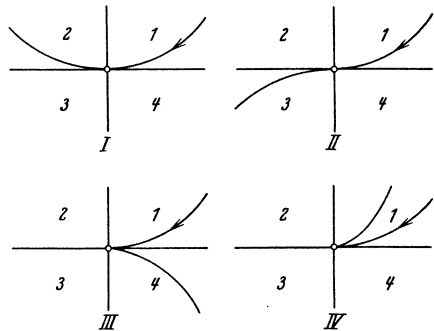


Abb. 183.

Fallunterscheidung unabhängig

davon ist, in welcher Richtung die Kurve durchlaufen wird.

Wir wollen uns nun ein Bild davon machen, in welcher Weise sich in diesen vier Arten von Kurvenpunkten die Tangentenrichtung ändert, wenn man den Punkt auf der Kurve durchläuft. Hierzu benutzen wir ein Verfahren, das zuerst GAUSS angegeben hat und das besonders bei der Untersuchung von Flächen eine grundlegende Rolle spielt. Wir stellen die Kurve wieder mit einer Durchlaufungsrichtung aus. Dann zeichnen wir in der Kurvenebene einen Kreis vom Radius 1. Wir lassen nun (Abb. 184) jeder Kurventangente denjenigen Halbstrahl entsprechen, der vom Kreismittelpunkt parallel der betrachteten Tangente ausläuft, und zwar in der Durchlaufungsrichtung der Kurve. Diese Konstruktion ordnet jedem Kurvenpunkt  $P$  einen Punkt  $Q$  des Kreises zu, nämlich den Durchstoßpunkt des Halbstrahls mit der Kreisperipherie. Bei dieser Abbildung nennt man die Punkte des Kreises

<sup>1</sup> Einzig für die Gerade gilt diese Behauptung nicht, auf sie ist auch das eben angegebene Verfahren nicht anwendbar. — Von einem höheren Standpunkt aus kann auch der Fall I singulären Charakter annehmen, wenn nämlich dort der Krümmungskreis in eine Gerade oder einen Punkt ausartet; vgl. S. 157.



das „Tangentenbild“ der Kurve. Da der Kreisradius stets auf der zugehörigen Kreistangente senkrecht steht, ist die Kurventangente stets parallel der Normalen des Tangentenbildes, während umgekehrt die Tangenten des Tangentenbildes den Kurvennormalen parallel sind.

Die GAUSSSCHE Abbildung ordnet zwar jedem Kurvenpunkt genau einen Kreispunkt zu, aber umgekehrt entspricht ein Kreispunkt gewöhnlich nicht einem, sondern mehreren Kurvenpunkten; nämlich allen, die parallele und gemäß einem festgesetzten Durchlaufungssinn gleichgerichtete Tangenten haben ( $P_1$  und  $P_3$  in Abb. 184).

Ich lasse nun einen Kurvenpunkt die in Abb. 183 gezeichneten Stellen durchlaufen. Dann kehrt er dort in den Fällen III und IV seine Richtung um, während er sie in den Fällen I und II beibehält. Ferner betrachte ich das Verhalten des im Tangentenbild zugeordneten Punktes.

Dieser behält in den Fällen I und III seine Richtung und kehrt in den Fällen II und IV um. In der Tat sind in den Fällen II und IV in der Umgebung der betrachteten Stelle parallele und gleichgerichtete Tangenten vorhanden, in den anderen beiden Fällen nicht. Da die Richtung, in der sich der Punkt des Tangentenbildes bewegt, mir ein

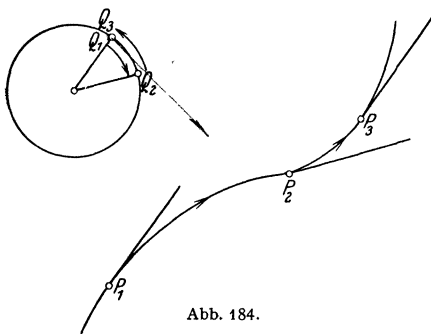


Abb. 184.

Abbild der Richtungsänderung der Kurventangente gibt, kann ich die vier Arten von Kurvenpunkten folgendermaßen charakterisieren:

I regulärer Punkt: Kurvenpunkt und Tangentenbild laufen im selben Sinne weiter;

II Wendepunkt: der Kurvenpunkt läuft weiter, während das Tangentenbild umkehrt;

III Hellebardenspitze: der Kurvenpunkt kehrt um, während das Tangentenbild weiterläuft;

IV Schnabelspitze: Kurvenpunkt und Tangentenbild kehren um.

Diese Fallunterscheidung ist nicht erschöpfend. Auch wenn wir uns auf Kurvenstücke beschränken, die eine einfache analytische Darstellung gestatten, so kommen noch drei weitere Möglichkeiten hinzu: Die „Doppelpunkte“, in denen die Kurve sich selbst durchschneidet, ferner Punkte, in denen eine Kurve plötzlich endet; endlich kann eine Kurve auch „isolierte“, d. h. von allen übrigen Kurvenpunkten völlig getrennte Punkte besitzen (vgl. S. 176). Merkwürdigerweise gibt es andere anschaulich einfache Vorkommnisse, z. B. Knickstellen mit von Null verschiedenem Winkel, die eine verhältnismäßig komplizierte analytische Darstellung erfordern.

Wir kommen jetzt zur Einführung der *Krümmung*, die für die ganze Kurven- und Flächentheorie von grundlegender Wichtigkeit ist. Sie steht, wie wir im folgenden sehen werden, in engem Zusammenhang mit der GAUSSSchen Tangentenabbildung. Ich ziehe in zwei benachbarten Kurvenpunkten  $P_1$  und  $P_2$  die Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  und die Normalen  $n_1$  und  $n_2$ ; der Schnittpunkt der beiden Normalen sei  $M$  (Abb. 185). Offenbar ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten gleich dem Winkel zwischen den beiden Normalen

$$\sphericalangle(t_1 t_2) = \sphericalangle(n_1 n_2).$$

Ich lasse nun  $P_2$  auf der Kurve immer näher an  $P_1$  heranrücken und betrachte dabei den Quotienten jenes Winkels mit der Entfernung der beiden Kurvenpunkte. Der Quotient nähert sich im allgemeinen einem Grenzwert

$$\lim_{P_1 P_2 \rightarrow 0} \frac{\sphericalangle(n_1 n_2)}{P_1 P_2} = k.$$

Dieser Grenzwert  $k$  heißt die Krümmung der Kurve im Punkt  $P_1$ .

$k$  ist gleich dem Reziproken der Strecke  $r$ , in die beim Grenzübergang die beiden Normalenabschnitte  $MP_1$  und  $MP_2$  zusammenfallen. Das ergibt sich aus folgender Umformung, deren analytische Rechtfertigung wir allerdings übergehen:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{P_1 P_2 \rightarrow 0} \frac{\sphericalangle(n_1 n_2)}{P_1 P_2} = \lim_{P_1 P_2 \rightarrow 0} \frac{\sin(n_1 n_2)}{P_1 P_2} = \lim_{P_1 P_2 \rightarrow 0} \frac{P_1 P_2}{MP_1 \cdot P_1 P_2} \\ &= \lim_{P_1 P_2 \rightarrow 0} \frac{1}{MP_1} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Auf die Größe  $r$  werden wir noch auf eine andere Weise geführt. Wir legen einen Kreis durch  $P_1$  und zwei benachbarte Punkte auf der Kurve. Wenn wir dann die beiden Nachbarpunkte auf der Kurve gegen  $P_1$  rücken lassen, nähert sich der Kreis einer Grenzlage. Wie man es aus der Konstruktion erwarten kann und wie eine analytische Betrachtung bestätigt, ergibt sich als Grenzlage gerade der Kreis durch  $P_1$ , der die Grenzlage des Normalenschnittpunkts  $M$  zum Mittelpunkt, also  $r$  als Radius hat. Man nennt diesen Kreis den Krümmungskreis der Kurve in  $P_1$ , seinen Mittelpunkt den Krümmungsmittelpunkt und seinen Radius  $r$  den Krümmungsradius. Der angegebenen Konstruktion wegen pflegt man zu sagen, daß der Krümmungskreis drei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat. Ebenso sagt man, die Tangente hat mit der Kurve zwei zusammenfallende Punkte gemein.

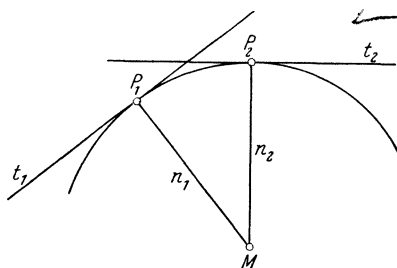


Abb. 185.

Der Krümmungskreis kann auf eine zweite Art bestimmt werden. Ich betrachte alle Kreise durch einen Kurvenpunkt  $P$  (Abb. 186), die die Kurve in  $P$  berühren, deren Mittelpunkte also auf der zugehörigen Kurvennormalen liegen. Durch die Kurve wird die Ebene in der Umgebung von  $P$  in zwei Teile zerlegt, die wir die beiden Seiten des Kurvenstücks nennen wollen. Von den betrachteten Kreisen werden

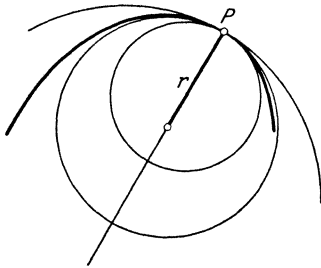


Abb. 186.

in der Umgebung von  $P$  einige ganz auf der einen Seite, andere ganz auf der anderen Seite verlaufen. Der Krümmungskreis, dessen Radius  $r$  sein möge, besitzt nun im allgemeinen die Eigenschaft, diese beiden Arten von Kreisen zu trennen, und zwar so, daß alle Kreise, deren Radien größer sind als  $r$ , auf der einen Seite, und alle Kreise, deren Radien kleiner sind als  $r$ , auf der anderen Seite

der Kurve verlaufen. Der Krümmungskreis selbst verläuft in der Regel zu beiden Seiten der Normalen auf verschiedenen Seiten der Kurve, d. h. er durchsetzt die Kurve im Berührungspunkt. Punkte, in denen der Krümmungskreis die Kurve nicht durchsetzt, können ebenso wie die singulären Punkte nur an getrennten einzelnen Stellen der Kurve auftreten. Ein Beispiel bilden die vier Scheitel der Ellipse (Abb. 187). Es ist aus Symmetriegründen klar, daß dort eine Durchdringung nicht möglich ist. Das gleiche gilt allgemein von allen Kurvenpunkten, in

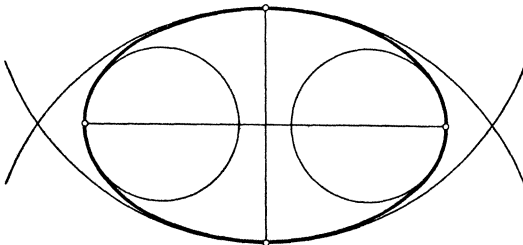


Abb. 187.

denen die Kurve von einer Symmetrieachse geschnitten wird.

Daß der Krümmungskreis die Kurve gewöhnlich durchsetzt, wird aus seiner ersten Herleitung plausibel. Eine Kurve wird nämlich von einem Kreis,

der durch einen ihrer Punkte geht, im allgemeinen dort durchsetzt. Aus diesem Grunde wird ein Kreis, der durch drei benachbarte Kurvenpunkte läuft, im ersten Punkt von der Seite  $A$  zur Seite  $B$ , im zweiten Punkt von der Seite  $B$  zur Seite  $A$ , im dritten von  $A$  zu  $B$  übergehen; wenn die drei Punkte zusammenrücken, wird sich an diesem Verhalten des Kreises gewöhnlich nichts ändern, so daß der Krümmungskreis in der Tat im Berührungspunkt von der einen Seite der Kurve zur anderen übergehen muß<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Aus analogen Gründen wird eine Kurve von der Tangente in der Regel nicht durchsetzt.

Wie schon erwähnt, steht die Krümmung in Zusammenhang mit der Tangentenabbildung. Es mögen den beiden Kurvenpunkten  $P_1$  und  $P_2$  die Tangentenbilder  $Q_1$  und  $Q_2$  entsprechen (Abb. 188). Dann ist

$$\sphericalangle(t_1 t_2) = \sphericalangle(Q_1 O Q_2) = \widehat{Q_1 Q_2},$$

der Krümmungsradius ist also der Grenzwert des Quotienten der Längen eines kleinen Kurvenbogens und seines Tangentenbildes.

Der Krümmungsradius kann für einzelne Punkte der Kurve unendlich werden; dann entartet der Krümmungskreis in eine Gerade, fällt also mit der Tangente zusammen. Die Tangente durchsetzt in einem solchen Punkt gewöhnlich die Kurve, wir haben es dann also mit einem Wendepunkt zu tun; es gibt jedoch Ausnahmefälle, in denen die Krümmung verschwindet und trotzdem die Kurve von ihrer Tangente nicht durchsetzt wird; das ist analog dem Verhalten des Krümmungskreises in den Scheiteln der Ellipse (vgl. S. 153, Fußnote).

Aus der Beziehung der Krümmung zur Tangentenabbildung ergibt sich ferner, daß im Fall der Hellebardenspitze die Krümmung in der Regel unendlich groß wird, daß

also dort der Krümmungskreis in seinen Berührungspunkt zusammenschrumpft. Für Schnabelspitzen läßt sich nichts Allgemeines aussagen.

Im Anschluß an die von uns aufgestellten Begriffe ergeben sich eine Reihe wichtiger Fragen. Z. B. liegt der Versuch nahe, eine Kurve dadurch zu bestimmen, daß man die Krümmung als Funktion der Bogenlänge vorgibt. Es ist plausibel und läßt sich analytisch beweisen, daß die Gestalt der Kurve dadurch eindeutig festgelegt ist und daß andererseits zu jeder solchen willkürlich vorgegebenen Funktion (unter gewissen Stetigkeitsannahmen) wirklich eine Kurve gehört. Diese Bestimmungsweise hat den Vorzug, daß sie sich nicht auf ein spezielles Koordinatensystem bezieht. Man nennt daher Bogenlänge und Krümmung die „natürlichen Parameter der Kurve“. Der einfachste Fall ist, daß die Krümmung  $k$  überall konstant ist. Das gilt für die Kreise vom Radius  $1/k$  und nach dem eben Gesagten nur für diese. Für  $k = 0$  erhalten wir die Geraden; Geraden und Kreise sind somit die einzigen ebenen Kurven konstanter Krümmung.

Ferner kann man durch mannigfache Verfahren aus einer Kurve eine zweite ableiten. So bildet z. B. die Gesamtheit der Krümmungsmittelpunkte eine neue Kurve, die die Evolute der ursprünglichen heißt. Geht man umgekehrt von der neuen Kurve aus, so heißt die ursprüng-

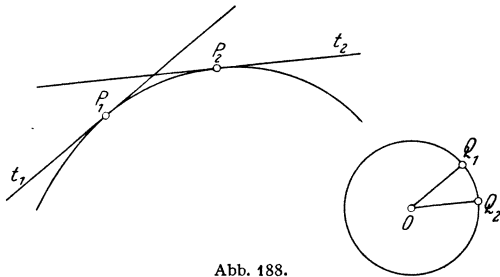


Abb. 188.

liche die Evolvente der neuen. Die Evolventen einer beliebigen Kurve kann man stets durch eine Fadenkonstruktion erhalten, indem man an die Kurve ein Fadenstück straff anlegt und im einen Endpunkt befestigt; der andere Endpunkt beschreibt dann ein Evolventenstück, wenn man den Faden abwickelt und im beweglichen Endpunkt stets straff hält. Die Evolventen des Kreises haben wir schon S. 6 in dieser Weise konstruiert. Warum zwischen Evolvente und Evolute stets diese eigenartige Beziehung besteht, werden wir im nächsten Kapitel (S. 243 und 244) erläutern.

## § 27. Raumkurven.

Die meisten Überlegungen des vorigen Abschnitts lassen sich auf den Raum übertragen.

So ergibt sich zunächst die Tangente wieder als Grenzlage der Sekante für zusammenrückende Schnittpunkte. Im Gegensatz zu den ebenen Kurven gibt es aber unendlich viele Lote auf der Tangente im Berührungspunkt. Diese erfüllen eine Ebene, die *Normalebene* des Kurvenpunkts.

Wir suchen jetzt eine Ebene, die die Kurve im betrachteten Punkt möglichst gut annähert. Wir legen zu diesem Zweck durch die Tangente des Punkts und durch einen benachbarten Kurvenpunkt eine Ebene und verfolgen deren Lageänderung, wenn wir den Nachbarpunkt auf der Kurve immer näher an den Berührungspunkt der festgehaltenen Tangente heranrücken. Die Grenzlage, der sich die Ebene dabei nähert, definiert die gesuchte Ebene, die *Schmiegungeebene* der Kurve im betrachteten Punkt. Die Schmiegungeebene hat im früher erläuterten Sinn drei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein. Aus diesem Grund durchdringt sie im allgemeinen die Kurve im Berührungspunkt, während alle übrigen Ebenen durch die Tangente die Kurve auf einer Seite lassen.

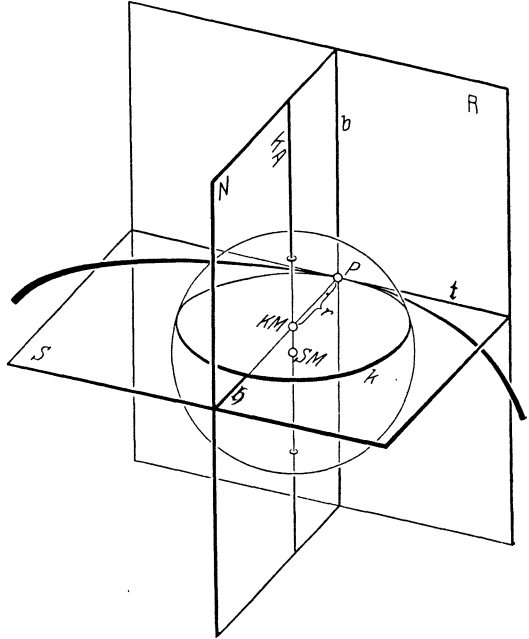
Da die Schmiegungeebene die Tangente enthält, steht sie auf der Normalebene senkrecht. Wir betrachten nun noch diejenige Ebene durch unseren Kurvenpunkt, die sowohl auf der Normalebene als auch auf der Schmiegungeebene senkrecht steht. Man nennt sie die *rektifizierende Ebene*.

Die drei genannten Ebenen kann man nun als Koordinatenebenen eines räumlichen cartesischen Systems auffassen, das zur Beschreibung des Kurvenverlaufs im betrachteten Punkt besonders geeignet ist. Die Tangente ist die eine Achse dieses Systems; die beiden anderen Achsen, die also in der Normalebene liegen, heißen Hauptnormale und Binormale; die Hauptnormale liegt in der Schmiegungeebene, die Binormale liegt in der rektifizierenden Ebene (Abb. 189). Man nennt diese drei Geraden, in ihrer Abhängigkeit vom Kurvenpunkt, das begleitende Dreikant der Kurve. Es entspricht dem System von Tangente und Normale bei den

ebenen Kurven. Im Raum bestimmt das Koordinatensystem nicht wie in der Ebene vier, sondern acht Gebiete. Mit Hilfe des begleitenden Dreikants kann ich also analog S. 153 acht Arten von Kurvenpunkten unterscheiden. Wiederum ist nur einer dieser Fälle regulär, die übrigen können (wenn die Kurve wirklich räumlich ist und nicht in einer Ebene verläuft) nur an getrennten Stellen eintreten. Im regulären Fall durchsetzt die Kurve die Schmiegungeebene und die Normalebene und bleibt auf einer Seite der rektifizierenden Ebene. Die Besprechung der übrigen Fälle soll hier nicht durchgeführt werden. Im übrigen können bei Raum-

Abb. 189.

- $P$  der betrachtete Kurvenpunkt,  
 $S$  Schmiegungeebene,  
 $N$  Normalebene,  
 $R$  Rektifizierende Ebene,  
 $t$  Tangente,  
 $\mathfrak{h}$  Hauptnormale,  
 $b$  Binormale,  
 $k$  Krümmungskreis,  
 $r$  Krümmungsradius,  
 $KA$  Krümmungsachse,  
 $KM$  Krümmungsmittelpunkt,  
 $SM$  Schmiegungekugelmittelpunkt.



kurven einfacher analytischer Struktur genau wie bei einer ebenen Kurve noch drei weitere Singularitäten eintreten, nämlich Doppelpunkte, Endpunkte und isolierte Punkte.

Wir verallgemeinern nun auch die GAUSSsche Abbildung auf den Raum. Zu diesem Zweck legen wir irgendeine Kugel vom Radius Eins zugrunde. Zu jeder Tangente der (mit einem Durchlaufungssinn versehenen) Kurve ziehen wir den gleichgerichteten Kugelradius. Seinen Endpunkt auf der Kugeloberfläche nennen wir das Tangentenbild des Kurvenpunkts. Der gesamten Kurve entspricht dann eine bestimmte Kurve auf der Kugeloberfläche. Geht man statt von der Tangente von der Haupt- oder Binormalen aus, so erhält man zwei weitere Kurven auf der Einheitskugel; diese drei „sphärischen Bilder“ stehen in bezug auf ihre Dreikante untereinander und mit der Ausgangs-

kurve in gewissen einfachen Beziehungen. Tangentenbild und Binormalenbild zusammen charakterisieren z. B. die erwähnten acht Typen von Kurvenpunkten. Es können nämlich auf der Kurve der Kurvenpunkt selbst, die Tangente und die Binormale entweder stetig weiterlaufen oder umkehren. Die Kombination der verschiedenen Möglichkeiten gibt gerade die acht Fälle.

Wir übertragen jetzt den Krümmungsbegriff auf die Raumkurven. Ich ziehe in zwei benachbarten Kurvenpunkten  $P_1$  und  $P_2$  die Tangenten  $t_1$  und  $t_2$ , und betrachte den Quotienten  $\sphericalangle(t_1 t_2)/P_1 P_2$ . Wenn  $P_2$  gegen  $P_1$  rückt, strebt dieser Quotient in der Regel gegen einen Grenzwert; dieser heißt die Krümmung der Kurve in  $P_1$ . In der Ebene steht die Krümmung in einer bestimmten Beziehung zu der Grenzlage des Schnittpunkts zweier Normalen. Die analoge Betrachtung im Raum liefert nicht einen Punkt, sondern eine Gerade. Man betrachtet nämlich die Schnittgerade benachbarter Normalebene und bezeichnet ihre Grenzlage als die Krümmungsachse der Kurve. Sie liegt in der Normalebene; wie der Grenzübergang ergibt, ist sie der Binormalen parallel (Abb. 189). Ihr Schnittpunkt mit der Hauptnormalen wird als Krümmungsmittelpunkt bezeichnet. Die Entfernung  $r$  dieses Punkts vom zugehörigen Kurvenpunkt heißt der Krümmungsradius; wie in der Ebene ist  $r$  gleich dem reziproken Wert der Krümmung. Legt man durch drei benachbarte Kurvenpunkte den Kreis und läßt die drei Punkte zusammenrücken, so erhält man als Grenzlage den Krümmungskreis; einen Kreis, der in der Schmiegungebene liegt und den Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius zum Mittelpunkt und Radius hat.

Zur GAUSSschen Tangentenabbildung steht die Krümmung in derselben Beziehung wie in der Ebene; der Krümmungsradius ist der Grenzwert des Quotienten zwischen einem kleinen Kurvenbogen und seinem Tangentenbild. Der Beweis verläuft wie in der Ebene.

Statt vom Winkel zweier Tangenten kann man auch vom Winkel zweier Schmiegungebenen oder, was dasselbe ist, vom Winkel zweier Binormalen ausgehen, wodurch man zu einem weiteren für die Theorie der Raumkurven wesentlichen Begriff gelangt. Man dividiert jenen Winkel durch den Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte und läßt dann diese zusammenrücken. Den Grenzwert  $t$  dieses Quotienten bezeichnet man als die Torsion oder auch als die „zweite Krümmung“ oder Windung im betrachteten Kurvenpunkt. Das Reziproke der Torsion ist offenbar der Grenzwert des Quotienten eines kleinen Kurvenbogens und seines Binormalenbildes.

Die Krümmung ließ sich aus einem Grenzübergang gewinnen, in dem drei benachbarte Kurvenpunkte auftraten. Um eine analoge Deutung der Torsion zu erhalten, muß man von vier benachbarten Punkten ausgehen. Durch vier Punkte ist im allgemeinen eine Kugel bestimmt. Man betrachtet nun die Grenzlage einer Kugel durch vier

benachbarte und zusammenrückende Kurvenpunkte. Die Kugel, die diese Grenzlage einnimmt, heißt Schmiegunngskugel. Wie der Grenzübergang ergibt, wird sie von der zugehörigen Tangente berührt, und ihr Mittelpunkt liegt auf der Krümmungssachse (Abb. 189). Für die Entfernung dieses Punkts vom Krümmungsmittelpunkt ergibt sich durch Rechnung der Wert  $\frac{1}{t} \cdot \frac{dr}{ds}$ , wobei  $ds$ ,  $dr$  die Differentiale der Bogenlänge und des Krümmungsradius bedeuten. Man kann ferner aus der Konstruktion schließen, daß die Schmiegunngskugel die Schmiegunngsebene gerade im Krümmungskreis durchsetzt. Für den Radius der Schmiegunngskugel erhält man daher nach dem pythagoreischen Lehrsatz den Wert

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2}}.$$

Wie in der Ebene die Größen  $s$  und  $r$ , so werden im Raum die Größen  $s$ ,  $r$ ,  $t$  als die natürlichen Parameter einer Kurve bezeichnet. Analog wie in der Ebene gilt im Raum der wichtige Satz: Die Gestalt einer Raumkurve läßt sich auf eine und nur eine Art so bestimmen, daß auf ihr  $r$  und  $t$  vorgegebene Funktionen von  $s$  werden. Verschwindet  $1/r$  identisch, so erhält man die Geraden. Identisches Verschwinden von  $t$  kennzeichnet die ebenen Kurven. Sind  $r$  und  $t$  konstant und von Null verschieden, so erhält man die Schraubenlinien.

Die Kurven auf der Kugel sind durch eine etwas kompliziertere Bedingung gekennzeichnet. Die Kugel, auf der die Kurve verläuft, muß nämlich offenbar für alle Kurvenpunkte zugleich Schmiegunngskugel sein. Also muß der oben berechnete Radius der Schmiegunngskugel konstant sein:

$$r^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2} = \text{const.}$$

Man kann analytisch beweisen, daß diese Bedingung auch hinreicht.

Andere auf Raumkurven bezügliche Fragen werden wir später bei der Flächentheorie erörtern.

## § 28. Die Krümmung auf Flächen. Elliptischer, hyperbolischer und parabolischer Fall. Krümmungslinien und Asymptotenlinien, Nabelpunkte, Minimalflächen, Affensättel.

Wir beschränken uns auf ein kleines Stück der Fläche, das sich nicht selbst durchdringt, und lassen die Randpunkte außer Betracht. Wir betrachten einen Flächenpunkt  $P$  und alle Kurven, die ganz in der Fläche verlaufen und durch  $P$  gehen. Merkwürdigerweise liegen alle Tangenten, die ich in  $P$  an diese Kurven ziehen kann, im allgemeinen in einer Ebene, die deshalb die Tangentialebene der Fläche in  $P$  genannt wird. Die Punkte, die eine Tangentialebene besitzen, heißen regulär,



die anderen singulär. Singuläre Punkte können nur einzelne Kurvenzüge auf der Fläche erfüllen.

Die Gerade, welche in einem regulären Flächenpunkt  $P$  auf dessen Tangentialebene senkrecht steht, heißt die Flächennormale in  $P$ . Als Normalenschnitte bezeichnet man die Schnittkurven der Fläche mit den durch eine Flächennormale gehenden Ebenen. Die Normalenschnitte eines regulären Punkts  $P$  sind in  $P$  entweder regulär oder haben in  $P$  einen Wendepunkt.

Es handelt sich jetzt darum, den Begriff der Krümmung auf die Flächen zu übertragen. Bei den Kurven war die Krümmung bezeichnend für die Abweichung der Kurve von ihrer Tangente im betrachteten Punkt. Analog fragen wir jetzt nach dem Verhalten einer Fläche zu ihren Tangentialebenen. Hier lassen sich nun anschaulich zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden, nämlich die Punkte konvexer und die

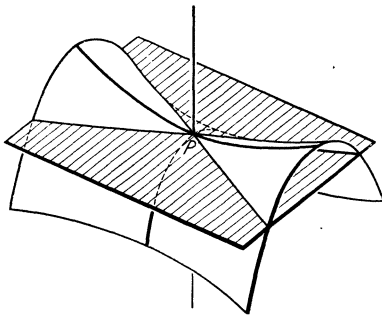


Abb. 190.

Punkte sattelförmiger Krümmung.

Ein Punkt konvexer Krümmung ist dadurch gekennzeichnet, daß seine Tangentialebene die Fläche (in der nächsten Umgebung des betrachteten Punkts) nicht schneidet, sondern ganz auf einer Seite läßt. Man kann also in einem derartigen Punkt die Fläche auf eine ebene Tischplatte auflegen. Beispiele für Flächen, die in allen ihren Punkten konvex sind, haben wir in der Kugel und im Ellipsoid kennengelernt.

Die Punkte konvexer Krümmung werden auch Punkte elliptischer Krümmung genannt.

Den Verlauf einer Fläche in einem Punkt sattelförmiger Krümmung können wir uns am leichtesten an einer Fläche klarmachen, die wie eine Paßhöhe im Gebirge aussieht (Abb. 190). Die Tangentialebene im höchsten Punkt  $P$  des Passes liegt horizontal; das Gebirge steigt rechts und links von  $P$  in die Höhe, während es vor und hinter diesem Punkt abfällt. Die Tangentialebene in  $P$  muß also die Fläche in einer Kurve treffen, die aus zwei sich in  $P$  schneidenden Ästen besteht (d. h. es gibt zwei horizontale Wege, die sich auf der Paßhöhe kreuzen). Dieses Verhalten der Tangentialebene ist für die Punkte sattelförmiger Krümmung charakteristisch, so daß ich also eine Fläche in einem derartigen Punkt nicht auf eine ebene Tischplatte legen kann. Beispiele für eine überall sattelförmig gekrümmte Fläche sind das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Die Punkte sattelförmiger Krümmung nennt man auch Punkte hyperbolischer Krümmung.

Der konvexe und der sattelförmige Typ werden durch einen Übergangsfall getrennt: die Punkte *parabolischer* Krümmung. Man erhält

also solche Punkte z. B. durch folgendes Verfahren: Man geht von zwei Flächenstücken  $F$  und  $G$  aus, die sich in einem Punkt  $P$  berühren, d. h. in  $P$  dieselbe Tangentialebene haben, und von denen  $F$  in  $P$  elliptisch, dagegen  $G$  hyperbolisch gekrümmt ist. Deformiert man nun  $F$  stetig derart, daß  $P$  und die zugehörige Tangentialebene sich nicht ändern und daß  $F$  schließlich in  $G$  übergeht, so nimmt die Fläche dazwischen einmal eine Gestalt an, für die  $P$  parabolischer Punkt ist. Senken wir z. B. in Abb. 190 die Gebirge zu beiden Seiten des Passes soweit, daß der Kamm des Gebirges gerade noch überall die horizontale Tangentialebene berührt, so ist  $P$  parabolischer Punkt. Denn wenn wir die Gebirge rechts und links noch weiter senken, so wird der frühere Paß zur Kuppe, also zu einem elliptischen Flächenpunkt. Dieses Beispiel liefert aber nicht alle Typen eines parabolischen Punkts. Es gibt im Gegenteil mehrere anschaulich ganz verschiedene Arten parabolischer Punkte, die wir später näher kennzeichnen werden (S. 175, 177, 179); auch solche, die sich nicht ohne weiteres als Übergangsfälle zwischen elliptischer und hyperbolischer Krümmung deuten lassen.

Um nun die Krümmung auch zahlenmäßig zu erfassen, kann man von den Krümmungen der Normalschnitte in einem Flächenpunkt  $P$  ausgehen. Der zu  $P$  gehörige Krümmungsmittelpunkt eines solchen Normalschnitts liegt stets auf der durch  $P$  gehenden Flächennormalen, denn diese ist in  $P$  Normale aller Normalschnitte. Ich erhalte nun der Reihe nach alle Normalschnitte, wenn ich eine durch die Flächennormale gehende Ebene um diese Normale drehe. Bei der Drehung wird der Krümmungsmittelpunkt in bestimmter Weise auf der Normalen wandern und mir dadurch ein Abbild der Krümmungseigenschaften des Flächenpunkts liefern.

Bei den elliptischen Punkten (Abb. 191) liegt der Krümmungsmittelpunkt stets auf einer und derselben Halbgeraden der Normalen. Im allgemeinen wird der Krümmungsradius bei der Drehung der Normalebene seinen Wert ändern und für einen bestimmten Normalschnitt  $s_1$  seinen größten Wert  $r_1$ , für einen anderen,  $s_2$ , seinen kleinsten Wert  $r_2$  annehmen.  $r_1$  und  $r_2$  heißen die Hauptkrümmungsradien der Fläche in  $P$ , die reziproken Werte  $k_1 = 1/r_1$  und  $k_2 = 1/r_2$  heißen die Hauptkrümmungen, die Tangentenrichtungen von  $s_1$  und  $s_2$  in  $P$  heißen die Krümmungsrichtungen. Es zeigt sich nun, daß diese Richtungen in einem regulären Punkt stets aufeinander senkrecht stehen und daß überdies die Krümmung jedes Normalschnitts durch die Hauptkrümmungen und den Winkel des Normalschnitts mit den Krümmungsrichtungen vollständig bestimmt ist.

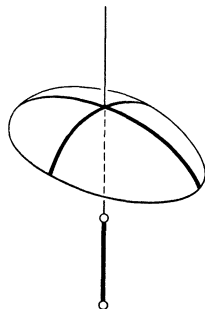


Abb. 191.

Bei den hyperbolischen Punkten (Abb. 192) ist der Ort des Krümmungsmittelpunkts nicht auf eine Halbgerade der Normalen beschränkt. Wenn nämlich der Normalenschnitt bei der als Paßhöhe gedeuteten Fläche durch die beiden Gebirge geht, liegt der Krümmungsmittelpunkt oberhalb des betrachteten Punkts  $P$ , wenn der Schnitt dagegen die beiden Einsenkungen trifft, liegt der Krümmungsmittelpunkt unterhalb  $P$ . Es gibt nun einen Normalenschnitt, dessen Krümmungsmittelpunkt oberhalb  $P$  liegt und dessen Krümmung  $k_1$  größer ist als bei allen anderen Normalenschnitten dieser Art. Wenn ich die Normalebene aus dieser Lage herausdrehe, wird die Krümmung stetig kleiner, der Krümmungsradius stetig größer. Wenn die Normalebene schließlich in die Richtung eines der beiden in Abb. 190 hervorgehobenen

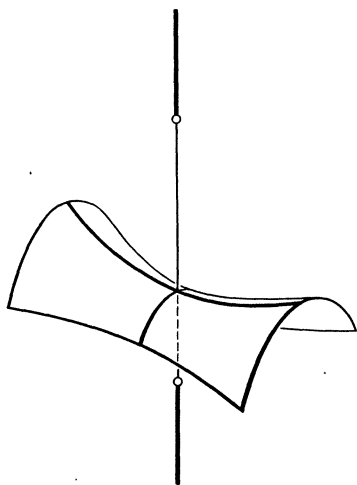


Abb. 192.

horizontalen Wege durch  $P$  fällt, wird die Krümmung Null, und der Krümmungsmittelpunkt entfernt sich nach oben ins Unendliche. Wenn ich noch weiter drehe, springt der Krümmungsmittelpunkt auf die untere Halbgerade der Normalen über und beginnt aus dem Unendlichen nach oben zu wandern, d. h. der Krümmungsradius nimmt ab und die Krümmung zu. Sie erreicht schließlich einen Wert  $k_2$ , der größer ist als die Krümmung aller übrigen Normalenschnitte, deren Krümmungsmittelpunkt unterhalb  $P$  liegt. Man bezeichnet  $k_1$  und  $k_2$  wie im elliptischen Fall als die Hauptkrümmungen und die Richtungen der zugehörigen

Normalenschnitte als die Krümmungsrichtungen. Auch im hyperbolischen Fall stehen die Krümmungsrichtungen aufeinander senkrecht. Ferner halbieren sie Winkel und Nebenwinkel der beiden Kurvenzweige, die die Tangentialebene aus der Fläche ausschneidet. Man nennt die Richtungen dieser beiden Kurvenzweige die Asymptotenrichtungen in  $P$ .

In den parabolischen Punkten gibt es im allgemeinen ebenfalls zwei aufeinander senkrechte Krümmungsrichtungen derart, daß die Krümmungen  $k_1$  und  $k_2$  der zugehörigen Normalenschnitte größer bzw. kleiner sind als die aller übrigen Normalenschnitte. Die parabolischen Punkte sind dadurch gekennzeichnet, daß eine dieser beiden Hauptkrümmungen den Wert Null hat. Im allgemeinen ist die andere Hauptkrümmung von Null verschieden. Dann wandert der Krümmungsmittelpunkt von der Lage, die der von Null verschiedenen Hauptkrümmung entspricht, auf einem Normalenhalbstrahl entlang ins Unendliche

(Abb. 193). Es gibt also in parabolischen Punkten im allgemeinen genau einen Normalenschnitt verschwindender Krümmung. Seine Richtung ist eine der Krümmungsrichtungen, sie ist aber auch als Asymptotenrichtung anzusehen.

Man kann analytisch auf jedem Flächenstück alle die Kurven bestimmen, deren Richtung in jedem Punkt eine der beiden Krümmungsrichtungen ist. Man erhält auf diese Weise ein „Kurvennetz“ auf der Fläche, d. h. ein System von zwei Kurvenscharen, von denen jede das Flächenstück einfach und lückenlos überdeckt. Die Kurven heißen die Krümmungslinien der Fläche. Nach dem Früheren stehen die Krümmungslinien in jedem Punkt der Fläche aufeinander senkrecht; sie bilden also ein Orthogonalsystem auf der Fläche.

Es gibt jedoch Punkte, für die unsere bisherigen Betrachtungen nicht gelten. Wir gingen nämlich von der Annahme aus, daß die Krümmung des Normalenschnitts sich ändert, wenn man die Normalebene dreht. Es kann aber auch vorkommen, daß alle Normalenschnitte eines Punkts dieselbe Krümmung haben. Dann werden die Krümmungsrichtungen unbestimmt, und man spricht von einem Nabelpunkt. Ein Beispiel für eine Fläche aus lauter Nabelpunkten ist offenbar die Kugel. Übrigens sind die Kugeln und Ebenen auch die einzigen Flächen, die nur aus Nabelpunkten bestehen. Im allgemeinen treten die Nabelpunkte isoliert auf. Das Netz der Krümmungslinien kann in ihnen und nur in ihnen ein singuläres Verhalten zeigen.

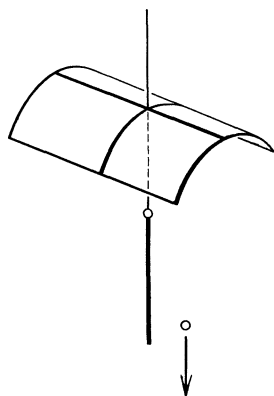


Abb. 193.

Über die Krümmungslinien gilt ein eigenartiger Satz von DUPIN. Wir haben früher (S. 5) den Begriff der orthogonalen Kurvenscharen in der Ebene kennengelernt. Das räumliche Analogon sind Flächenscharen, deren Tangentialebenen in jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen. Da man nun durch einen Punkt in der Ebene nicht mehr als zwei paarweise senkrechte Geraden, dagegen im Raum drei paarweise senkrechte Ebenen legen kann, wird man orthogonale Flächenscharen betrachten, die durch jeden Raumpunkt drei Exemplare schicken. Ein Beispiel eines solchen Orthogonalsystems sind die früher erwähnten konfokalen Flächen zweiter Ordnung.

Man kann in der Ebene (und ebenso auf jeder krummen Fläche) zu jeder beliebig vorgegebenen Kurvenschar eine orthogonale Kurvenschar bestimmen. Entsprechend könnte man erwarten, daß man im Raum zu einer zweifachen orthogonalen Flächenschar stets noch eine orthogonale dritte finden kann. Nach dem Satz von DUPIN ist nun diese Annahme falsch. Der Satz besagt nämlich, daß die Flächen eines dreifachen

Orthogonalsystems sich stets in ihren Krümmungslinien durchschneiden. Falls daher eine zweifache orthogonale Flächenschar sich zu einer dreifachen ergänzen läßt, müssen schon die gegebenen Flächen sich in ihren Krümmungslinien durchschneiden. Übrigens ist diese Bedingung auch hinreichend. Nach dem Satz von DUPIN sind die Krümmungslinien auf dem Ellipsoid dessen Schnittkurven mit den konfokalen ein- und zweischaligen Hyperboloiden (Abb. 194). Das so bestimmte Kurvennetz (Abb. 195) wird singular in den Durchstoßpunkten der Fokalhyperbel.

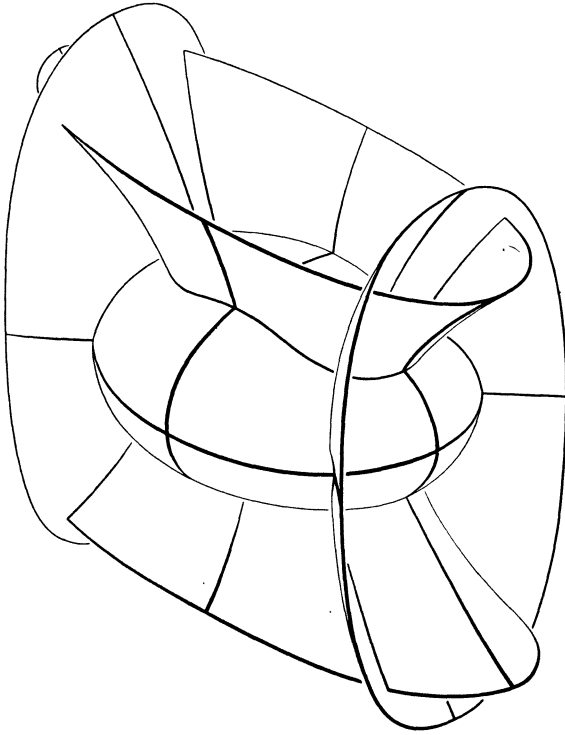


Abb. 194.

In der Tat sind diese vier Punkte die Nabelpunkte des Ellipsoids.

Die Krümmungslinien auf dem Ellipsoid umlaufen die Nabelpunkte in ähnlicher Weise, wie in der Ebene ein System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln die gemeinsamen Brennpunkte umgibt (Abb. 7, S. 5). Diese anschauliche Ähnlichkeit ist nicht zufällig, sondern bringt eine innere Verwandtschaft beider Kurvenscharen zum Ausdruck. Wir können nämlich die

Krümmungslinien auf dem Ellipsoid

durch eine Fadenkonstruktion, die zwei Nabelpunkte verwendet, in genau der gleichen Weise konstruieren, wie wir in der Ebene die Ellipsen durch Fadenkonstruktion aus den Brennpunkten erzeugt hatten. Die vier Nabelpunkte des Ellipsoids liegen einander paarweise diametral gegenüber. Ich kann daher auf zwei verschiedene Weisen (Abb. 196) zwei Nabelpunkte herausgreifen, die einander nicht gegenüberliegen. In diesen beiden Punkten  $F_1$  und  $F_2$  befestige ich die Endpunkte eines Fadens von ausreichender Länge und ziehe ihn in einem Punkte  $P$  straff an, jedoch so, daß dieser Punkt auf dem Ellipsoid liegt. Dann muß sich der Faden in seiner Gesamtlänge von selbst dem Ellipsoid anlegen. Die verschiedenen Lagen, die  $P$  auf dem Ellipsoid annehmen

kann, erfüllen eine Krümmungslinie. Je nachdem, auf welche Weise ich die beiden Nabelpunkte gewählt habe, erhalte ich bei veränderlicher Fadenlänge die eine oder die andere Schar der Krümmungslinien. Während also im konfokalen System der Kegelschnitte die eine Kurvenschar aus Ellipsen und die andere aus Hyperbeln besteht, lassen sich auf dem Ellipsoid beide Scharen als verallgemeinerte Ellipsen auffassen.

Die Kurven auf dem Ellipsoid, längs derer sich der Faden legt, entsprechen den Brennpunktstrahlen der Ellipse, also geraden Linien, und sind wie die Geraden in der Ebene durch die Eigenschaft gekennzeichnet, zwischen irgend zwei ihrer Punkte die kürzeste in der Fläche mögliche Verbindung herzustellen. Man nennt derartige Kurven geodätische Linien einer Fläche, und wir werden uns später (S. 194 bis 198) mit ihrer Theorie beschäftigen.

In hyperbolischen Punkten hatten wir neben den Krümmungsrichtungen noch ein zweites Paar ausgezeichneter Richtungen, nämlich die Asymptotenrichtungen, kennengelernt. Man kann analog den Krümmungslinien ein Kurvennetz bestimmen, deren Kurven in jedem Punkt Asymptotenrichtung haben; man nennt diese Kurven die Asymptotenlinien oder Haupttangentialkurven der Fläche.

Auch in hyperbolischen Flächenpunkten kann es eintreten, daß die beiden Hauptkrümmungen gleich groß sind. Solche Punkte haben gewisse Ähnlichkeiten mit den Nabelpunkten. Flächen, die nur aus solchen Punkten bestehen, heißen Minimalflächen. Sie sind auch dadurch charakterisiert, daß ihre Asymptotenlinien ein orthogonales Netz bilden. Während die Gesamtheit der Flächen, die nur Nabelpunkte besitzen, allein aus den Kugeln besteht, ist die Klasse der Minimalflächen viel umfassender. Man kann nämlich eine Minimalfläche dadurch realisieren, daß man einen ganz beliebig geformten geschlossenen Draht in Seifenlösung taucht. Die Seifenhaut, die sich dann in den Draht spannt, hat stets die Gestalt einer Minimalfläche (vgl. Abb. 219, 220, S. 186). Das

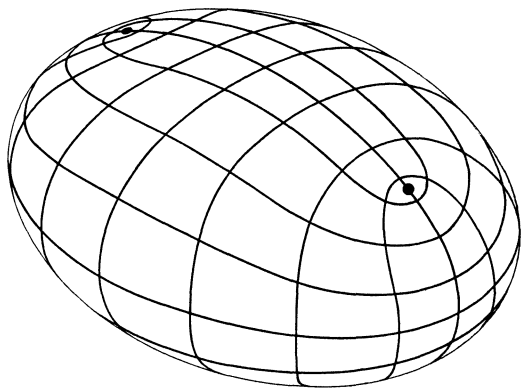


Abb. 195.

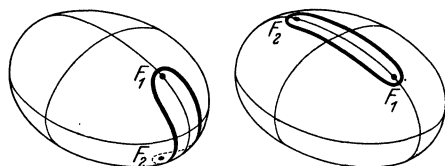


Abb. 196.

Gesetz der Oberflächenspannung, dem die Seifenhaut folgt, sucht den Flächeninhalt der Haut möglichst zu verkleinern. Man kann hiernach rein mathematisch die Minimalflächen als diejenigen Flächen charakterisieren, die den kleinsten Flächeninhalt besitzen unter allen Flächen, die man in eine gegebene geschlossene Raumkurve einspannen kann. Dabei ist bemerkenswert, daß diese von der Gesamterstreckung eines Flächenstücks ausgehende Kennzeichnung auf dieselben Flächen führt wie die erstgenannte Eigenschaft, die nur die nächste Umgebung jedes Flächenpunkts betrifft. Man kann sich diesen Zusammenhang folgendermaßen plausibel machen. Auf einer gegebenen Minimalfläche, die in die geschlossene Kurve  $S$  eingespannt sei, wählen wir eine sehr kleine geschlossene Kurve  $s$  aus. Ich betrachte nur das Stück der Minimalfläche, das im Innern von  $s$  liegt, und behaupte, daß dieses Stück kleineren Flächeninhalt hat als alle anderen Flächenstücke, die sich in  $s$  einspannen lassen. Sonst könnte ich nämlich das im Innern von  $s$  gelegene Stück meiner Fläche so abändern, daß sich dabei der Flächeninhalt dieses Stücks verkleinerte. Dabei würde aber auch der Gesamthalt der in  $S$  eingespannten Fläche abnehmen, was der Definition der Minimalfläche widerspricht. Wenn ich nun die kleine Kurve  $s$  auf irgendeinen Punkt der Minimalfläche zusammenziehe, kann ich erwarten, daß ich durch einen Grenzübergang auf solche Eigenschaften der Minimalfläche geführt werde, die nur die Umgebung eines Flächenpunkts betreffen.

Jede Aufgabe, Kurven oder Flächen durch eine Minimumseigenschaft zu bestimmen, heißt ein Variationsproblem. Eine analoge Betrachtung, wie wir sie eben für die Minimalflächen ausgeführt haben, zeigt auch für jedes andere Variationsproblem, daß die Minimumseigenschaft sich durch eine Umgebungseigenschaft ersetzen läßt. Die Durchführung dieser Grenzübergänge ist der Gegenstand der Variationsrechnung. Die Variationsrechnung geht also den umgekehrten Weg wie die Differentialgeometrie; während die Differentialgeometrie die Umgebungseigenschaften zugrunde legt und aus ihnen Aussagen über den Gesamtverlauf eines Gebildes herleitet, werden in der Variationsrechnung Umgebungseigenschaften hergeleitet aus solchen Eigenschaften, die dem Gebilde als Ganzem zukommen.

Die Variationsrechnung ist für die theoretische Physik von grundlegender Bedeutung. Alle in der Natur vorkommenden Gleichgewichts- und Bewegungszustände sind durch Minimumseigenschaften ausgezeichnet.

Man kann durch Seifenhäute auch Minimalflächen erzeugen, die durch mehr als eine Randkurve bestimmt sind. Z. B. kann ich von zwei kreisförmigen geschlossenen Drähten ausgehen, die ich in der Seifenlösung zur Deckung bringe und nach dem Herausziehen so voneinander trenne, daß die beiden Kreise dieselbe Achse behalten. Dann

spannt sich zwischen den beiden Kreisen eine hyperboloidähnliche Fläche auf (Abb. 197 und Abb. 220, S. 186), von der man aus Symmetriegründen erwarten muß, daß sie eine Rotationsfläche ist. Die Rechnung bestätigt das und ergibt, daß der Meridian dieser Rotationsminimalfläche eine Kettenlinie ist, d. h. dieselbe Gestalt hat, wie sie eine an zwei Punkten aufgehängte Kette unter dem Einfluß der Schwerkraft annimmt. Die Fläche wird deswegen Katenoid genannt.

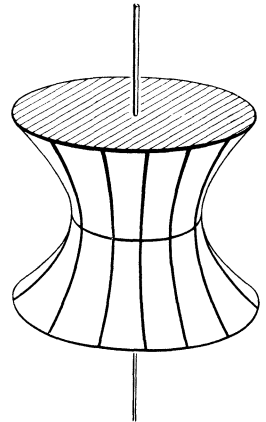


Abb. 197.

Die Kennzeichen des Nabelpunktes und der Punkte der Minimalflächen vereinigen in sich diejenigen parabolischen Punkte, in denen beide Hauptkrümmungen zugleich verschwinden. In einem solchen Punkt verschwinden die Krümmungen aller Normalenschnitte. Offenbar sind alle Punkte einer Ebene von dieser Art, zugleich sind die Ebenen die einzigen Flächen, die aus lauter parabolischen Nabelpunkten bestehen. Ein Beispiel für einen isolierten parabolischen Nabelpunkt kann man analog dem gewöhnlichen Sattel (Abb. 190, S. 162) leicht konstruieren, wenn man in der Paßhöhe nicht zwei, sondern drei Gebirge und drei Einsenkungen aneinanderstoßen läßt, so daß die Fläche durch eine Drehung um  $2\pi/3$  mit sich selbst zur Deckung kommt (Abb. 198). Dann liegt offenbar jedem Gebirge eine Senkung gegenüber. Daher hat jeder Normalenschnitt einen Wendepunkt, also verschwindende Krümmung. Man nennt eine solche Fläche einen Affensattel. Diese Bezeichnung rührt daher, daß der Mensch zum Reiten nur zwei Vertiefungen braucht, daß aber der Affe eine dritte für seinen Schwanz nötig hat.

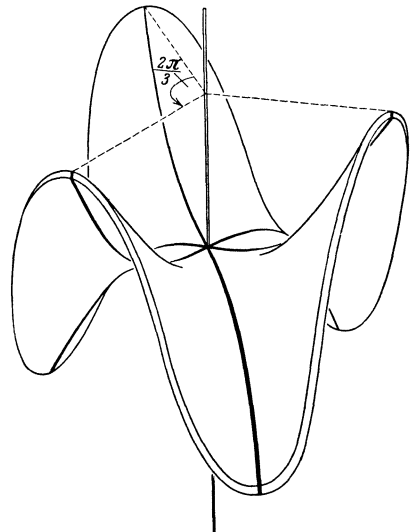


Abb. 198.

Man kann die verschiedene Gestalt der Flächen in elliptischen und hyperbolischen Punkten noch auf eine andere Art kennzeichnen, die auch die Namen „elliptisch“ und „hyperbolisch“ rechtfertigt. Hierzu lege ich zur Tangentialebene in geringem Abstand eine Parallelebene und betrachte deren Schnitt mit der Fläche. In einem elliptischen Flächenpunkt wird eine solche Schnittkurve nur vorhanden sein, wenn die Par-



alle Ebene auf einer bestimmten Seite der Tangentialebene angenommen wird. Die Schnittkurve wird sich auf den Berührungspunkt zusammenziehen, wenn der Abstand der Ebenen gegen Null abnimmt. Lasse ich den Abstand gegen Null gehen, vergrößere aber gleichzeitig die Schnittkurve in passender Weise in immer stärkerem Maßstab, so zeigt es sich, daß die vergrößerte Schnittkurve sich unbegrenzt einer in der Tangentialebene gelegenen Ellipse nähert, die den Berührungspunkt zum Mittelpunkt und die Krümmungsrichtungen zu Achsenrichtungen hat. Das Verhältnis der Achsenlängen ist dabei gleich der Wurzel aus dem Verhältnis der Hauptkrümmungsradien.

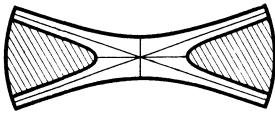


Abb. 199.

Betrachte ich die auf einer bestimmten Seite verlaufenden Parallelebenen zur Tangentialebene eines hyperbolischen Punktes, so ergibt der analoge Grenzübergang eine Hyperbel, deren Achsenrichtungen und Achsenlängen in derselben Weise wie im elliptischen Fall von den Krümmungsrichtungen und den Hauptkrümmungen abhängen (Abb. 199). Verfährt man ebenso mit den Parallelebenen auf der anderen Seite der Tangentialebene, so erhält man eine zweite Hyperbel, die dieselben Achsen wie die erste besitzt. Beide Hyperbeln haben überdies ihre Asymptoten gemeinsam, und zwar sind deren Richtungen gerade durch die Asymptotenrichtungen des betrachteten Flächenpunktes gegeben. Man nennt die von uns konstruierten Kegelschnitte die „DUPINSchen Indikatrizes“ der Flächenpunkte. In parabolischen Punkten kann das entsprechende Verfahren zu verschiedenartigen Kurven führen. In Nabelpunkten ist die DUPINSche Indikatrix ein Kreis. Man kann das an der Kugel und am Ellipsoid leicht bestätigen. In Affensätteln verläuft die Indikatrix etwa wie in Abb. 200 angegeben.

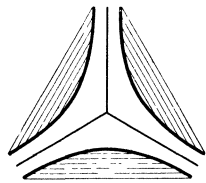


Abb. 200.

§ 29. Sphärische Abbildung und GAUSSsche Krümmung.

Wir haben bis jetzt die Flächenkrümmung durch zwei Zahlen, die Hauptkrümmungen, charakterisiert. GAUSS hat nun ein Verfahren angegeben, um die Krümmung in einem Flächenpunkt durch eine einzige Zahl, die natürlich von den Hauptkrümmungen abhängt, in analoger Weise darzustellen, wie wir das für die Raumkurven gelernt haben.

Ich ziehe zu jeder Normalen der betrachteten Fläche die Parallele durch den Mittelpunkt einer Einheitskugel. Ich zeichne willkürlich eine der beiden Richtungen der Normalen in einem Flächenpunkt aus und übertrage diese Festsetzung stetig auf alle Nachbarpunkte auf dem Flächenstück. Zeichne ich nun die gleiche Richtung auch auf dem ent-

sprechenden Kugeldurchmesser aus, so wird jedem Punkt des Flächenstücks ein bestimmter Punkt der Kugeloberfläche, der Endpunkt des Durchmessers, zugeordnet, die Fläche wird also auf die Kugel abgebildet. Man nennt dieses von GAUSS herrührende Verfahren die sphärische Abbildung der Fläche. Da die Durchmesser der Kugel auf den Tangentialebenen ihrer Endpunkte senkrecht stehen, so besitzt bei der GAUSSschen Abbildung jeder Punkt die gleiche Normalenrichtung wie sein sphärisches Bild, und ebenso sind die beiden Tangentialebenen parallel. Die sphärische Abbildung wird deshalb auch als Abbildung durch parallele Normalen bzw. durch parallele Tangentialebenen bezeichnet. Man kann eine Fläche nicht nur auf die Kugel, sondern auch auf jede beliebige andere geschlossene Fläche durch parallele Tangentialebenen abbilden. Diese allgemeineren Abbildungen spielen in der modernen Differentialgeometrie eine gewisse Rolle.

Ein und derselbe Punkt der Kugel entspricht bei der sphärischen Abbildung mehreren Flächenpunkten dann und nur dann, wenn gleichgerichtete parallele Normalen auf der Fläche vorhanden sind. Wie man sich anschaulich leicht klarmachen kann und wie wir später genauer verfolgen werden, gibt es in der nächsten Umgebung eines elliptischen oder hyperbolischen Flächenpunkts keine solchen Normalen (vergleiche Abb. 202, 203, S. 173). Dort ist also die sphärische Abbildung umkehrbar eindeutig.

Wenn ich auf dem Flächenstück eine geschlossene Kurve  $k$  ziehe, so entspricht ihr eine geschlossene Kurve  $k'$  auf der Kugel. Wir dividieren nun den Flächeninhalt  $G$  des Kugelstücks, das von  $k'$  eingeschlossen wird, durch den Inhalt  $F$  des von  $k$  umschlossenen Stücks unserer Fläche und ziehen die Flächenkurve  $k$  auf einen Flächenpunkt  $P$  zusammen. Dabei werden  $F$  und  $G$  immer kleiner, und wenn wir schließlich im Grenzübergang die Kurve in den Punkt  $P$  übergehen lassen, nähert sich der betrachtete Quotient einem bestimmten Grenzwert

$$\lim_{F \rightarrow 0} \frac{G}{F} = K.$$

Die durch dieses Verfahren definierte Zahl  $K$  heißt die GAUSSsche Krümmung der Fläche in  $P$ . Die analytische Betrachtung ergibt nun, daß die GAUSSsche Krümmung gleich dem Produkt der zugehörigen Hauptkrümmungen ist:

$$K = k_1 k_2.$$

Die GAUSSsche Krümmung hat die höchst wichtige Eigenschaft, daß sie sich bei beliebiger Verbiegung des Flächenstücks nicht ändert. Als Verbiegungen definiert man diejenigen Deformationen, welche die Längen und Winkel aller auf der Fläche gezogenen Kurven unverändert lassen; eine aus annähernd undehnbarem Material, z. B. Papier oder dünnem Blech hergestellte Fläche läßt sich zur Veranschaulichung von

Verbiegungen verwenden. Da nun die GAUSSsche Krümmung durch Verbiegungen nicht beeinflußt wird, muß sie in innigem Zusammenhang zu den Eigenschaften der Fläche stehen, die allein von den Längen und Winkeln der in der Fläche verlaufenden Kurven abhängen. In der Relativitätstheorie, die gerade diese „inneren“ Eigenschaften mehrdimensionaler gekrümmter Mannigfaltigkeiten untersucht, spielt deshalb die GAUSSsche Krümmung und ihr Analogon für mehr Dimensionen eine entscheidende Rolle.

Wir wollen uns plausibel machen, weshalb die GAUSSsche Krümmung, deren Definition doch wesentlich von der räumlichen Lage der Fläche abhängt, dennoch bei Verbiegungen ungeändert bleibt. Wir denken uns aus starren dreieckigen ebenen Platten ( $a, b, c, d$  in Abb. 201) eine körperliche Ecke zusammengesetzt, so daß zwei benachbarte Platten

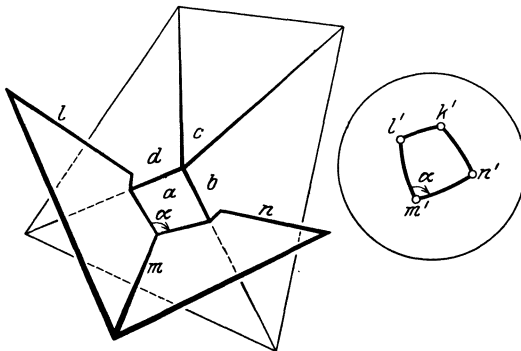


Abb. 201.

stets um die gemeinsame Kante drehbar sind. Wenn dann die Ecke mehr als drei Seitenflächen hat, ist ihre Gestalt im Raum noch veränderlich, und diese Veränderungen werden wir als Verbiegung bezeichnen dürfen, weil sie die Längen und Winkel aller Kurven ungeändert

lassen, die man auf der Oberfläche der körperlichen Ecke zeichnet. Wenn man auf jeder der Seitenflächen nach außen das Lot ( $l, m, n$ ) errichtet, kommt man zu einer sphärischen Abbildung der Ecke durch einzelne Punkte ( $l', m', n'$ ) der Kugel. Um nun eine Analogie zur sphärischen Flächenabbildung herzustellen, verbinde ich durch Großkreisbögen diejenigen Kugelpunkte, die benachbarte Seitenflächen der körperlichen Ecke abbilden. Auf diese Weise ergibt sich ein Polygon auf der Kugel. Ich behaupte nun, daß bei den soeben definierten Verbiegungen der Flächeninhalt dieses Polygons sich nicht ändert; diese Tatsache steht offenbar in Analogie zu der Unveränderlichkeit der GAUSSschen Krümmung bei der Flächenverbiegung.

Meine Behauptung läßt sich aber aus elementaren Sätzen der sphärischen Trigonometrie ableiten. Bekanntlich ist nämlich der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, und ebenso jedes Großkreispolygons, allein abhängig von der Winkelsumme. Es genügt also zu zeigen, daß die Winkel des Polygons, das wir als sphärisches Bild der körperlichen Ecke eingeführt haben, bei deren Verbiegung sich nicht ändern. Aus Abb. 201 erkennt man nun, daß jeder solche Winkel gleich dem Supplement

eines Winkels ist, den zwei benachbarte Kanten der Ecke miteinander bilden. Nach unseren Voraussetzungen sind aber alle diese Winkel unveränderlich.

Man kann aus der eben durchgeführten Betrachtung durch einen Grenzübergang die Unveränderlichkeit der GAUSSschen Krümmung erhalten, wenigstens wenn man sich auf konvexe Flächenstücke beschränkt. Man hat zu diesem Zweck die Fläche durch einbeschriebene Dreieckspolyeder mit kleiner Kantenlänge zu approximieren und unsere Betrachtung auf jede Ecke dieses Polyeders anzuwenden.

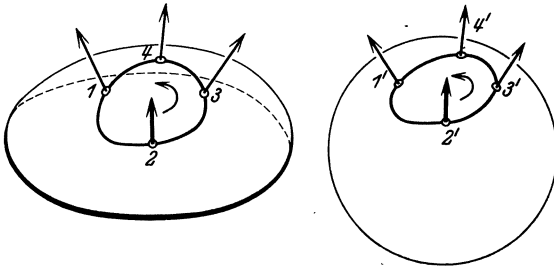


Abb. 202.

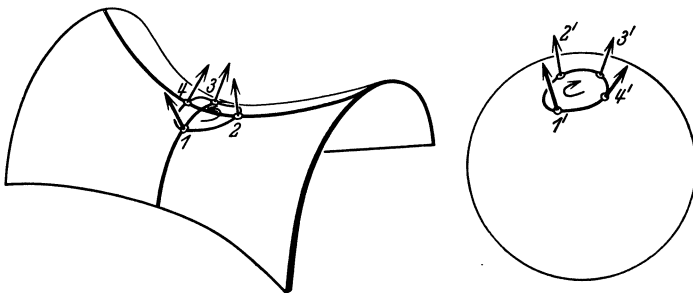


Abb. 203.

Wir wollen jetzt sehen, wie sich die Unterscheidung der Flächenpunkte in elliptische, hyperbolische und parabolische durch die sphärische Abbildung und die GAUSSsche Krümmung kennzeichnen läßt. Umläuft man einen Punkt elliptischer Krümmung auf einer kleinen geschlossenen doppelpunktfreien Flächenkurve, so erhält man auf der Kugel eine ebenfalls doppelpunktfreie geschlossene Kurve (Abb. 202). Auch in einem Punkt sattelförmiger Krümmung ist das sphärische Bild doppelpunktfrei (Abb. 203). Wie die Abb. 202 und 203 zeigen, ist im hyperbolischen Fall der Umlaufsinn der Kurve auf der Kugel entgegengesetzt dem Umlaufsinn der Flächenkurve, während in elliptischen Punkten beide Umlaufsinn gleich sind. Man pflegt nun in der analytischen Geometrie den Inhalten zweier Flächenstücke gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen beizulegen, je nachdem sie in gleichem oder entgegengesetztem Sinne umlaufen werden. Daher rechnet man die

GAUSSsche Krümmung in konvexen Stücken als positiv, in sattelförmigen als negativ. Zu derselben Vorzeichenbestimmung kommen wir auch, wenn wir von den beiden Hauptkrümmungen ausgehen. In elliptischen Punkten liegen nämlich die den Hauptkrümmungen entsprechenden Krümmungsmittelpunkte auf derselben Halbgeraden der Normalen, während sie in hyperbolischen Punkten auf den entgegengesetzten Halbgeraden liegen. Wenn ich also die eine Halbgerade als positiv, die andere als negativ kennzeichne, so ist das Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien — also auch das Produkt der Hauptkrümmungen und damit die GAUSSsche Krümmung — positiv für elliptische Punkte und negativ für hyperbolische Punkte. — Da das Bild hinreichend kleiner geschlossener doppelpunktfreier Kurven ebenfalls doppelpunktfrei ausfällt, so muß die sphärische Abbildung in überall konvexen oder überall sattelförmigen hinreichend kleinen Flächenstücken stets umkehrbar eindeutig sein.

Die parabolischen Punkte nehmen eine Mittelstellung zwischen den elliptischen und den hyperbolischen Punkten ein; daher werden wir erwarten, daß die GAUSSsche Krümmung in den parabolischen Punkten verschwindet. Das bestätigt sich. Denn die parabolischen Punkte sind dadurch definiert, daß in ihnen eine Hauptkrümmung verschwindet; also verschwindet in ihnen auch das Produkt der Hauptkrümmungen, d. h. die GAUSSsche Krümmung.

Die Ebene besteht nur aus parabolischen Punkten. Aus der Biegunsinvarianz der GAUSSschen Krümmung folgt daher, daß ich ein ebenes Blatt Papier niemals auf ein positiv oder negativ gekrümmtes Flächenstück auflegen kann. Die Anschauung ergibt in der Tat, daß das Papier im ersten Fall sich falten, im zweiten Fall zerreißen muß.

Wir betrachten jetzt eine gegebene Fläche, die nicht aus lauter parabolischen Punkten besteht und auf der sowohl Punkte positiver als auch Punkte negativer GAUSSscher Krümmung vorhanden sind. Da die GAUSSsche Krümmung sich stetig auf der Fläche ändert, so muß es auf der Fläche auch Punkte geben, in denen die GAUSSsche Krümmung verschwindet, und diese Punkte müssen stetige Kurvenzüge bilden, die die Gebiete positiver von denen negativer GAUSSscher Krümmung trennen. Man nennt solche aus parabolischen Punkten bestehenden Kurven die parabolischen Kurven der Fläche<sup>1</sup>. Natürlich müssen parabolische Kurven nur dann auftreten, wenn die GAUSSsche Krümmung

<sup>1</sup> Die parabolischen Kurven sind von F. KLEIN zu einer eigenartigen Untersuchung herangezogen worden. Er nahm an, daß die künstlerische Schönheit eines Gesichts ihren Grund in gewissen mathematischen Beziehungen hätte, und ließ deshalb auf dem Apollo von Belvedere, dessen Gesichtszüge uns einen besonders hohen Grad von klassischer Schönheit wiedergeben, die sämtlichen parabolischen Kurven einzeichnen. Diese Kurven besaßen aber weder eine besonders einfache Gestalt, noch ließ sich ein allgemeines Gesetz ausfindig machen, dem sie gehorchten (Abb. 204).

auf der Fläche beide Vorzeichen annimmt. Auf den bisher von uns betrachteten Flächen trat das nie ein; die Flächen zweiter Ordnung besitzen entweder überall positive Krümmung wie das Ellipsoid, oder überall negative wie das einschalige Hyperboloid, oder überall verschwindende wie der Zylinder und der Kegel, die sich ja aus einem ebenen Blatt Papier formen lassen. Die Minimalflächen ferner haben nirgends positive Krümmung.

Wir wollen jetzt Beispiele von Flächen mit parabolischen Kurven angeben und deren sphärische Abbildung betrachten. Eine besonders einfache Fläche dieser Art ist die Oberfläche einer Glocke. Man erhält sie, indem man eine ebene Kurve, die einen Wendepunkt hat, um eine in ihrer Ebene gelegene Achse rotieren läßt



Abb. 204.

in ihrer Ebene gelegene Achse rotieren läßt (Abb. 205). Wir wollen diese Achse als vertikal annehmen. Für den in Abb. 205 gezeichneten Fall erzeugt der oberhalb des Wendepunkts verlaufende Zweig der Kurve ein elliptisch gekrümmtes Flächenstück, während der untere Teil der Kurve ein hyperbolisch gekrümmtes Flächenstück liefert. Der Breitenkreis der Rotationsfläche, der vom Wendepunkt der Kurve beschrieben wird, ist also die parabolische Kurve der Glocke. Man erkennt das auch am Verhalten der Tangentialebenen. Die Tangentialebenen der hyperbolischen Punkte schneiden die Glocke in einer schleifenartigen Kurve, die zwei Äste durch den Berührungspunkt schießt (Abb. 206). Nähert sich nun der Berührungspunkt von unten her der parabolischen Kurve, so wird der geschlossene Teil der Schleife immer kleiner, und die beiden durch den Berührungspunkt laufenden Zweige der Schnittkurve schließen dort einen immer spitzeren Winkel ein. Liegt

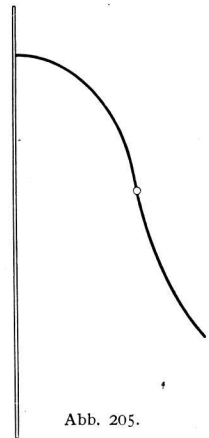


Abb. 205.

der Berührungspunkt schließlich auf der parabolischen Kurve (Abb. 207), so ist die Schleife auf den Berührungspunkt zusammengeschrumpft, und die Schnittkurve hat im Berührungspunkt eine Spitze. Wandert der Berührungspunkt weiter in den elliptischen Teil der Fläche (Abb. 208), so besteht die Schnittkurve aus dem Berührungspunkt als isoliertem

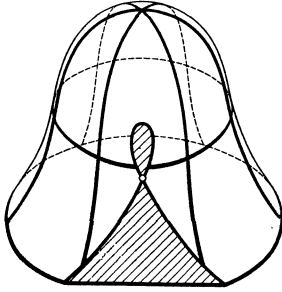


Abb. 206.

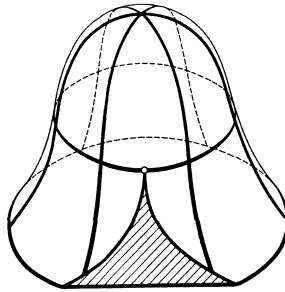


Abb. 207.

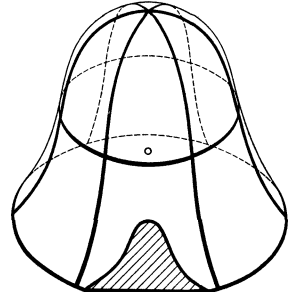


Abb. 208.

Punkt und einem ganz im hyperbolischen Teil verlaufenden stetig gekrümmten Kurvenbogen. Wir haben damit zugleich Beispiele für die früher (S. 154) aufgezählten Fälle singulärer Punkte ebener Kurven.

Wir untersuchen nun die sphärische Abbildung der Glocke in der Nähe des parabolischen Breitenkreises (Abb. 209). Wir umgeben einen beliebigen Punkt der parabolischen Kurve mit dem kleinen geschlossenen

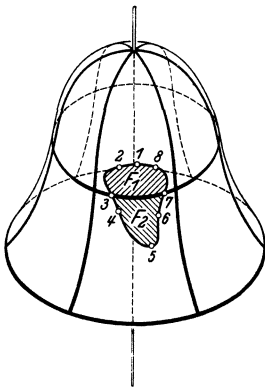
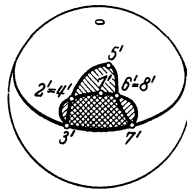


Abb. 209.



Kurvenzug  $123456781$ , durch den ein gewisses Flächenstück  $F$  eingeschlossen ist. Die Punkte 1 und 5 mögen der höchste und tiefste Punkt von  $F$  sein. In 3 und 7 soll der Kurvenzug den parabolischen Breitenkreis treffen. Nun besitzt der Meridian, durch dessen Rotation die Glocke erzeugt wird, in der Umgebung seines Wendepunkts parallele Tangenten

(vgl. S. 154). Offenbar besitzen die entsprechenden Punkte der Glocke parallele Normalen, also das gleiche sphärische Bild. Demnach gehört zu jedem Breitenkreis unmittelbar oberhalb des parabolischen Kreises ein zweiter Breitenkreis unmittelbar unterhalb des parabolischen, der dasselbe sphärische Bild hat. Wir erkennen also, daß die sphärische Abbildung des Flächenstücks  $F$  nicht umkehrbar eindeutig sein kann. Zur Veranschaulichung dieser Tatsache wählen wir die Punkte 2, 4, 6, 8 auf dem Rand von  $F$  so, daß sowohl 2 und 4 als auch

6 und 8 parallele Normalen besitzen. Der parabolische Kreis teilt  $F$  in zwei Gebiete  $F_1$  und  $F_2$ , deren Inneres ganz aus elliptischen bzw. hyperbolischen Flächenpunkten besteht, die also umkehrbar eindeutig auf zwei Gebiete der Kugel abgebildet werden. Diese Gebiete grenzen beide an das Bild des parabolischen Kreises, das offenbar auf der Kugel ebenfalls ein Kreis in einer horizontalen Ebene ist. Während aber  $F_1$  und  $F_2$  auf verschiedenen Seiten des parabolischen Kreises liegen, grenzen die Bildgebiete auf der Kugel beide von oben an das Bild des parabolischen Kreises. Sie überdecken sich daher. Der Rand von  $F$  wird in eine Kurve  $1'2'3'4'5'6'7'8'1'$  abgebildet, und dabei fällt  $2'$  mit  $4'$  und  $6'$  mit  $8'$  zusammen, und die Kurve durchschneidet in diesen Punkten sich selbst.

Das sphärische Bild der Glocke erfährt also längs des Bilds der parabolischen Kurve eine Umklappung. Diese Umklappung tritt auch bei den parabolischen Kurven beliebiger Flächen in der Regel ein. Es gibt jedoch eine charakteristische Ausnahme, die an einem zweiten Beispiel erklärt werden soll.

Durch eine vertikale Achse lege ich eine Ebene, zeichne in ihr einen Kreis, der die Achse nicht trifft, und drehe die Ebene um die Achse. Dann beschreibt der Kreis eine Rotationsfläche, welche Ringfläche oder Torus genannt wird (Abb. 210). Der Kreis wird durch seinen höchsten Punkt  $A$  und seinen tiefsten Punkt  $B$  in zwei Halbkreise  $I$  und  $II$  geteilt. Der von  $I$  erzeugte Teil des Torus besitzt offenbar positive GAUSSsche Krümmung, der von  $II$  erzeugte Teil des Torus dagegen negative. Die beiden Teile des Torus werden voneinander durch die Breitenkreise getrennt, die die Punkte  $A$  und  $B$  beschreiben. Diese Kreise sind die parabolischen Kurven der Fläche. Jede Tangentialebene, die in einem Punkt eines dieser Kreise an den Torus gelegt wird, hat mit dem Torus einen einzigen durch den Berührungspunkt gehenden Kurvenzweig gemein, da sie offenbar den Torus längs des ganzen Kreises berührt und ihn sonst nicht trifft. Wir haben also hier ein Beispiel parabolischer Punkte, in denen die Tangentialebene keine mit einer Spitze versehene Kurve aus der Fläche ausschneidet. In Abb. 211 ist für einen der parabolischen Kurve benachbarten hyperbolischen Toruspunkt die Schnittkurve der Tangentialebene mit dem Torus gezeichnet. In den elliptischen Toruspunkten hat die Tangentialebene allein ihren Berührungspunkt mit dem Torus gemein.

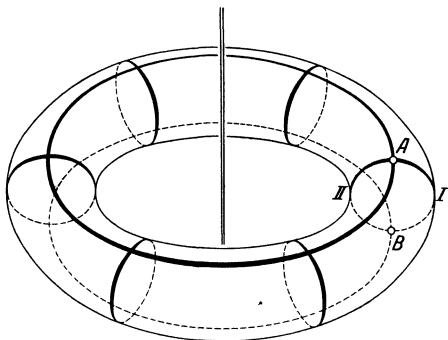


Abb. 210.



Wir betrachten nun das sphärische Bild des Torus. Wir denken uns etwa in jedem Punkt die nach außen weisende Richtung der Normalen ausgezeichnet. Dann werden die beiden parabolischen Kreise, da sie lauter parallele Normalen besitzen, nur in je einen einzigen Punkt der

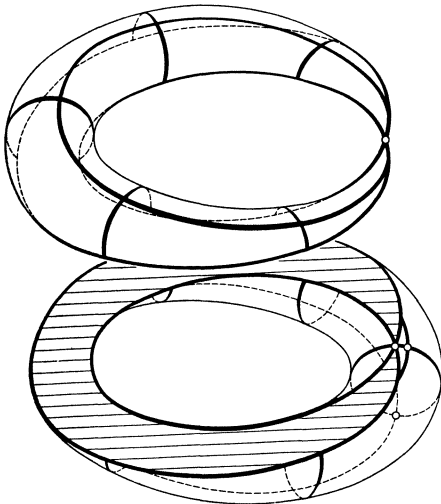


Abb. 211.

Kugel, nämlich in den höchsten und den tiefsten Punkt derselben, abgebildet. Der elliptische Teil des Torus besitzt keine parallelen Normalen. Sein sphärisches Bild bedeckt, wie man leicht sieht, die ganze Kugel mit Ausnahme des höchsten und tiefsten Punkts einfach und lückenlos. Das gleiche gilt aber auch vom hyperbolischen Teil.

Im ganzen wird also die Kugel vom sphärischen Bild des Torus genau zweimal bedeckt, mit Ausnahme des höchsten und tiefsten Punkts, wo beide Bildteile zusammenhängen. Um die Art dieses Zusammenhangs zu veranschaulichen, verfahren wir wie beim vorigen Beispiel. Wir denken uns den Torus und sein sphärisches Bild schräg von oben gesehen (Abb. 212) und umgeben einen parabolischen Punkt mit einem kleinen geschlossenen doppelpunktfreien Kurvenzug 12341. Aus der Figur ist die Wahl dieser Punkte und die Gestalt des sphärischen Bilds des Kurvenzugs wohl ohne nähere Erörterung ersichtlich. Daß das sphärische Bild achtförmig ausfällt, steht im Einklang damit, daß im elliptischen Gebiet der Umlaufsinn erhalten bleibt, während er im hyperbolischen Gebiet umgekehrt wird.

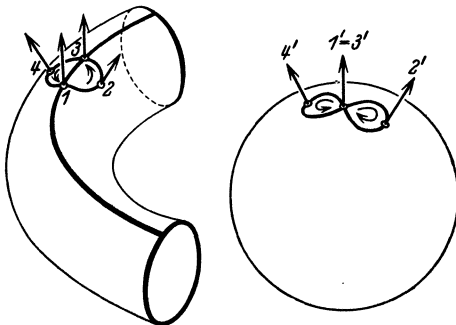


Abb. 212.

Unser Beispiel ist charakteristisch für den Fall, daß die Fläche längs eines ganzen (notwendig parabolischen) Kurvenstücks von derselben Ebene berührt wird. Dagegen veranschaulicht das Beispiel der Glocke den Fall, daß die Tangentialebene sich längs der parabolischen Kurve ändert. Bei beiden Beispielen trennt die parabolische Kurve auf der Fläche ein Gebiet positiver von einem Gebiet negativer GAUSSScher Krümmung.

Als letztes Beispiel betrachten wir nun eine Fläche mit einem parabolischen Punkt, der isoliert in einem sonst sattelförmig gekrümmten Gebiet liegt (Abb. 213); es ist der S. 169 beschriebene Affensattel. Bei dieser Fläche haben offenbar diejenigen Punkte parallele Normalen, die zu dem parabolischen Punkt diametral liegen. Einer geschlossenen doppelpunktfreien Kurve um diesen Punkt herum entspricht also auf der Kugel eine geschlossene Kurve, die das sphärische Bild des Punkts zweimal umläuft<sup>1</sup>. Ebenso kann man offenbar isolierte parabolische Punkte mit sattelförmiger Umgebung konstruieren, bei denen das sphärische Bild einen einmaligen Umlauf in einen drei- oder beliebig vielfachen verwandelt. Geht man dagegen von einem isolierten parabolischen

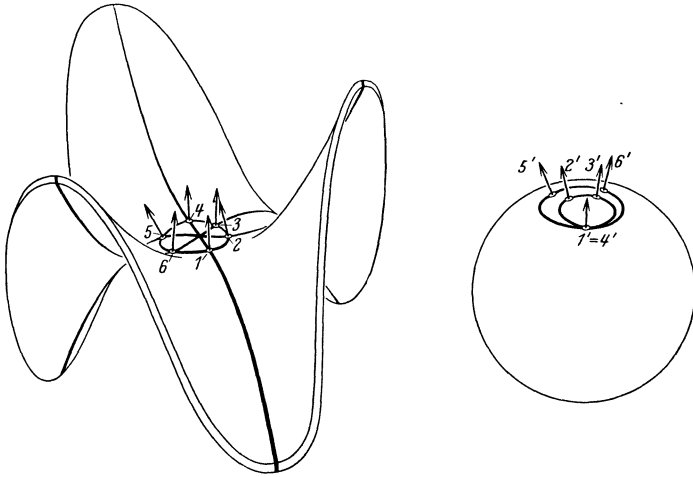


Abb. 213.

Punkt aus, dessen Umgebung elliptische Krümmung aufweist, so läßt sich zeigen, daß das sphärische Bild sich genau so verhält, als wäre die Krümmung überall elliptisch und gar kein parabolischer Punkt vorhanden.

Zum Schluß wollen wir angeben, in welcher Weise sich die Krümmungslinien und die Asymptotenlinien einer Fläche bei der sphärischen Abbildung verhalten. Die Krümmungsrichtungen lassen sich durch die sphärische Abbildung vollständig kennzeichnen; es sind die einzigen Richtungen, die ihren Bildrichtungen parallel sind; nur in den Nabelpunkten versagt dieses Kriterium; dort sind alle Richtungen ihren Bildern parallel. In elliptischen Punkten sind außerdem beide Krümmungsrichtungen mit ihren Bildern gleichgerichtet oder bei anderer Wahl der Normalenrichtung alle beide mit ihren Bildern entgegengesetzt

<sup>1</sup> Der Affensattel wird also durch parallele Normalen auf eine RIEMANNsche Fläche über der Kugel abgebildet, die im Bild des parabolischen Punkts einen Windungspunkt hat (vgl. S. 238). Man beachte in Abb. 213 auch die Umkehrung des Umlaufsinns.

gerichtet, dagegen ist in hyperbolischen Punkten stets eine der Krümmungsrichtungen mit ihrem sphärischen Bild gleichgerichtet, die andere entgegengesetzt gerichtet.

Aus diesem Kriterium können wir leicht die Krümmungslinien der Rotationsflächen bestimmen. Ich behaupte, das sind die Breitenkreise und Meridiane. Diese beiden Kurvenscharen gehen nämlich ersichtlich in ein System von Breitenkreisen und Meridianen auf der Kugel über, und zwar so, daß jede Richtung ihrer Bildrichtung parallel ist. Die beiden Pole konvexer geschlossener Rotationsflächen sind somit stets Nabelpunkte.

Die Asymptotenrichtungen haben eine andere Eigenschaft. Sie stehen nämlich auf ihrem sphärischen Bild senkrecht und sind die einzigen Richtungen dieser Art. Der Drehungssinn, in dem ich eine

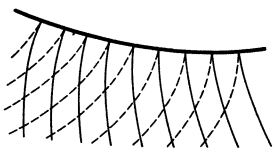


Abb. 214.

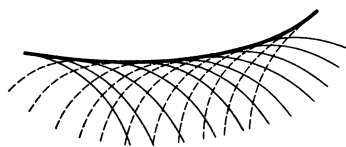


Abb. 215.

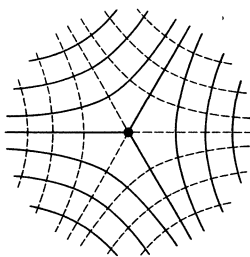


Abb. 216.

Asymptotenrichtung in der Tangentialebene drehen muß, um ihre Bildrichtung zu erhalten, ist stets für beide Asymptotenrichtungen entgegengesetzt. Das hängt damit zusammen, daß die sphärische Abbildung den Umlaufsinn sattelförmig gekrümmter Flächenstücke stets umkehrt.

Da die Asymptotenlinien nur den hyperbolischen Teil der Fläche bedecken, müssen sie in der Nähe parabolischer Kurven ein singuläres Verhalten zeigen. Falls die parabolische Kurve eine veränderliche Tangentialebene hat wie bei der Glocke, haben die Asymptotenlinien Spitzen längs der parabolischen Kurve (Abb. 214). Falls dagegen alle Punkte einer parabolischen Kurve dieselbe Tangentialebene haben, so wie beim Torus, ist die parabolische Kurve die Einhüllende der Asymptotenlinien, d. h. sie berührt in jedem Punkt eine Asymptotenlinie (Abb. 215). Den Verlauf der Asymptotenlinien auf einem Affensattel kennzeichnet Abb. 216. Es laufen gerade  $n$  Asymptotenlinien durch einen Punkt dieser Art, wenn ein geschlossener Umlauf um ihn durch das sphärische Bild in einen  $n - 1$ -fachen Umlauf verwandelt wird.

### § 30. Abwickelbare Flächen, Regelflächen.

Wir haben bei unseren Betrachtungen über die parabolischen Punkte bisher den Fall ausgeschlossen, daß eine Fläche nur aus parabolischen Punkten besteht. Dieser Fall soll jetzt seiner besonderen Wichtigkeit wegen ausführlich besprochen werden.

Beispiele solcher Flächen haben wir bereits in allen den Flächen kennengelernt, die aus einem Stück der Ebene durch Verbiegung hervorgehen. Es gilt nun allgemein der Satz, daß sich zwei Flächen ineinander durch Verbiegung überführen lassen, wenn auf beiden Flächen die GAUSSSche Krümmung überall denselben *konstanten* Wert hat<sup>1</sup>.

Nach diesem Satz kann man durch die Verbiegung von Ebenenstücken schon sämtliche Flächen überall verschwindender GAUSSScher Krümmung erhalten. Wegen dieser Erzeugungsweise nennt man die Flächen auch „abwickelbare Flächen“.

Es gibt noch zwei ganz andere Arten, die abwickelbaren Flächen zu erzeugen. Zunächst sind abwickelbar alle Flächen, die von einer einparametrischen Ebenenschar eingehüllt werden. Die veränderliche Ebene berührt eine solche Fläche längs einer ganzen Geraden; man erhält diese Gerade durch Grenzübergang aus der Schnittgeraden der Ebene mit einer ihrer Nachbarlagen. Die Gerade ist parabolische Kurve der Fläche, da die Fläche ja längs der Geraden eine und dieselbe Tangentialebene hat. Da ferner die Gesamtheit dieser Geraden die ganze Fläche überdeckt, muß diese in der Tat aus lauter parabolischen Punkten bestehen. Merkwürdigerweise gilt nun auch umgekehrt der Satz, daß man auf diese Art alle abwickelbaren Flächen erhalten kann. Demnach sind die abwickelbaren Flächen sämtlich Regelflächen<sup>2</sup>.

Da drei Ebenen stets einen Schnittpunkt haben<sup>3</sup>, ist es plausibel, daß sich benachbarte Erzeugende einer abwickelbaren Fläche stets schneiden. Dies kann analytisch bewiesen werden und führt zur dritten Erzeugungsart der abwickelbaren Flächen. Die Schnittpunkte benachbarter Geraden beschreiben nämlich eine Kurve, und es läßt sich die anschauliche Vermutung bestätigen, daß diese Raumkurve von den Erzeugenden nicht geschnitten, sondern berührt wird. Wir können unsere Flächen also auch als diejenigen Flächen definieren, die von den Tangenten einer beliebigen Raumkurve überstrichen werden. Die

<sup>1</sup> Bei Flächen *veränderlicher* GAUSSScher Krümmung gibt es keine ähnlich einfache hinreichende Bedingung dafür, daß die Flächen sich ineinander durch Verbiegung überführen lassen. Notwendig ist, daß man die Flächen so aufeinander abbilden kann, daß sie in entsprechenden Punkten die gleiche GAUSSSche Krümmung besitzen. Diese Bedingung reicht aber nicht hin. Man kann sich das leicht am Beispiel von Rotationsflächen klarmachen.

<sup>2</sup> Dagegen gibt es im vierdimensionalen Raum abwickelbare Flächen, die nicht Regelflächen sind. Vgl. S. 301, 302.

<sup>3</sup> Parallelismus ist hierbei als Schnitt im Unendlichen aufzufassen.

Fläche wird dann zugleich eingehüllt von den Schmiegungebenen der Kurve. Allein die Kegel und Zylinder entziehen sich dieser Darstellung, während sie durch die vorige Methode offenbar erzeugt werden können.

Aus der zweiten Darstellung läßt sich sofort das sphärische Bild aller abwickelbaren Flächen mit Ausnahme der Ebene bestimmen. Die einhüllenden Ebenen sind ja die Gesamtheit der Tangentialebenen der Fläche. Sie und ebenso ihre Normalenrichtungen bilden also eine Schar, die nur von *einem* veränderlichen Parameter abhängt. Also ist das sphärische Bild der abwickelbaren Fläche stets eine Kurve, und zwar das Binormalenbild der Raumkurve, deren Tangenten die Fläche überstreichen. Daß bei den Flächen der Krümmung Null das sphärische Bild auf eine Kurve zusammenschrumpft, war auch nach der ursprünglichen Definition der GAUSSSSchen Krümmung zu erwarten. Danach hat nämlich das sphärische Bild jedes solchen Flächenstücks den Inhalt Null.

Wir wickeln nun die Tangentenfläche irgendeiner Raumkurve auf die Ebene ab. Dann muß die Raumkurve in eine ebene Kurve übergehen, und die Erzeugenden der Fläche gehen in die Tangenten dieser ebenen Kurve über. Jedem Bogen der Raumkurve entspricht ein gleich langer Bogen der ebenen Kurve. Es läßt sich aber außerdem zeigen, daß beide Kurven in entsprechenden Punkten auch gleiche Krümmung besitzen<sup>1</sup>.

Geht man umgekehrt von einem ebenen konvexen Kurvenbogen  $s$  aus und schneidet das auf der Innenseite der Kurve gelegene Ebenenstück weg, so läßt sich das übrigbleibende Ebenenstück so verbiegen, daß die Raumkurve, in die der Bogen  $s$  übergeht, in allen Punkten seine Krümmung behält. Dabei kann man, wie sich analytisch beweisen läßt, dieser Raumkurve jede beliebige Torsion erteilen. Eine solche Formänderung einer Raumkurve, bei der Bogenlänge und Krümmung erhalten bleiben, während die Torsion sich ändert, nennt man „Verwindung“ der Raumkurve.

Bei unserer Verbiegung der Ebene bleiben offenbar die Tangenten von  $s$  stets geradlinig, während alle übrigen Geraden der Ausgangsebene gekrümmt werden<sup>2</sup>. Es zeigt sich aber, daß wir durch die Verbiegung des Ebenenstücks keineswegs die ganze Tangentenfläche der Raumkurve  $t$  erhalten, die aus  $s$  hervorgeht. Die Fläche, die wir kon-

<sup>1</sup> Das ist anschaulich einleuchtend; denn der Winkel benachbarter Tangenten bleibt bei der Verbiegung ungeändert, und die Krümmung ist der Grenzwert des Quotienten dieses Winkels und des zugehörigen Bogens.

<sup>2</sup> Bei einer ganz beliebigen Verbiegung des Ebenenstückes ändert sich natürlich auch die Krümmung von  $s$ . Damit nun die Krümmung von  $s$  erhalten bleibt, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, daß die Tangenten von  $s$  geradlinig bleiben. Wir erhalten daher ein brauchbares Modell, wenn wir das Ebenenstück aus Papier ausschneiden und einige Halbtangenten von  $s$  durch aufgeklebte Stäbe versteifen.

struiert haben, enthält nämlich von allen Tangenten von  $t$  nur den einen vom Berührungspunkt begrenzten Halbstrahl. Ziehe ich diese Halbtangenten zu vollen Geraden aus, so erhalte ich ein zweites Flächenstück, das mit dem ersten zusammen die Tangentenfläche von  $t$  bildet. Beide Flächenstücke stoßen in  $t$  in einer scharfen Kante zusammen, die man die Rückkehrkante der Fläche nennt. Wenn man nun  $t$  wieder stetig in die Kurve  $s$  verwindet, schließen sich die beiden Teile immer enger aneinander und fallen schließlich beide in die Ebene  $s$ . Man erhält die volle Tangentenfläche von  $t$ , indem man den äußeren Teil der Ebene von  $s$  in zwei Exemplaren übereinanderlegt, längs  $s$  zusammenheftet und dann bei der Verwindung von  $s$  die beiden Blätter auseinanderzieht. Hierbei ist es wesentlich, daß die Krümmung von  $s$  nirgends verschwindet. Geht man dagegen von Kurven mit Wendepunkten aus, so besteht die Tangentenfläche im allgemeinen aus vier Blättern, die im Wendepunkt zusammenstoßen und von denen zwei längs der Wendetangente zusammenhängen.

Wir fragen nun nach den Regelflächen, die nicht abwickelbar sind. Nach dem Vorigen müssen es diejenigen sein, bei denen zwei benachbarte Erzeugende zueinander windschief sind. Denn abwickelbar ist die Fläche ja dann und nur dann, wenn benachbarte Erzeugende sich schneiden.

Durch naheliegende Verallgemeinerung des Gedankenganges, der zu jeder abwickelbaren Fläche eine auf ihr verlaufende Raumkurve, die Rückkehrkante, bestimmt, läßt sich auch zu jeder anderen Regelfläche eine entsprechende Kurve, die „Striktionslinie“, bestimmen. Wir greifen dazu aus der Schar der auf der Fläche verlaufenden Geraden zwei Erzeugende  $a$  und  $b$  heraus und ziehen ihr gemeinsames Lot (Abb. 217). Bekanntlich ist das die kürzeste Verbindung zwischen  $a$  und  $b$ .  $A$  sei der Fußpunkt dieses Lotes auf  $a$ .

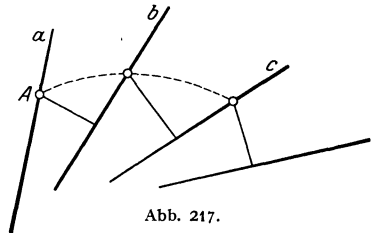


Abb. 217.

Lassen wir  $b$  in der Geradenschar immer näher an  $a$  heranrücken, so nähert sich  $A$  einer Grenzlage, die wir den Kehlpoint von  $a$  nennen. Er entspricht dem Punkt, in dem eine Erzeugende einer abwickelbaren Fläche die benachbarte Erzeugende und die Rückkehrkante trifft.

Die Striktionslinie ist die Kurve, die der Kehlpoint beschreibt, wenn  $a$  alle Erzeugenden der Fläche durchläuft. Es wäre ein Trugschluß, zu glauben, daß die Striktionslinie alle Erzeugenden senkrecht trifft. Denn sind  $a$ ,  $b$ ,  $c$  drei benachbarte Erzeugende (Abb. 217), so hat im allgemeinen das gemeinsame Lot von  $b$  und  $c$  einen anderen Fußpunkt auf  $b$  als das gemeinsame Lot von  $b$  und  $a$ . Deshalb hat die Verbindungslinie der Kehlpointe nicht notwendig die Richtung der gemein-

samen Lote, braucht also die Erzeugenden nicht senkrecht zu treffen. Z. B. wird die Striktionslinie des einschaligen Rotationshyperboloids durch den Kehlkreis gebildet, und dieser steht offenbar auf den Geraden des Hyperboloids nirgends senkrecht.

Die Regelflächen sind einparametrische Mannigfaltigkeiten von Geraden. Sie haben deshalb gewisse Analogien zu den Raumkurven, den einparametrischen Mannigfaltigkeiten von Punkten. So kann man für Regelflächen einen Begriff einführen, der der Krümmung der Raumkurven entspricht; es ist die sog. Striktion oder der Drall. Man dividiert den Winkel zweier Erzeugenden durch ihren kürzesten Abstand und bezeichnet als Drall den Grenzwert, dem dieser Quotient zustrebt, wenn die Erzeugenden zusammenrücken.

Der Drall ist kennzeichnend für die Lageänderung der Tangentialebene längs einer Regelgeraden. Offenbar kann sich die Tangentialebene, wenn ihr Berührungspunkt eine Regelgerade durchläuft, nur um diese Gerade drehen, da sie sie stets enthalten muß. Wie man analytisch zeigen kann, ist nun die Stellung der Tangentialebene in einem Punkt  $P$  der Erzeugenden  $a$  vollständig bestimmt durch die Tangentialebene im Kehlpunkt  $A$  von  $a$ , durch den Abstand  $PA$  und durch den Drall der Regelfläche in  $a$ . Die Verteilung der Tangentialebenen läßt sich folgendermaßen beschreiben: Wenn  $P$  auf  $a$  von  $A$  aus nach einer Seite stetig bis ins Unendliche wandert, so wächst der Winkel, den die Tangentialebene in  $P$  mit der Tangentialebene in  $A$  bildet, stetig bis zu einem Rechten. Auf der anderen Seite von  $A$  verhalten sich die Tangentialebenen entsprechend und symmetrisch zum Kehlpunkt  $A$ . Liegen zwei Punkte  $P$  und  $Q$  der Geraden zu beiden Seiten gleich weit von  $A$  entfernt, so halbiert die Tangentialebene von  $A$  den Winkel der Tangentialebenen vom  $P$  und  $Q$ .

Hieraus folgt: Wenn zwei Regelflächen in je einer Erzeugenden gleichen Drall besitzen, so kann man sie so aufeinanderlegen, daß jene beiden Erzeugenden sich decken und daß überdies die Flächen einander längs jener Erzeugenden überall berühren. Man hat nur dafür zu sorgen, daß die Kehlpunkte und die Tangentialebenen in ihnen sich decken, und hat dann möglicherweise die eine Fläche gegen die andere noch um zwei Rechte zu drehen, so daß dabei die Kehlpunkte und ihre Tangentialebenen in Deckung bleiben. Diese Tatsache ist in der Kinematik von Bedeutung (vgl. S. 252).

Die abwickelbaren Flächen werden durch den Drall in verschiedener Weise gekennzeichnet. Offenbar sind nämlich die Zylinder identisch mit den Flächen, auf denen der Drall verschwindet; denn benachbarte Erzeugende bilden miteinander den Winkel Null. Dagegen besitzen die Kegel und die Tangentenflächen der Raumkurven unendlichen Drall; denn benachbarte Erzeugende dieser Flächen haben den Abstand Null.

Das sphärische Bild der abwickelbaren Flächen haben wir bestimmt. Auch bei den Regelflächen von endlichem Drall zeigt das sphärische Bild ein einfaches Verhalten. Die Normalen aller Punkte einer Regelgeraden sind einer festen Ebene parallel, der Normalebene der Geraden. Das sphärische Bild der Geraden ist daher jedenfalls ein Großkreisbogen. Nun dreht sich die Normale jedesmal stetig um einen rechten Winkel, wenn ihr Fußpunkt vom Kehlpunkt aus nach beiden Seiten hin auf der Geraden ins Unendliche wandert. Das sphärische Bild der Geraden ist also ein Halbkreis. Die beiden Endpunkte des Halbkreises entsprechen unendlich fernen Punkten der Geraden, das sphärische Bild des Kehlpunkts halbiert den Halbkreis.

Zum Schluß wollen wir noch eine besonders einfache Regelfläche von konstantem Drall konstruieren (Abb. 218). Es liegt dann nahe, als Striktionslinie wieder eine Gerade zu wählen, die auf allen Erzeugenden der Fläche senkrecht steht. Ist  $d$  der (konstante) Drall der Fläche und sind  $a$  und  $b$  zwei Erzeugende, die miteinander den Winkel  $\alpha$  bilden und die Striktionsgerade in  $A$  und  $B$  treffen, so gilt stets die Gleichung:

$$\alpha = AB \cdot d .$$

Die Fläche geht daher in sich über, wenn man um die Striktionsgerade als Achse eine Schraubung von der Ganghöhe  $d$  ausführt. Man nennt die Fläche wegen dieser Eigenschaft eine Schraubenfläche. Die allgemeinste Schraubenfläche erhält man, wenn man eine beliebige Raumkurve durch eine gleichmäßige Schraubung um eine feste Achse alle möglichen Lagen annehmen läßt. Unsere spezielle Regel-Schraubenfläche ergibt sich also, wenn man als erzeugende Kurve eine Gerade wählt, die die Achse senkrecht schneidet. Diese Fläche wird Wendelfläche genannt.

Die analytische Betrachtung ergibt nun, daß die Wendelfläche eine Minimalfläche ist (vgl. Abb. 219). Wir haben schon früher (S. 169) ein Beispiel einer Minimalfläche angegeben, das Katenoid. Diese beiden Flächen stehen miteinander in einer engen Beziehung. Man kann nämlich die Wendelfläche durch Verbiegung in das Katenoid überführen. Dabei hat man die Schraubenfläche unendlich oft um die Rotationsfläche herumzulegen, in derselben Weise, wie man die Ebene auf einen Kreiszyylinder aufwickeln kann. Die Striktionsgerade muß

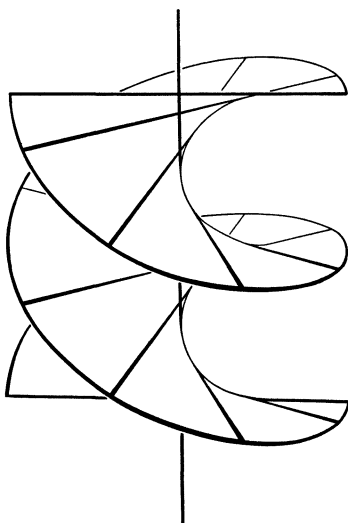


Abb. 218.



dabei den engsten Breitenkreis der Rotationsfläche überdecken, und die Regelgeraden gehen in die Meridiane über<sup>1</sup>.

Die Schraubenflächen und ihre Beziehung zu den Rotationsflächen werden wir später allgemein behandeln.

### § 31. Verwindung von Raumkurven.

Die Theorie der abwickelbaren Flächen hat uns auf ein Verfahren geführt, eine Raumkurve so abzuändern, daß ihre Bogenlängen und ihre Krümmung erhalten bleiben und nur die Torsion variiert. Eine solche Formänderung hatten wir als „Verwindung“ der Raumkurve bezeichnet. Insbesondere kann man jede Raumkurve  $t$  durch Verwindung in eine ebene Kurve  $s$  überführen, und die Gestalt von  $s$  ist durch  $t$  vollständig bestimmt; denn auf  $s$  ist die Krümmung als Funktion der Bogenlänge bekannt,

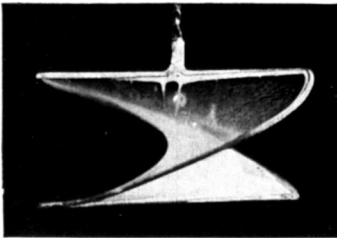


Abb. 219.

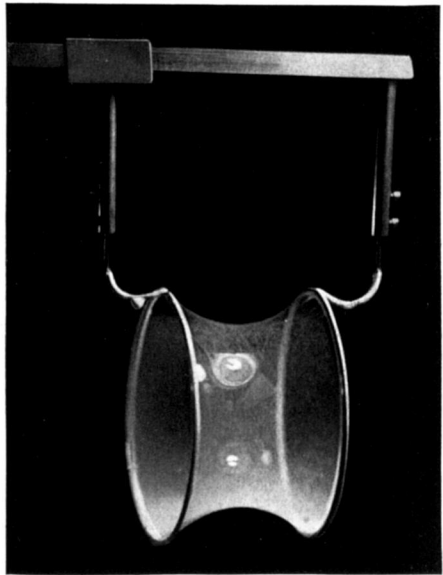


Abb. 220.

und nach § 26 ergibt sich daraus die Gestalt von  $s$  eindeutig. Zwischen  $s$  und  $t$  besteht nun eine merkwürdige Beziehung.

Die Theorie der geodätischen Krümmung — ein Begriff, auf den wir hier nicht näher eingehen — liefert eine einfache Ungleichung, die wir im folgenden brauchen (Abb. 221 a, b): Verläuft  $t$  auf einer abwickelbaren Fläche und führen wir  $t$  in eine ebene Kurve  $t'$  dadurch über, daß wir jene Fläche auf die Ebene abwickeln, so ist die Krümmung  $k'$  von  $t'$  nie größer und im allgemeinen sogar kleiner als die Krümmung  $k$  in entsprechenden Punkten von  $t$ . Bezeichnet nämlich  $\alpha$  den Winkel, den die

<sup>1</sup> Man beachte, daß bei der Verbiegung keineswegs die Schraubungsachse in die Rotationsachse übergeht, sondern in einen dazu senkrechten Kreis. Deshalb ist in den Abb. 219 und 220 die Achse der Wendelfläche vertikal, die des Katenoids horizontal angenommen worden.

Schmiegungeebene von  $t$  mit der zugehörigen Tangentialebene der abwickelbaren Fläche einschließt, so gilt:

$$k' = k \cdot \cos \alpha.$$

Aus diesem Hilfssatz läßt sich nun der merkwürdige Satz ableiten: *Bei jeder Verwindung eines ebenen konvexen Kurvenbogens wachsen alle Sehnen.*

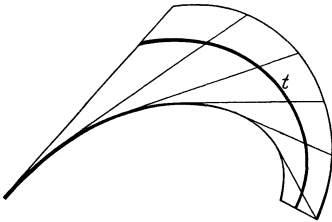


Abb. 221 a.

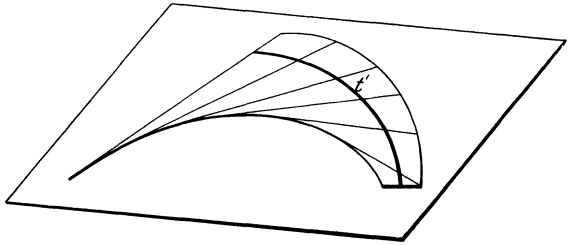


Abb. 221 b.

Zum Beweis betrachten wir den ebenen konvexen Bogen  $s$  mit den Endpunkten  $A, B$  (Abb. 222 a). Durch Verwindung von  $s$  entstehe der Raumkurvenbogen  $t$  mit den Endpunkten  $C, D$ . Wir haben zu zeigen,

daß die geradlinige Strecke  $CD$  länger ist als die Strecke  $AB$ . Wir legen nun durch den Bogen  $t$  einen Kegel mit der Spitze  $C$  (Abb. 222 b). Wir wickeln diesen Kegel auf die Ebene von  $s$  ab. Dann entsteht aus  $t$  eine ebene Kurve  $t'$  mit den Endpunkten  $E, F$  (Abb. 222 c). Die Strecken  $EF$  und  $CD$  sind gleich, denn  $CD$  ist eine Mantellinie unseres Kegels, bleibt daher bei der Abwicklung geradlinig und wird längentreu auf die Gerade  $EF$  abgebildet. Wir haben also jetzt nur noch zu zeigen, daß  $EF$

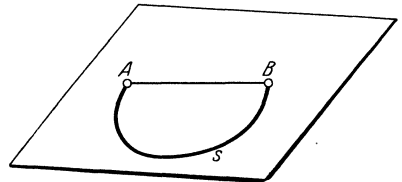


Abb. 222 a.

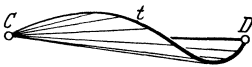


Abb. 222 b,

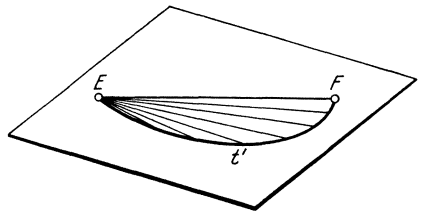


Abb. 222 c.

länger ist als  $AB$ . Nun haben die Kurvenbögen  $s$  und  $t'$  gleiche Länge, und nach unserem Hilfssatz ist die Krümmung von  $t'$  stets kleiner als die Krümmung im entsprechenden Punkt von  $t$ , also auch von  $s$ . Wir können demnach  $s$  in die Gestalt  $t'$  überführen, indem wir den Punkt  $A$  festhalten und bei gleichbleibender Bogenlänge die Krümmung von  $s$

überall abschwächen. Aus der Konvexität von  $s$  ergibt sich anschaulich, daß bei unserer Deformation der Punkt  $B$  immer weiter von  $A$  wegrückt. Das läßt sich auch leicht analytisch bestätigen. Damit ist die Ungleichung  $EF > AB$ , also auch unsere Behauptung bewiesen.

Der Einfachheit halber wollen wir das Ergebnis auf diejenigen Kurven anwenden, die durch Verwindung aus einem Kreisbogen entstehen; also auf die Raumkurven konstanter Krümmung. Wir können dann durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Figur immer erreichen, daß diese Krümmung den Wert Eins hat. Daher wollen wir uns von vornherein auf diesen Fall beschränken. Wir betrachten alle Raumkurven der Krümmung Eins, die zwei feste Punkte  $A$  und  $B$  miteinander verbinden. Damit unter diesen Kurven auch Kreisbögen vorkommen, wollen wir annehmen, daß die Entfernung  $AB$  kleiner ist als Zwei. Dann läßt sich in der Tat durch  $A, B$  ein Kreis vom Radius Eins legen.

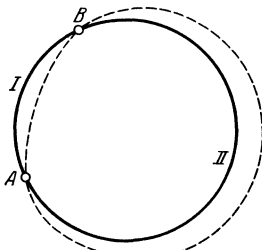


Abb. 223.

Die beiden Punkte zerlegen die Peripherie in einen kürzeren Bogen  $I$  und einen längeren Bogen  $II$  (Abb. 223). Es besteht nun folgende zunächst paradox klingende Tatsache: Der kürzere Bogen  $I$  ist länger als alle benachbarten Kurvenbögen unserer Schar, der längere Bogen  $II$  dagegen ist kürzer als die benachbarten.

Dabei sind allein die Bögen auszunehmen, die aus  $I$  und  $II$  durch Rotation um  $AB$  entstehen; diese haben natürlich gleiche Länge wie  $I$  bzw.  $II$ . Es ist also von den Bögen die Rede, die aus  $I$  bzw. aus  $II$  durch Verwindung entstehen.

Wir beweisen gleich allgemein: Wenn ein nichtebener Bogen  $t$  konstanter Krümmung Eins die Punkte  $A$  und  $B$  verbindet und nicht länger ist als  $II$ , so ist er kürzer als  $I$ .

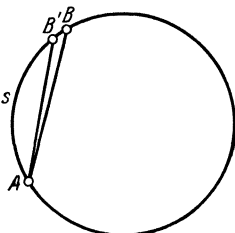


Abb. 224.

Wir führen  $t$  durch Verwindung in einen ebenen Kreisbogen  $s$  über, den wir so auf den durch  $AB$  gezeichneten Kreis legen, daß der eine Endpunkt von  $s$  in den Punkt  $A$  fällt (Abb. 224). Der andere Endpunkt von  $s$  ist dann ein Punkt  $B'$  der Kreisperipherie. Nach dem früher bewiesenen Satz ist nun die Sehne  $AB'$  kürzer als die Sehne  $AB$ . Die Länge des Bogens  $t$  muß gleich der Länge eines der Bögen sein, in die  $AB'$  den Kreis zerlegt.

Von diesen beiden Bögen ist der eine länger als  $II$ , kommt also nach Voraussetzung nicht in Frage; also ist  $t$  so lang wie der andere Kreisbogen, also kürzer als  $I$ .

Wir haben damit bewiesen, daß kein Bogen der Krümmung Eins existiert, der  $A$  mit  $B$  verbindet, und dessen Länge zwischen den Längen

von  $I$  und  $II$  liegt. Wir fragen nun, ob es für die Längen solcher Bögen noch weitere Einschränkungen gibt.

Zunächst ist leicht einzusehen, daß der Bogen beliebig lang sein kann. Denn unter den Kurven konstanter Krümmung sind (vgl. S. 161) insbesondere die Schraubenlinien enthalten. Die Ganghöhe dieser Schraubenlinien können wir so klein annehmen, wie wir wollen. Also können wir auf einer solchen Schraubenlinie auch die Zahl der Umläufe zwischen zwei Punkten der Entfernung  $AB$  beliebig groß machen. Bei hinreichend kleiner Ganghöhe hat aber jeder Umlauf ungefähr die Länge des Einheitskreises. Die Bogenlänge zwischen  $A$  und  $B$  kann also in der Tat unbegrenzt groß sein (Abb. 225).

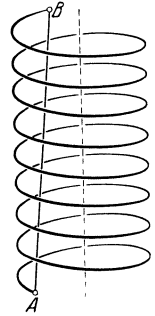


Abb. 225.

Unbegrenzt klein kann dagegen ein solcher Bogen nicht sein; seine Länge muß ja die geradlinige Entfernung  $AB$  übersteigen. An diese untere Grenze kann man aber beliebig nahe herankommen. Wenn man nämlich auf einer Schraubenlinie der Krümmung Eins die Ganghöhe sehr groß wählt, so wird die Tangente der Schraube fast parallel der Achse, und die Entfernung der Schraubenlinie von der Achse wird beliebig klein. Ein Bogen einer solchen Schraubenlinie unterscheidet sich daher beliebig wenig von seiner Sehne (Abb. 226), und das beweist unsere Behauptung.



Abb. 226.

Wir haben also gefunden, daß das Problem, zwei feste Punkte durch einen möglichst kurzen Kurvenbogen der Krümmung Eins zu verbinden, keine Lösung besitzt. Durch eine scheinbar ähnliche Minimalbedingung hatten wir früher die Minimalflächen charakterisiert, ebenso hat RIEMANN wichtige Sätze der Funktionentheorie auf Minimalbedingungen zurückgeführt. Wir sehen hier, daß die scheinbar selbstverständliche Annahme, daß für jedes Minimalproblem eine Lösung existiert, in jedem Fall der Nachprüfung bedarf und keineswegs immer zutrifft. Diese Existenzbeweise gehören bisher zu den mühsamsten Aufgaben der Analysis (vgl. § 38, 39).

Es gibt ein ganz einfaches Beispiel für ein Minimalproblem ohne Lösung: Es seien zwei Punkte  $A$  und  $B$  durch einen möglichst kurzen Kurvenbogen derart zu verbinden, daß der Bogen in  $A$  auf der Geraden  $AB$  senkrecht steht. Auch in diesem Beispiel kann man die geradlinige Entfernung  $AB$  beliebig annähern, aber nie erreichen, weil die gerade Strecke  $AB$  unserer Bedingung nicht genügt (Abb. 227).

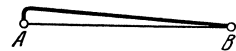


Abb. 227.

Endlich sei ein Minimalproblem erwähnt, bei dem die Existenz der Lösung lange umstritten war. In einer Ebene soll ein Stab  $AB$  so bewegt

werden, daß er sich zum Schluß um zwei Rechte gedreht hat und daß er bei der Bewegung eine Fläche von möglichst kleinem Inhalt überstreicht. Erst in neuester Zeit hat BESICOVITCH (Math. Z. **27**, 1928) bewiesen, daß dieses Problem nicht lösbar ist. Man kann durch zickzackartige Bewegung die überstrichene Fläche beliebig klein machen (vgl. S. 247).

## § 32. Elf Eigenschaften der Kugel.

Wir haben die Flächen verschwindender GAUSSscher Krümmung kennengelernt. Wir fragen jetzt nach den Flächen konstanter positiver oder negativer Krümmung. Die bei weitem einfachste und wichtigste Fläche dieser Art ist die Kugel. Eine gründliche Untersuchung der Kugel ist allein Stoff genug für ein ganzes Buch. Wir wollen hier nur elf besonders anschauliche Eigenschaften der Kugel anführen. Wir werden dabei mehrere neue Begriffe kennenlernen, die nicht nur für die Geometrie der Kugel, sondern auch für die allgemeine Flächentheorie von Bedeutung sind. Bei jeder der zu besprechenden Eigenschaften stellen wir die Frage, ob durch sie die Kugel eindeutig definiert ist oder ob noch andere Flächen dieselbe Eigenschaft besitzen.

*1. Die Kugel besitzt konstanten Abstand von einem festen Punkt und konstantes Abstandsverhältnis von zwei festen Punkten.*

Die erste dieser beiden Eigenschaften ist die elementare Definition der Kugel und bestimmt sie daher eindeutig. Daß die Kugel auch die zweite Eigenschaft besitzt, läßt sich analytisch sofort einsehen. Durch diese zweite Eigenschaft kann aber außer der Kugel auch die Ebene definiert werden; eine Ebene ergibt sich nämlich dann und nur dann, wenn das Abstandsverhältnis den Wert Eins hat. Man erhält dann die Symmetrieebene der beiden Punkte.

*2. Die Umriss- und ebenen Schnitte der Kugel sind Kreise.*

Bei der Betrachtung der Flächen zweiter Ordnung hatten wir den Satz kennengelernt, daß alle ebenen Schnitte und Umriss- dieser Flächen Kegelschnitte sind. Bei der Kugel sind alle diese Kegelschnitte Kreise. Durch diese Tatsache wird die Kugel eindeutig bestimmt. Wir sind daher berechtigt, aus dem Auftreten eines stets kreisförmigen Erdschattens bei den Mondfinsternissen auf die Kugelgestalt der Erde zu schließen.

*3. Die Kugel besitzt konstante Breite und konstanten Umfang.*

Als konstante Breite bezeichnet man die Eigenschaft der Kugel, daß zwei parallele Tangentialebenen stets den gleichen Abstand voneinander haben. Man kann also die Kugel zwischen zwei solchen Ebenen noch beliebig hin und her drehen. Man sollte meinen, daß durch diese Eigenschaft die Kugel eindeutig bestimmt wird. In Wahrheit gibt es aber noch zahlreiche andere konvexe geschlossene und zum Teil völlig singularitätenfreie Flächen, die ebenfalls konstante Breite besitzen, die

sich also ebenfalls zwischen zwei parallelen Platten hin und her drehen lassen und die Platten dabei ständig berühren. Eine solche Fläche ist in Abb. 228 in zwei verschiedenen Stellungen dargestellt.

Man kann den Begriff der konstanten Breite auch auf Kurven übertragen; man schreibt einer ebenen konvexen geschlossenen Kurve diese Eigenschaft zu, wenn zwei parallele Tangenten stets denselben Abstand haben. Der Kreis ist eine Kurve dieser Art, aber keineswegs die einzige; von den beiden Kurvenbögen, in die eine konvexe geschlossene Kurve konstanter Breite durch die Berührungspunkte paralleler Tangenten zerlegt wird, kann man den einen beliebig vorgeben; dann läßt sich der andere stets (eindeutig) so hinzubestimmen, daß die entstehende geschlossene Kurve konstante Breite besitzt. Das läßt sich anschaulich

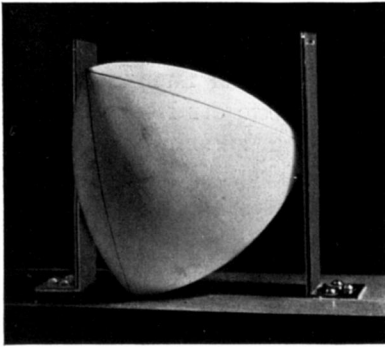


Abb. 228 a.

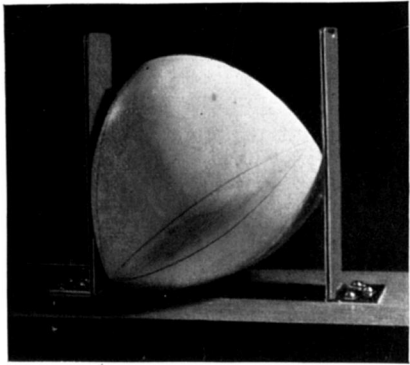


Abb. 228 b.

leicht einsehen. Durch die Tangenten des vorgegebenen Bogens bestimmen sich nämlich eindeutig die Tangenten des zweiten Bogens; man hat zu jeder der vorgegebenen Tangenten in festem Abstand und auf einer bestimmten Seite die Parallele zu ziehen. Der zweite Bogen ist dann einfach die Einhüllende dieser Geradenschar.

Die Körper konstanter Breite sind offenbar dadurch gekennzeichnet, daß alle ihre Umrisse bei senkrechter Parallelprojektion Kurven derselben konstanten Breite sind. Nun gilt der Satz, daß alle Kurven derselben konstanten Breite auch denselben Umfang besitzen. Da man als einen Umfang eines Körpers den Umfang eines seiner Umrisse bei senkrechter Parallelprojektion bezeichnet, so folgt aus dem erwähnten Satz, daß die Körper konstanter Breite auch konstanten Umfang haben. Infolge dieser Eigenschaft kann ich jede Fläche konstanter Breite in einem Papierzylinder, der fest um die Fläche herumgelegt worden ist, noch beliebig hin und her drehen, ohne daß der Papierzylinder sich lockert oder zerreißt.

MINKOWSKI hat umgekehrt gezeigt, daß alle konvexen Flächen konstanten Umfangs auch konstante Breite haben, so daß sich also diese beiden Eigenschaften einer Fläche gegenseitig bedingen<sup>1</sup>.

#### 4. Die Kugel besteht aus lauter Nabelpunkten.

Wir haben diese Eigenschaft schon früher erwähnt und gleichzeitig darauf hingewiesen, daß außer der Kugel nur noch die Ebene diese Eigenschaft besitzt (S. 165). Daß alle Punkte der Kugel Nabelpunkte sind, folgt unter anderem daraus, daß alle ebenen Schnitte der Kugel Kreise sind. Verschiebt man eine Ebene, die die Kugel schneidet, parallel zu sich selbst so lange, bis sie die Kugel in einem Punkt  $P$  berührt, so erkennt man, daß die DUPINSche Indikatrix von  $P$  ein Kreis ist (vgl. S. 170).  $P$  ist also Nabelpunkt.

#### 5. Die Kugel besitzt keine Brennfläche.

Wir haben früher gesehen (S. 163 ff.), daß die Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte eines Flächenpunkts im allgemeinen ein Stück der Normalen dieses Punkts durchlaufen. Die Endpunkte dieses Stücks sind die Krümmungsmittelpunkte, die zu den Hauptkrümmungen gehören. Man nennt diese beiden Punkte die Brennpunkte der Normalen. Die beiden Brennpunkte fallen dann und nur dann zusammen, wenn wir von einem Nabelpunkt ausgehen. Ins Unendliche fällt ein Brennpunkt dann und nur dann, wenn der Flächenpunkt verschwindende GAUSSsche Krümmung hat.

Durchläuft die Normale alle Punkte eines Flächenstücks, so überstreichen die beiden Brennpunkte im allgemeinen zwei Flächen, die man zusammen als die Brennfläche des ursprünglichen Flächenstücks bezeichnet. Bei der Kugel besteht nun die Brennfläche allein aus dem Kugelmittelpunkt, da alle Brennpunkte in diesen Punkt fallen. Die Kugel ist die einzige Fläche, für die ein Teil der Brennfläche in einen Punkt ausartet. Wir fragen nun nach denjenigen Flächen, für die die beiden Teile der Brennfläche in Kurven ausarten. Es ergibt sich, daß die einzigen Flächen dieser Art die nach ihrem Entdecker benannten DUPINSchen *Zykliden* sind (vgl. Abb. 229). Man kann diese Flächen als die Einhüllenden aller Kugeln definieren, die drei feste Kugeln berühren. Die *Zykliden* sind ferner die einzigen Flächen, deren sämtliche Krümmungslinien Kreise sind. Auf den fünf in Abb. 229 photographierten Gipsmodellen sind einige Krümmungslinien markiert. Übrigens wird die *Zyklide* von jeder einhüllenden Kugel in einer Krümmungslinie berührt, und alle Krümmungslinien der *Zykliden* entstehen auf diese Art. Ein Beispiel einer *Zyklide* ist der uns schon bekannte Torus. Seine Brenn-

<sup>1</sup> Verlangt man, daß alle Umrissse eines Körpers konstanten Flächeninhalt anstatt konstanten Umfang besitzen, so kommt man zu einer anderen Flächenklasse, den sog. „Flächen konstanter Helligkeit“. Die Kugel ist eine solche Fläche, jedoch keineswegs die einzige. (Vgl. W. BLASCHKE: Kreis und Kugel. S. 151. Leipzig 1916.)

fläche besteht aus der Rotationsachse und dem Kreis, der vom Mittelpunkt des erzeugenden Kreises bei der Rotation beschrieben wird. Ferner sind die Rotationskegel und Rotationszylinder Zykliden; der eine Teil der Brennfläche ist die Rotationsachse, der andere liegt im unendlichen.

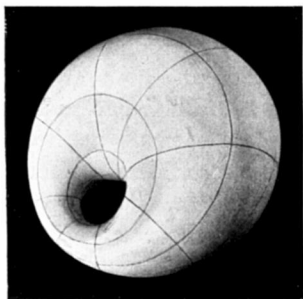


Abb. 229 a.

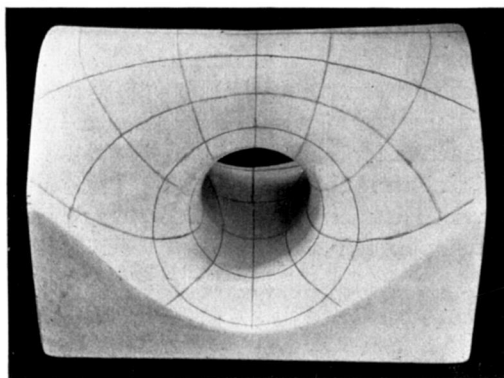


Abb. 229 b.

Bei den übrigen Zykliden besteht die Brennfläche aus zwei Kegelschnitten, im allgemeinen einer Ellipse und einer Hyperbel, die so zueinander liegen wie die Fokalkurven einer Fläche zweiter Ordnung<sup>1</sup>.

Verlangt man nur, daß das eine Stück der Brennfläche in eine Kurve ausartet, so ist die zugehörige Flächenklasse schon viel umfassender

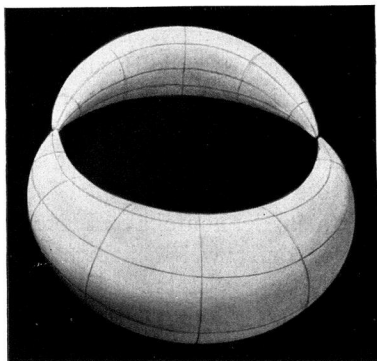


Abb. 229 c.

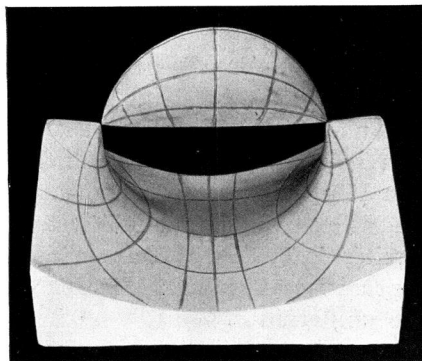


Abb. 229 d.

<sup>1</sup> Die in Abb. 229 a, b dargestellten Flächen gehen aus dem Torus durch Inversion im Raum hervor (vgl. S. 236). Das Inversionszentrum liegt bei Abb. 229 b auf dem Torus, bei Abb. 229 a nicht. Die Flächen von Abb. 229 c, d erhält man durch räumliche Inversion aus einem Rotationskegel; 229 d entspricht dem Fall des auf der Fläche liegenden Inversionszentrums. Abb. 229 e, S. 194 stellt eine Fläche dar, die durch Inversion aus einem Kreiszyylinder hervorgeht; Inversionszentrum nicht auf der Fläche.



Alle Rotationsflächen haben diese Eigenschaft; der eine Teil ihrer Brennfläche wird stets von der Achse gebildet. Die allgemeinsten Flächen dieser Art sind die *Kanalflächen*. Es sind die Einhüllenden einer Kugelschar von variablem Radius, deren Mittelpunkte auf einer Kurve liegen. Diese Kurve ist dann stets der eine Teil der Brennfläche. Wenn man diese Kurve als Gerade wählt, erhält man die Rotationsflächen, die also eine spezielle Art von Kanalflächen sind. Ebenso wie bei den Rotationsflächen besteht auch bei den übrigen Kanalflächen die eine Schar der Krümmungslinien aus Kreisen; es sind die Grenzlagen der Schnittkreise benachbarter Kugeln.

Bei den übrigen krummen Flächen besteht die Brennfläche aus zwei Flächenstücken. Es läßt sich zeigen, daß jede Normale in ihren Brennpunkten diese beiden Flächenstücke nicht schneidet, sondern

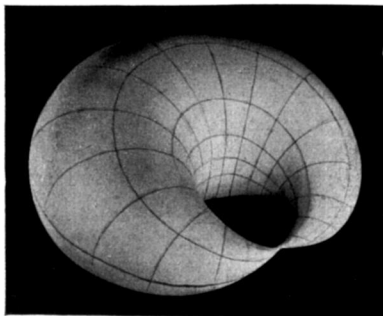


Abb. 229 e.

berührt. Wenn man also die beiden Teile der Brennfläche einer Fläche kennt, so sind die Normalen charakterisiert als die gemeinsamen Tangenten jener beiden Teile. Es entsteht nun die Frage, wie weit man diese Verhältnisse umkehren kann. Wir gehen von zwei beliebigen Flächenstücken aus und betrachten die Schar  $S$  aller Geraden, die alle beide Flächenstücke berühren. Dann fragt es sich, ob es eine Fläche gibt, deren Normalen aus der Schar  $S$

bestehen, ob also die gegebenen beiden Flächenstücke die Brennfläche eine andere Fläche sind. Hierfür ist eine einzige Bedingung notwendig und hinreichend: In den beiden Punkten, in denen jede Gerade von  $S$  die beiden Flächen berührt, müssen die Tangentialebenen der beiden Flächen stets aufeinander senkrecht stehen. Ein Beispiel von Flächenpaaren dieser Art liefert uns das System der konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Man kann nämlich zeigen, daß zwei beliebige ungleichartige konfokale Flächen zweiter Ordnung stets unsere Bedingung erfüllen.

6. *Alle geodätischen Linien der Kugel sind geschlossene Kurven.*

Die geodätischen Linien einer Fläche sind die Verallgemeinerung der Geraden in der Ebene. Wie die Geraden besitzen sie mehrere wichtige Eigenschaften, durch die sie vor allen anderen Flächenkurven ausgezeichnet sind; man kann sie deshalb auf verschiedene Arten definieren. Wir erwähnen die drei Definitionen als *kürzeste*, als *frontale* und als *geradeste*.

Die erste Eigenschaft besagt, daß jeder nichtzulange Teilbogen einer geodätischen Linie die kürzeste auf der Fläche mögliche Verbindung

seiner Endpunkte ist. Hieraus folgt, daß die geodätischen Linien einer Fläche bei Verbiegungen nicht aufhören, geodätisch zu sein. Daher sind die geodätischen Linien grundlegend für die inneren Eigenschaften der Flächen (vgl. S. 172), und man kann durch Zeichnen geodätischer Linien und Messung ihrer Längen alle inneren Eigenschaften einer Fläche (z. B. die GAUSSsche Krümmung) bestimmen; das entspricht der Tatsache, daß man die Geometrie der Ebene vollständig durch das Ziehen von Geraden und das Messen von Strecken kennzeichnen kann. Ebenso wie durch zwei Punkte einer Ebene eine und nur eine Gerade geht, läßt sich durch zwei nicht zu weit entfernte Punkte einer Fläche stets ein und nur ein geodätischer Bogen legen. Man erhält ihn offenbar, wenn man zwischen den beiden Punkten auf der Fläche einen Faden straff zieht<sup>1</sup>.

Die zweite Eigenschaft der geodätischen Linien, „frontal“ zu sein, gehört ebenfalls der inneren Geometrie der Fläche an. Man definiert die geodätischen Linien durch die Forderung, einen unendlich kleinen Kurvenbogen  $AB$  auf der Fläche immer „geradeaus“ zu schieben. Wir verlangen dabei, daß die Bahnen von  $A$  und  $B$  stets gleich lang sind und daß diese Bahnen beide stets auf  $AB$  senkrecht sind. Die Bahn, die dann der Mittelpunkt von  $AB$  beschreibt, wird mit beliebiger Genauigkeit geodätisch, wenn man den Bogen  $AB$  hinreichend klein wählt. Aus dieser Definition wird es plausibel, daß durch jeden Punkt in jeder Richtung genau eine geodätische Linie läuft. Ferner kann ich nach dieser Definition eine Annäherung an die geodätischen Linien dadurch erzeugen, daß ich auf der Fläche einen möglichst kleinen zweirädrigen Karren rollen lasse, dessen Räder starr mit ihrer gemeinsamen Achse verbunden sind, also gleiche Umlaufgeschwindigkeit besitzen. Da wir mit einem Automobil nicht nur die geodätischen Kurven der Erde befahren wollen und zur Schonung des Gummis und aus anderen Gründen jedes Gleiten der Räder gern vermeiden, so müssen wir dafür sorgen, daß die beiden Hinterräder des Automobils verschiedener Umlaufgeschwindigkeit fähig sind.

Die dritte Definition der geodätischen Linien als der „Geradesten“ geht nicht von der inneren Geometrie der Fläche, sondern von ihrer Lagerung im Raum aus. Ein geodätischer Bogen besitzt nämlich in jedem seiner Punkte die kleinste Krümmung unter allen Flächenkurven, die mit dem geodätischen Bogen diesen Punkt und seine Tangente gemein haben. Durch diese Eigenschaft ist jede geodätische Linie in ihrem Gesamtverlauf bestimmt, wenn man einen ihrer Punkte und die zugehörige Richtung vorgibt. Man erhält diese Linie, indem man im vorgegebenen Punkt und in der vorgegebenen Richtung eine elastische gerade Stricknadel einspannt und in die Fläche hineinbiegt, so daß sie sich nur noch

<sup>1</sup> Auf der Außenseite eines konvexen Flächenstücks legt sich der Faden von selbst an die Fläche an; in anderen Fällen muß man anderweitig dafür sorgen, daß der Faden die Fläche nicht verläßt.

längs der Fläche bewegen kann. Da die Nadel jeder Verkrümmung ihren elastischen Widerstand entgegensetzt, wird sie die Gestalt einer geodätischen Linie annehmen.

Man kann die geradesten Linien auch durch die geometrische Forderung kennzeichnen, daß die Schmiegungebene der Kurve stets durch die Flächennormale des Kurvenpunkts gehen soll. Man sieht anschaulich leicht ein, daß dann zwei infinitesimal benachbarte Kurventangenten den kleinsten auf der Fläche möglichen Winkel miteinander bilden. Das kommt aber auf die Bedingung der kleinsten Krümmung hinaus. Die Kennzeichnung durch die Schmiegungebenen hat den geodätischen Linien ihren Namen gegeben. Mit Hilfe dieses Kriteriums werden von den Landmessern (Geodäten) die kürzesten Linien auf der Erdoberfläche abgesteckt.

Die geodätischen Linien der Kugel sind die größten Kreise. Denn deren Ebenen durchsetzen die Kugel senkrecht, und von jedem Punkt läuft in jeder Richtung ein Großkreis aus. Demnach sind alle geodätischen Linien der Kugel geschlossene Kurven. Durch diese Eigenschaft sind aber die Kugeln keineswegs gekennzeichnet; es gibt noch zahlreiche andere konvexe geschlossene Flächen, deren geodätische Linien ebenfalls sämtlich geschlossen sind<sup>1</sup>.

Es liegt nahe, auch bei allen übrigen Flächen nach geschlossenen geodätischen Linien zu suchen. Besonders einfach verhalten sich die Rotationsflächen. Auf ihnen sind die Meridiane sämtlich geodätisch, weil ihre Ebene durch die Achse geht und daher die Fläche senkrecht durchsetzt (früher hatten wir bewiesen, daß die Meridiane auch Krümmungslinien der Fläche sind). Demnach besitzen alle geschlossenen Rotationsflächen eine einparametrische Schar geschlossener geodätischer Linien. Auf anderen Flächen laufen nur vereinzelte Linien dieser Art. So läßt sich zeigen, daß auf dem dreiachsigen Ellipsoid die einzigen geschlossenen geodätischen Linien die drei Ellipsen sind, in denen die Fläche von den drei Symmetrieebenen geschnitten wird.

Umgekehrt gilt der lange vermutete, aber erst kürzlich von LUSTERNIK und SCHNIRELMANN bewiesene Satz, daß auf jeder konvexen geschlossenen Fläche mindestens drei geschlossene geodätische Linien verlaufen.

Die geodätischen Linien sind von großer Bedeutung für die Physik. Ein Massenpunkt, auf den keine Kräfte wirken, der aber gezwungen ist, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben, bewegt sich immer auf einer geodätischen Linie der Fläche. Jede der von uns genannten Definitionen der geodätischen Linie führt zu einem Ansatz für die Gesetze der Punktmechanik; so entspricht die Definition der geodätischen Linie als der Kürzesten dem „JAKOBISCHEN PRINZIP“ der Mechanik, als Geradeste treten sie auf in dem GAUSS-HERTZSCHEN „PRINZIP DES

<sup>1</sup> Als geschlossen bezeichnen wir eine geodätische Linie hier und im folgenden, wenn sie ohne Knick in sich zurückläuft, ohne sich vorher selbst zu durchschneiden.

kleinsten Zwanges“, die Stellung der Schmiegungeebene kommt zum Ausdruck in den LAGRANGESchen Gleichungen erster Art.

Die geodätischen Linien stehen in einer eigenartigen Beziehung zur Theorie der Brennflächen und Krümmungslinien. Wir haben früher erwähnt, daß die Brennflächen von den Normalen der Ausgangsfläche berührt werden. Somit ist jedem Punkt der Brennfläche eine Richtung auf dieser Fläche zugeordnet; nämlich die Richtung derjenigen Normalen der Ausgangsfläche, die die Brennfläche gerade in diesem Punkt berührt. Wie im Falle der Krümmungs- und Asymptotenlinien läßt sich nun auf der Brennfläche dieses Richtungsfeld integrieren, d. h. man kann eine Schar von Kurven angeben, die in jedem Punkt die zugeordnete Richtung haben. Es zeigt sich, daß die so entstehende Kurvenschar aus geodätischen Linien besteht. Die Tangentenflächen dieser geodätischen Linien, die natürlich von Normalen der Ausgangsfläche erzeugt werden, treffen die Ausgangsfläche gerade in deren Krümmungslinien. Und zwar liefert jeder der beiden Teile der Brennfläche eine der beiden Scharen der Krümmungslinien.

Wir haben früher erwähnt, daß zwei konfokale ungleichartige Flächen zweiter Ordnung sich stets als Brennfläche einer Fläche auffassen lassen. Diese Tatsache liefert uns ein Verfahren zur Aufindung aller geodätischen Linien des dreiachsigen Ellipsoids. Wir wählen zu dem gegebenen Ellipsoid  $E$  irgendein mit  $E$  konfokales Hyperboloid  $H$ . Diejenigen Geraden, die sowohl  $E$  als auch  $H$  berühren, bestimmen auf  $E$  ein Richtungsfeld, dessen Integralkurven nach dem eben erwähnten Satz alle geodätisch sind. Man hat auf diese Weise aber noch keineswegs alle geodätischen Linien von  $E$  erhalten, da ja durch jeden Punkt der Fläche in allen Richtungen geodätische Linien laufen, während wir diese Linien nur für ganz bestimmte Richtungen gefunden haben. Man kann die Schar der von uns vorläufig bestimmten geodätischen Linien von  $E$  leicht kennzeichnen: es läßt sich zeigen, daß es alle und nur diejenigen geodätischen Linien von  $E$  sind, die die Schnittkurve von  $E$  und  $H$  berühren (Abb. 230). Sie überdecken das Ellipsoid in ähnlicher Weise wie die Ebene von den Tangenten einer Ellipse überdeckt wird. Die Schnittkurve von  $E$  und  $H$  (die übrigens eine Krümmungslinie von  $E$  ist, wie wir früher erwähnten) trennt das Ellipsoid in verschiedene Teile. Der eine Teil bleibt unbedeckt, während durch jeden Punkt des anderen Teils zwei Kurven der Schar hindurchgehen.

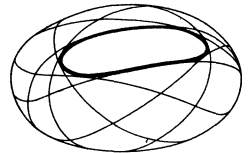


Abb. 230.

Um nun alle geodätischen Linien von  $E$  zu erhalten, braucht man nur  $H$  alle ein- und zweischaligen Hyperboloide des durch  $E$  bestimmten konfokalen Systems durchlaufen zu lassen. Die Fokalhyperbel ist dabei als Grenzfall eines Hyperboloids anzusehen. Als Tangenten dieser ausgearteten Fläche hat man alle Geraden zu betrachten, die die Fokal-

hyperbel treffen. Die Fokalhyperbel schneidet  $E$  in den vier Nabelpunkten. Durch Grenzübergang aus dem Früheren erkennt man, daß die Schar der geodätischen Linien von  $E$ , die zur Fokalhyperbel gehört, aus allen und nur den geodätischen Linien besteht, die durch einen Nabelpunkt von  $E$  gehen<sup>1</sup>. Es ergibt sich ferner, daß jede durch einen Nabelpunkt gezogene geodätische Linie auch den diametral gegenüberliegenden Nabelpunkt von  $E$  durchläuft.

Auf der Kugel gehen die durch einen festen Punkt  $P$  gezogenen geodätischen Linien alle auch durch einen zweiten festen Punkt: den Diametralpunkt von  $P$ . Die geodätischen Linien durch einen Nabelpunkt des Ellipsoids zeigen ein analoges Verhalten. Dagegen läßt sich beweisen, daß die geodätischen Linien durch irgendeinen anderen festen Punkt des Ellipsoids nicht alle noch einen weiteren Punkt gemeinsam haben.

Es liegt nun die Frage nahe, ob die Kugel die einzige Fläche ist, bei der alle geodätischen Linien, die von einem beliebigen festen Punkt auslaufen, sich in einem zweiten festen Punkt wieder treffen. Diese Frage ist bis jetzt nicht beantwortet.

*7. Die Kugel hat unter allen Körpern gleichen Volumens die kleinste Oberfläche und unter allen Körpern gleicher Oberfläche das größte Volumen.*

Die Kugel ist durch beide Eigenschaften (deren jede eine Folge der anderen ist) eindeutig bestimmt. Der Nachweis dieser Tatsache führt auf ein Problem der Variationsrechnung und ist außerordentlich mühsam durchzuführen. Ein einfacher experimenteller Beweis wird aber durch jede frei schwebende Seifenblase gegeben. Wie wir schon anlässlich der Minimalflächen erwähnten, besitzt die Haut der Seifenblase infolge ihrer Oberflächenspannung das Bestreben, ihre Oberfläche auf ein möglichst kleines Maß zusammenzuziehen. Da sich andererseits in der Seifenblase ein bestimmtes unveränderliches Volumen Luft befindet, muß die Seifenblase ein Minimum der Oberfläche bei gegebenem Volumen annehmen. Die Beobachtung zeigt nun, daß derartige Seifenblasen stets Kugelgestalt besitzen, sofern sie nicht durch anhängende Tropfen wesentlich dem Einfluß der Schwere unterworfen sind.

*8. Unter allen konvexen Körpern gleicher Oberfläche besitzt die Kugel das Minimum der totalen mittleren Krümmung.*

Als mittlere Krümmung  $H$  eines Flächenpunkts bezeichnet man das arithmetische Mittel seiner Hauptkrümmungen:

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2).$$

Dabei sind die beiden Hauptkrümmungen mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen zu rechnen, je nachdem die Fläche im betrachteten

<sup>1</sup> Hiermit steht die auf S. 167 beschriebene Fadenkonstruktion in engem Zusammenhang.

Punkt konvexe oder sattelförmige Krümmung aufweist. Im Gegensatz zur GAUSSschen Krümmung bleibt die mittlere Krümmung bei Verbiegungen gewöhnlich nicht erhalten. Sie kennzeichnet daher in erster Linie die Lage der Fläche im Raum.

Ein Beispiel für die Bedeutung dieses Krümmungsbegriffs haben wir bereits in den Minimalflächen kennengelernt. Sie waren dadurch definiert, daß ihre Hauptkrümmungen in jedem Punkt entgegengesetzt gleich sind. Das besagt aber, daß ihre mittlere Krümmung überall verschwindet.

Um nun die *totale* mittlere Krümmung zu gewinnen, denke ich mir die betrachtete Fläche überall mit Masse von der Dichtigkeit der jeweiligen mittleren Krümmung belegt. Die Gesamtmasse, die auf diese Weise der ganzen Fläche zugeteilt ist, nennt man die totale mittlere Krümmung dieser Fläche.

Die Bestimmung der geschlossenen Flächen, deren totale mittlere Krümmung bei gegebener Oberfläche ein Minimum wird, führt wie die vorige Eigenschaft der Kugel auf ein Variationsproblem, und zwar ergibt sich auch hier, daß die Kugel die einzige Fläche ist, welche diese Eigenschaft besitzt.

Die beiden letztgenannten Eigenschaften der Kugel erhält man in der allgemeinen Theorie der konvexen Körper aus gewissen Ungleichungen, deren Prinzip hier wenigstens angedeutet sei. Eine Kugel vom Radius  $r$  besitzt die Oberfläche  $O = 4\pi r^2$  und das Volumen  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Um gleiche Dimensionen zu erhalten, müssen wir die dritte Potenz der Oberfläche mit der zweiten Potenz des Volumens vergleichen. Dies liefert die Relation

$$O^3 = 36\pi V^2,$$

die unabhängig vom Radius für jede Kugel gilt. Da die Kugel von allen Flächen derselben Oberfläche das größte Volumen besitzt, muß für alle übrigen Flächen gelten:

$$O^3 \geq 36\pi V^2.$$

Bezeichnet man nun mit  $M$  die totale mittlere Krümmung einer Fläche, so lassen sich für alle konvexen Körper folgende beiden wichtigen Relationen beweisen:

$$1. O^2 - 3VM \geq 0,$$

$$2. M^2 - 4\pi O \geq 0.$$

In der zweiten Formel steht das Gleichheitszeichen allein für die Kugel. Das besagt aber gerade, daß unter allen konvexen Körpern gegebener Oberfläche die Kugel und nur sie den kleinsten Wert von  $M$  liefert. Indem man aus beiden Formeln  $M$  eliminiert, erhält man die soeben aufgestellte Beziehung zwischen Oberfläche und Volumen und erkennt, daß das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt. Dabei sind aber

zum Vergleich nur konvexe Körper zugelassen, während in Wahrheit die Ungleichung zwischen Volumen und Oberfläche auch für nicht überall konvexe Körper gilt.

9. *Die Kugel besitzt konstante mittlere Krümmung.*

Daß die Kugel konstante mittlere Krümmung hat, folgt daraus, daß alle Normalschnitte denselben Krümmungsradius, nämlich den Kugelradius, besitzen. Die Kugel ist aber keineswegs die einzige Fläche dieser Art. Denn auf allen Minimalflächen ist die mittlere Krümmung Null, also ebenfalls konstant. Wie die Kugel und die Minimalflächen lassen sich auch alle übrigen Flächen konstanter mittlerer Krümmung durch Seifenblasen verwirklichen. Ich lege durch eine beliebige geschlossene Raumkurve eine feste Fläche und spanne außerdem eine Seifenblase über die Raumkurve. Um das auszuführen, gebe ich z. B. dem Rand eines Pfeifenkopfs die Gestalt der gegebenen Raumkurve, erzeuge mit dieser Pfeife eine Seifenblase und verschließe des Pfeifenrohr luftdicht. Dann wird von der Seifenhaut und der inneren Wandung der Pfeife eine feste Luftmenge eingeschlossen, und die Seifenhaut wird unter dem Einfluß der Oberflächenspannung diejenige Form annehmen, bei der die Oberfläche unter den gegebenen Verhältnissen ein Minimum ist. Die Variationsrechnung ergibt nun, daß jede solche Fläche konstante mittlere Krümmung besitzen muß. Der konstante Wert dieser Krümmung hängt davon ab, wie groß der durch mehr oder weniger starkes Einblasen regulierte Druck der eingeschlossenen Gasmenge ist. Ist dieser Druck überhaupt nicht größer als der äußere Luftdruck, so kommen wir auf den Fall der Minimalflächen zurück.

Wir haben also in unseren Seifenblasen eine große Anzahl der gesuchten Flächen vor uns. Alle diese Flächen haben aber die Eigenschaft, in der Raumkurve unvermittelt aufzuhören, d. h. einen Rand zu besitzen. Es entsteht daher die Frage, ob es außer der Kugel noch andere Flächen konstanter mittlerer Krümmung gibt, die keinen Rand haben und die auch im übrigen frei von Singularitäten sind. Es zeigt sich, daß diese Frage zu verneinen ist, daß also die Kugel durch unsere Zusatzforderungen eindeutig bestimmt wird. Man kann sich diese Tatsache an den Seifenblasen plausibel machen. Wir wissen bereits, daß die frei schwebende Seifenblase stets Kugelgestalt hat. Wenn wir nun Seifenblasen derselben Größe, aber mit immer kleineren Randkurven herstellen, so ist zu erwarten und wird durch das Experiment bestätigt, daß die Gestalt der Randkurve auf die Gestalt der Seifenblase immer weniger Einfluß hat und daß sich als Grenzfall stets die Gestalt der unberandeten Seifenblase, also die Kugel ergibt<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Wenn man eine in einen Pfeifenkopf eingespannte Seifenhaut aufbläst, so könnte man meinen, daß dabei die mittlere Krümmung der Seifenblase beständig anwächst. Das ist ein Irrtum. Zunächst nimmt die mittlere Krümmung von dem zur Minimalfläche gehörenden Wert Null ausgehend in der Tat zu. Wenn man

### 10. Die Kugel besitzt konstante positive GAUSSsche Krümmung.

Über die Kennzeichnung der Kugel durch diese Eigenschaft gilt dasselbe wie bei der mittleren Krümmung. Die Konstanz der GAUSSschen Krümmung allein charakterisiert die Kugel sicher nicht. Denn alle Flächen, die ich aus einem Stück der Kugeloberfläche durch Verbiegung erhalte, besitzen ebenfalls konstante GAUSSsche Krümmung, da ja diese bei Verbiegungen nicht geändert wird. Wir nehmen nun wieder die Forderung hinzu, daß die Fläche weder einen Rand noch sonstige Singularitäten besitzen soll, und fragen, ob es außer der Kugel noch weitere Flächen dieser Art gibt. Es zeigt sich, daß diese Frage zu verneinen ist; daraus folgt unter anderen, daß die Kugel als Ganzes sich nicht verbiegen läßt. Man kann zunächst beweisen, daß eine singularitätenfreie unberandete Fläche konstanter positiver GAUSSscher Krümmung sich nicht wie die Ebene ins Unendliche erstrecken kann, sondern notwendig eine geschlossene Fläche wie die Kugel ist. Eine leichte Rechnung lehrt ferner, daß es außer den Kugeln und Ebenen keine Flächen gibt, für die beide Hauptkrümmungen überall konstante Werte haben. Demnach können wir uns auf den Fall beschränken, daß auf einer geschlossenen Fläche beide Hauptkrümmungen variieren, wobei natürlich ihr Produkt stets den vorgegebenen konstanten Wert der GAUSSschen Krümmung hat. Auf einer solchen Fläche müßte in mindestens einem regulären Punkt eine der Hauptkrümmungen ein Maximum annehmen. Nun läßt sich aber analytisch beweisen, daß ein solcher Punkt auf einem Flächenstück konstanter positiver Krümmung nicht vorkommen kann. Mit anderen Worten: Auf einem berandeten, nichtkugelförmigen Flächenstück konstanter positiver Krümmung gehören die Maxima der Hauptkrümmungen stets zu Punkten des Randes. Da nun die Kugeloberfläche keinen Rand besitzt, so folgt, daß die Kugel als Ganzes nicht verbogen werden kann, und daß es überhaupt außer den Kugeln keine unberandeten singularitätenfreien Flächen konstanter positiver GAUSSscher Krümmung gibt.

---

aber sehr stark aufbläst (und dabei von der Möglichkeit absieht, daß die Seifenblase zerplatzt), so wird die Seifenblase, wie sich aus der im Text ausgeführten Betrachtung ergibt, ungefähr die Gestalt einer sich stets vergrößernden Kugel annehmen; die mittlere Krümmung, die gleich dem reziproken Wert des Kugelradius ist, nimmt also unbegrenzt gegen Null ab. Zu hinreichend kleinen Werten  $c$  der mittleren Krümmung und zu einer bestimmten Randkurve gibt es demnach mindestens zwei durch die Kurve berandete Flächen der konstanten mittleren Krümmung  $c$ . Diese Erscheinung steht in bemerkenswertem Gegensatz zu vielen anderen Variationsproblemen, bei denen es stets nur eine einzige Extremalfläche gibt, die durch eine gegebene geschlossene Kurve berandet wird. Sieht man übrigens vom Vorzeichen der mittleren Krümmung ab, so erhält man durch dieselbe Randkurve noch zwei weitere Flächen derselben konstanten mittleren Krümmung; man kann diese Flächen durch Seifenblasen realisieren, indem man die ursprüngliche Minimalfläche von der anderen Seite her aufbläst.



Da es andererseits offenbar verbiegbare Kugelstücke gibt, so erhebt sich die Frage, ein wie großes Loch man in die Kugel schneiden muß, damit der Rest verbiegbar wird. Es wäre denkbar, daß so ein Loch eine gewisse Mindestgröße haben müßte, z. B. die einer Halbkugel. Es läßt sich aber beweisen, daß das Gegenteil zutrifft; die Kugel wird schon verbiegbar, wenn man ein beliebig kleines Loch hineinschneidet, es genügt sogar, die Kugel längs eines Großkreises ein beliebig kleines Stück lang aufzuschneiden. Dagegen ist es noch nicht bekannt, ob die Kugel auch dann schon verbiegbar wird, wenn man einen oder mehrere isoliert liegende Punkte fortläßt.

Daß eine Kugel verbiegbar wird, wenn ich ein beliebig kleines Loch hineinschneide, können wir in einen eigentümlichen Zusammenhang mit dem Verhalten der Seifenblasen bringen. Man kann nämlich analytisch leicht beweisen: Wenn ich von einem Flächenstück  $F$  der konstanten mittleren Krümmung  $c$  ausgehe und wenn ich auf allen Normalen von  $F$  die Strecke  $1/2c$  nach einer bestimmten Seite hin abtrage, so besitzt die neue Fläche  $G$ , die von den Endpunkten aller dieser Strecken durchlaufen wird, zwar nicht konstante mittlere Krümmung, wohl aber die konstante GAUSSsche Krümmung  $4c^2$ . Man nennt  $G$  die Parallelfläche von  $F$  im Abstand  $1/2c$ . Ist bei diesem Verfahren  $F$  ein Kugelstück, so ist  $G$  das Stück einer mit  $F$  konzentrischen Kugel, und auch umgekehrt kann  $G$  nur dann ein Kugelstück sein, wenn auch  $F$  es ist. Man kann nämlich zeigen, daß die Normalen von  $F$  auch  $G$  in entsprechenden Punkten senkrecht durchschneiden. — Die Seite von  $F$ , nach der hin ich die Strecke auf der Normalen abtragen muß, ist nicht willkürlich; man kann die Vorschrift leicht präzisieren, wenn man sich  $F$  als Seifenblase über einem geschlossenen Pfeifenkopf denkt; man hat dann ins Innere des eingeschlossenen Luftraums zu gehen.

Nunmehr denke ich mir auf einer Kugel vom Radius  $1/c$ , also der mittleren Krümmung  $c$  eine kleine geschlossene Kurve  $R$  gezeichnet und diese Kurve stetig so deformiert, daß die deformierten Kurven nicht mehr auf Kugeln liegen. Es ist plausibel, daß ich bei nicht zu starker Deformation Seifenblasen der konstanten mittleren Krümmung  $c$  durch alle diese Kurven legen kann. Spanne ich nämlich durch die ursprüngliche Kurve  $R$  eine Seifenhaut, so kann ich sie, wenn ich sie gerade im richtigen Maße aufblase, sicher zu einer Fläche der mittleren Krümmung  $c$  machen; denn die Kugel, auf der  $R$  liegt, ist eine solche Fläche, und wenn ich von der richtigen Seite her aufblase, erhalte ich in einem bestimmten Stadium das größere von  $R$  begrenzte Kugelstück. Aus Stetigkeitsgründen folgt, daß ich bei geeigneter Luftzufuhr während der Deformation von  $R$  erreichen kann, daß die Seifenblase, die zuerst die Gestalt eines Kugelstücks hatte, bei der Deformation von  $R$  sich stetig mitändert und dabei den Wert der mittleren Krümmung beibehält; dagegen können die deformierten

Seifenblasen nicht mehr Kugelgestalt haben, weil die deformierten Randkurven gemäß unserer Konstruktion auf keiner Kugel liegen. Nunmehr konstruieren wir zu allen diesen Seifenblasen die inneren Parallelflächen im Abstand  $1/2c$ . Dann durchlaufen wir eine stetige Schar von Flächen, die nach dem früheren Satz sämtlich die konstante GAUSSsche Krümmung  $4c^2$  haben. Die erste dieser Flächen ist eine Kugel vom Radius  $1/2c$ , in die ein kleines Loch geschnitten ist, das von einer zu  $R$  ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurve begrenzt wird. Alle übrigen Flächen sind in die erste stetig verbiegbar; sie können aber nicht Kugelgestalt haben, da nach dem früher erwähnten sonst auch die Seifenblasen Kugelgestalt haben müßten. Eine mit einem beliebig kleinen Loch versehene Kugel ist also in der Tat verbiegbar.

Die Verbiegbarkeit berandeter und unberandeter Flächen ist in viel allgemeineren Fällen untersucht worden. Unverbiegbar sind alle geschlossenen konvexen Flächen, z. B. die Ellipsoide. Ebenso sind unverbiegbar alle konvexen Flächen mit Rändern, falls die Fläche längs jeder Randkurve eine und dieselbe Tangentialebene besitzt; ein Beispiel einer solchen Fläche (mit zwei Rändern) ist der konvexe Teil der Torusfläche (vgl. Abb. 210, S. 177).

Schneidet man in eine geschlossene konvexe Fläche ein beliebig kleines Loch, so wird die Fläche verbiegbar. Es ist noch ungeklärt, ob es genügt, die Fläche aufzuschlitzen oder gar nur einzelne Punkte zu entfernen.

*11. Die Kugel wird durch eine dreiparametrische Schar von Bewegungen in sich übergeführt.*

Die Gesamtheit aller Bewegungen, die die Kugel mit sich selbst zur Deckung bringen, sind offenbar die Drehungen um den Kugelmittelpunkt. Diese Gesamtheit hängt nun in der Tat von drei Parametern ab. Denn zwei Parameter sind nötig, um die Stellung der (durch den Mittelpunkt gehenden, sonst beliebigen) Rotationsachse festzulegen, und einen dritten Parameter braucht man zur Bestimmung des Drehungswinkels. Man kann diese Abzählung auch nach einem anderen Gesichtspunkt durchführen. Offenbar läßt sich ein beliebiger Punkt der Kugel durch eine Bewegung der Schar in jeden anderen Kugelpunkt überführen und darüber hinaus eine durch den ersten Punkt laufende Richtung auf der Kugel in eine beliebige Richtung durch den Bildpunkt. Damit ist dann eine Abbildung aus unserer Schar eindeutig festgelegt. Diese Bestimmung erfordert aber gerade drei Parameter, denn der willkürlich gewählte Bildpunkt des ersten Punktes hängt von zwei Parametern ab, und die durch ihn laufenden Richtungen auf der Kugel bilden eine weitere einparametrische Schar.

Die zuletzt erwähnte Abzählung läßt sich nun nicht nur für die Kugel, sondern auch für die Ebene durchführen; also besitzt auch die Ebene eine dreiparametrische Schar von Bewegungen in sich. Weitere

Flächen dieser Art gibt es aber nicht, so daß die Eigenschaft die Kugeln und die Ebene kennzeichnet.

Wir fragen nun nach allen weiteren Flächen, die überhaupt eine Schar von Bewegungen in sich gestatten; diese Schar muß dann notwendig zwei- oder einparametrig sein. Die einzigen Flächen, die eine genau zweiparametrische Bewegungsschar gestatten, sind die Kreiszyylinder. Eine beliebige Drehung um seine Achse und eine beliebige Translation längs der Achse führen den Kreiszyylinder in sich über. Das ist eine zweiparametrische Schar von Bewegungen, und weitere Bewegungen, die den Kreiszyylinder in sich überführen, gibt es nicht. Man kann durch eine dieser Bewegungen jeden Punkt des Kreiszyinders in jeden anderen überführen. Dagegen kann man die Richtungen nicht mehr willkürlich abbilden, da die erzeugenden Geraden des Zylinders durch unsere Bewegungen stets ineinander übergeführt werden.

Für Flächen mit genau einparametrischer Bewegungsschar bilden die Rotationsflächen naheliegende Beispiele; diese Flächen gehen durch alle Drehungen um die Rotationsachse und (abgesehen von den Kugeln, der Ebene und den Kreiszyindern) nur durch diese Bewegungen in sich über. Jeder Punkt kann also in einen beliebigen Punkt seines Breitenkreises übergeführt werden, und dadurch ist die Abbildung dann festgelegt.

Mit den Rotationsflächen ist aber die Gesamtheit aller Flächen mit einparametrischer Bewegungsschar keineswegs erschöpft. Die Flächenklasse, die durch diese Eigenschaft charakterisiert wird, besteht vielmehr aus den Schraubenflächen; diese Flächenklasse umfaßt die Rotationsflächen einerseits und die Zylinder andererseits als Grenzfälle. Wie schon S. 185 angegeben, kann man jede Schraubenfläche folgendermaßen erzeugen: Man geht von einer beliebigen Raumkurve aus, dreht sie mit beliebiger konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine beliebige feste Gerade und unterwirft sie außerdem einer Translation von konstanter Geschwindigkeit längs dieser Geraden. Aus der Definition geht hervor, daß die Schraubenflächen eine einparametrische Schar von Bewegungen in sich besitzen; nämlich dieselbe Schar von Bewegungen, die die Fläche aus der Raumkurve erzeugen. Die schon erwähnten Grenzfälle erhält man, wenn man entweder die Winkelgeschwindigkeit oder die Translationsgeschwindigkeit gleich Null setzt. Im ersten Fall wird die Schraubung zu einer Translation, und die Raumkurve beschreibt einen Zylinder; im zweiten Fall ergibt sich eine Drehung, und die Raumkurve erzeugt eine Rotationsfläche<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Daß es außer den Schraubenflächen keine weiteren Flächen mit einparametrischer Bewegungsschar gibt, folgt daraus, daß die Bewegungen einer Fläche in sich eine Gruppe bilden. Die Schraubungen um feste Achsen mit fester Ganghöhe bilden aber, wenn die Rotationen um die Achse und die Translationen längs der Achse wieder als Grenzfälle mitgerechnet werden, die allgemeinsten einparametrischen Bewegungsgruppen des Raums.

Ein einzelner Punkt der erzeugenden Kurve beschreibt (von den Grenzfällen abgesehen) eine Schraubenlinie. Durch die einparametrische Bewegungsschar der Schraubenfläche wird also jeder Punkt in einen beliebigen Punkt der zugehörigen Schraubenlinie übergeführt; in den Grenzfällen geht die Schraubenlinie in die Erzeugenden des Zylinders bzw. in die Breitenkreise der Rotationsfläche über.

### § 33. Verbiegungen von Flächen in sich.

Wir verallgemeinern jetzt die Frage, auf die uns die 11. Eigenschaft der Kugel geführt hat. Wir wollen die Flächen betrachten, die, anstatt Bewegungen, beliebige Verbiegungen in sich gestatten. Ein vollkommen biegsames, aber undehnbares Stück Messingblech, das auf ein Modell einer solchen Fläche an irgendeiner Stelle glatt aufgelegt werden kann, muß sich in passender Weise über das Modell hinschieben lassen; es darf dabei seine Form ändern, aber nicht zerreißen, und nicht aufhören, glatt auf der Fläche aufzuliegen.

Während die Beweglichkeit einer Fläche in sich von der Lage der Fläche im Raum abhängt, ist die Verbiegbarkeit der Fläche in sich eine innere Eigenschaft der Fläche, die weder zerstört noch gewonnen werden kann, wenn man die Fläche verbiegt.

Da die Bewegungen einen Sonderfall der Verbiegungen darstellen, müssen unter den Flächen, die wir jetzt suchen, jedenfalls alle die vorkommen, die wir im vorigen Abschnitt aufgezählt haben. Es zeigt sich nun, daß jene Flächen und ihre Biegungsflächen schon die allgemeinsten sind, die Scharen von Verbiegungen in sich gestatten; man erhält also durch die Verallgemeinerung der Fragestellung keine wesentlich neue Flächenklasse. Aber die vorher aufgestellten Typen erhalten jetzt eine andere Bedeutung. So sind offenbar die Zylinder nicht als wesentlich verschieden von der Ebene anzusehen, da ja die Ebene sich in jeden Zylinder verbiegen läßt. Ebenso verliert auch der zweite Grenzfall der Schraubenflächen, der Fall der Rotationsflächen, seinen Sondercharakter. Man kann nämlich ein Stück einer beliebigen Schraubenfläche stets in ein Stück einer Rotationsfläche verbiegen. Es genügt zu diesem Zweck, einer der auf der Schraubenfläche verlaufenden Schraubenlinien durch die Verbiegung die Gestalt eines Kreises zu geben, der natürlich unendlich oft umlaufen werden muß, da ja die Schraubenlinie unendlich lang ist. Dann nehmen die übrigen Schraubenlinien von selbst ebenfalls Kreisgestalt an, und alle diese Kreise haben dieselbe Achse, so daß die entstandene Fläche in der Tat eine Rotationsfläche ist, deren Breitenkreise aus den Schraubenlinien der Ausgangsfläche hervorgegangen sind. Ein Beispiel der Behauptung ist die auf S. 185, 186 beschriebene Abwicklung der Wendelfläche auf das Katenoid.

Wenn man von der analytischen Beweisführung absieht, läßt sich leicht anschaulich plausibel machen, warum die Flächen, die eine

einparametrische Schar von Verbiegungen in sich gestatten, sich stets in die Gestalt von Schrauben- oder Rotationsflächen bringen lassen und warum dabei die Schraubenlinien und die Breitenkreise einander entsprechen.

Durch jeden Punkt eines solchen Flächenstücks muß nämlich eine Kurve laufen, die die Gesamtheit aller Bildpunkte dieses Punkts darstellt, wenn man die sämtlichen Verbiegungen unserer Schar ausführt. Das Flächenstück wird also einfach und lückenlos von einer bestimmten Kurvenschar überdeckt, die bei den betrachteten Verbiegungen in sich übergeht. Greift man zwei beliebige Kurven dieser Schar heraus, so müssen alle Punkte der einen Kurve den gleichen geodätischen Abstand von der anderen Kurve haben, da ja dieser Abstand durch die Verbiegung nicht geändert wird. Hieraus ergibt sich, daß jede geodätische Linie, die auf einer Kurve der Schar senkrecht steht, auch alle übrigen Scharkurven senkrecht schneidet; denn der kürzeste Abstand eines Flächenpunkts von einer Flächenkurve wird längs der Fläche durch die geodätische Linie gegeben, die durch den Punkt geht und auf der Kurve senkrecht steht. Auf den von uns betrachteten Flächen existiert also stets ein orthogonales Kurvennetz, dessen eine Schar die zuerst beschriebene ist, während die zweite aus geodätischen Linien besteht. Längs jeder Kurve der ersten Schar muß überdies die GAUSSsche Krümmung konstant sein, da ja diese bei Verbiegung ungeändert bleibt und jeder Punkt einer Scharkurve durch die von uns betrachteten Verbiegungen in jeden anderen Punkt derselben Scharkurve übergehen kann. Um die Werteverteilung der GAUSSschen Krümmung auf unserer Fläche zu beschreiben, genügt es also, diese Krümmung längs einer geodätischen Linie der zweiten Schar als Funktion der Bogenlänge anzugeben.

Nun kann man aber leicht Rotationsflächen konstruieren, für die die GAUSSsche Krümmung eine vorgeschriebene Funktion der Bogenlänge eines Meridians ist. Da die Meridiane der Rotationsflächen geodätische Linien sind, die die Breitenkreise senkrecht schneiden, so ist es plausibel und wird durch die Rechnung bestätigt, daß unser vorgegebenes Flächenstück sich in alle jene Rotationsflächen verbiegen läßt; das von uns konstruierte Orthogonalnetz des Flächenstücks wird dabei in das Netz der Meridiane und Breitenkreise verwandelt.

Auf den Schraubenflächen haben offenbar die Schraubenlinien die entsprechende Eigenschaft wie die Breitenkreise der Rotationsflächen. Es sind wiederum die Bahnkurven der längentreuen Abbildungen der Fläche in sich. Wenn also überhaupt eine Schraubenfläche in eine Rotationsfläche verbogen werden kann, so müssen notwendig die Schraubenlinien und die Breitenkreise einander entsprechen.

Die Rechnung ergibt, daß aus jeder Schraubenfläche eine zweiparametrische Schar weiterer Schraubenflächen und eine einparametrische Schar von Rotationsflächen durch Verbiegung erhalten werden können.

Wir betrachten nun die Flächen, die eine zwei- oder mehrparametrische Schar von Verbiegungen in sich gestatten. Daß die Schar der Verbiegungen mindestens zweiparametrisch ist, ist gleichbedeutend damit, daß jeder Punkt der Fläche in jeden Nachbarpunkt übergeführt werden kann. Daher muß die GAUSSsche Krümmung dieser Flächen konstant sein. Alle Flächen positiver GAUSSscher Krümmung sind nun (wenn man sich auf hinreichend kleine Stücke beschränkt) auf die Kugel abwickelbar (S. 184). Wie diese besitzen sie also nicht nur eine zwei-, sondern sogar eine dreiparametrische Schar von Verbiegungen in sich. Das Entsprechende gilt für Flächen verschwindender GAUSSscher Krümmung, denn diese sind auf die Ebene abwickelbar. Es läßt sich analytisch zeigen, daß auch die Flächen konstanter negativer Krümmung die gleiche Mannigfaltigkeit von Verbiegungen in sich gestatten.

Alle Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung haben also mit der Ebene eine wichtige innere Eigenschaft gemein, die wir im folgenden ausführlich untersuchen werden. Man kann die ebene Geometrie so aufbauen, daß ihre grundlegenden und allgemeinsten Aussagen nicht nur in der Ebene, sondern auf allen Flächen konstanter Krümmung gelten und daß erst an einer höheren Stelle des Aufbaus zwischen der Ebene und den Flächen positiver oder negativer konstanter GAUSSscher Krümmung unterschieden wird; dann teilt sich die Geometrie in die euklidische und zwei „nicht-euklidische“ Geometrien.

### § 34. Elliptische Geometrie.

Auf krummen Flächen sind die geodätischen Linien als das Analogon der Geraden in der Ebene anzusehen. Wir wollen jetzt diese Analogie genauer untersuchen. Die einfachsten Konstruktionen der ebenen Geometrie beruhen auf dem Zeichnen von Geraden und dem Abtragen von Strecken und Winkeln. Wenn wir solche Konstruktionen auf krumme Flächen übertragen wollen, besteht zunächst ein prinzipieller Unterschied: Die Ebene haben wir stets in ihrer Gesamterstreckung zugrunde gelegt, dagegen haben wir auf allgemeinen krummen Flächen stets nur kleine Stücke betrachtet, dem differentialgeometrischen Standpunkt gemäß. Demnach müssen wir uns auf solche Konstruktionen beschränken, die nicht über die Grenzen des Flächenstücks hinausführen, die also der Betrachtung eines kleinen Teilgebiets in der Ebene entsprechen.

Auf einem hinreichend kleinen Stück einer krummen Fläche lassen sich zwei dem Rand nicht zu nahe gelegene Punkte durch einen und nur einen geodätischen Bogen verbinden, so wie in jedem Teilgebiet der Ebene zwei dem Rand nicht zu nahe gelegene Punkte genau eine im Teilgebiet verlaufende geradlinige Verbindung besitzen<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Wenn der Rand nicht überall nach innen konkav ist, kann die Verbindungsstrecke zweier dem Rand hinreichend benachbarter Punkte teilweise durch das Äußere des Gebiets gehen.

Winkel mit geodätischen Schenkeln können auf jedem Flächenstück in der gleichen Weise gezeichnet und abgetragen werden wie Winkel mit geradlinigen Schenkeln in einem Stück der Ebene.

Auch das Abtragen von geodätischen Strecken unterliegt denselben Gesetzen wie das Abtragen geradliniger Strecken in einem Stück der Ebene.

Aber schon bei einer der einfachsten Konstruktionen, die aus diesen drei Schritten besteht, hört die Analogie im allgemeinen auf; nämlich bei der Konstruktion kongruenter Dreiecke. Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn bei einer bestimmten Zuordnung der Ecken entsprechende Seiten und Winkel gleich sind. Dieser Begriff ist offenbar auf geodätische Dreiecke in einem krummen Flächenstück übertragbar. Wenn ich nun in einem Stück der Ebene von einem Dreieck  $A_0B_0C_0$  ausgehe und zu einem Punkt  $A$  zwei Punkte  $B$  und  $C$  so konstruiere, daß  $AB = A_0B_0$ ,  $AC = A_0C_0$  und  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_0A_0C_0$  ausfällt, so ist nach dem ersten Kongruenzsatz das Dreieck  $ABC$  dem Dreieck  $A_0B_0C_0$  kongruent; dabei ist nur vorauszusetzen, daß der Punkt  $A$  so weit vom Rand des Gebiets entfernt liegt, daß alle Konstruktionen im Gebiet möglich sind.

Wenn ich aber die analoge Konstruktion in einem krummen Flächenstück vornehme, so wird der geodätische Bogen  $BC$  im allgemeinen eine andere Länge haben als  $B_0C_0$ . Von der Kongruenz der beiden Dreiecke  $ABC$  und  $A_0B_0C_0$  ist also keine Rede.

In einem Fall ist jedoch der erste Kongruenzsatz auf geodätische Konstruktionen übertragbar; wenn nämlich das Flächenstück konstante GAUSSsche Krümmung hat. Dann können wir das Flächenstück so in sich verbiegen, daß  $A_0$  auf  $A$  fällt und daß die geodätischen Schenkel des Winkels  $B_0A_0C_0$  auf die entsprechenden Schenkel des Winkels  $BAC$  fallen<sup>1</sup>. Wegen der Längen- und Winkeltrue der Verbiegung fällt also  $B_0$  auf  $B$  und  $C_0$  auf  $C$ ; die Dreiecke  $A_0B_0C_0$  und  $ABC$  müssen demnach kongruent sein.

Die axiomatische Analyse der ebenen geometrischen Konstruktionen lehrt nun, daß alle Sätze über Kongruenz von Figuren logisch auf den ersten Kongruenzsatz zurückführbar sind. Auf Flächen konstanter Krümmung besteht deshalb hinsichtlich der zu Beginn genannten Konstruktionen vollständige Analogie zur Geometrie in einem Stück der Ebene.

Wir haben den ersten Kongruenzsatz dadurch auf Flächen konstanter Krümmung übertragen, daß wir an deren dreiparametrische

<sup>1</sup> Durch *stetige* Transformation ist das nicht immer möglich; auch nicht in der Ebene, wo bekanntlich auch *Spiegelungen* als Deckbewegungen mitgerechnet werden müssen. Auch auf den Flächen konstanter nichtverschwindender Krümmung existieren längentreue Abbildungen, die den Spiegelungen entsprechen. Vgl. S. 226, Fußnote.

Biegungsgruppe anknüpfen. Man kann den Zusammenhang aber logisch umkehren. Wenn auf einer Fläche der erste Kongruenzsatz für geodätische Dreiecke gilt, so folgt, daß die Fläche eine dreiparametrische Schar längentreuer Abbildungen auf sich gestatten und daher von konstanter GAUSSscher Krümmung sein muß. Zunächst folgt nämlich aus der oben beschriebenen Dreieckskonstruktion, daß man zu einem hinreichend kleinen geodätischen Dreieck stets  $\infty^3$  kongruente Dreiecke zeichnen kann. Nun kann man aber die Fläche unter Zugrundelegung eines Dreiecks durch Abtragung von Strecken und Winkeln und wiederholte Anwendung des ersten Kongruenzsatzes vollständig vermessen nach den gleichen Prinzipien, die in der Praxis der Erdvermessung verwandt werden. Jeder kongruenten Abtragung des Grunddreiecks entspricht daher eine längentreue Abbildung des Flächenstücks.

Damit ist gezeigt, daß die Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung die einzigen sind, auf denen der erste Kongruenzsatz für geodätische Dreiecke allgemein gilt.

Um die Analogie dieser Flächen mit der Ebene weiter zu verfolgen, wollen wir jetzt die Beschränkung auf kleine Teilgebiete aufzuheben suchen. Wir beginnen mit Flächen, deren (konstante) GAUSSsche Krümmung positiv ist. Es liegt nahe, von einer Kugelfläche auszugehen. Dadurch aber, daß wir diese Fläche als Ganzes betrachten, wird die Analogie zur Ebene in einem entscheidenden Punkte zerstört. Die geodätischen

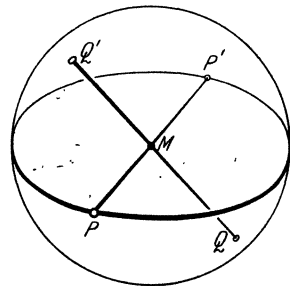


Abb. 231.

Linien der Kugel sind die Großkreise; durch zwei Diametralpunkte auf der Kugel gehen nun unendlich viele Großkreise, während in der Ebene zwei Punkte eine einzige Verbindungsgerade haben. Während ferner in der Ebene zwei Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben, schneiden sich zwei Großkreise der Kugel stets in zwei (diametralen) Punkten. Eine andere Fläche konstanter positiver Krümmung als die Kugelfläche können wir aber schon deshalb nicht als Analogon der Ebene ansehen, weil alle jene Flächen singuläre Punkte oder Ränder haben (vgl. S. 201).

Durch eine einfache Abstraktion können wir aber die störende Eigenschaft der Kugelfläche beseitigen. Wir beschränken uns nämlich auf die Fläche einer Halbkugel und sehen jedes Paar von Diametralpunkten des berandenden Großkreises als je einen einzigen Punkt an. Wenn ferner eine sphärische Figur über den Randkreis herausragt, so wollen wir die ins Äußere fallenden Punkte durch ihre Diametralpunkte ersetzen; diese fallen dann auf die betrachtete Halbkugel (Abb. 231).

Auf diese Weise erhalten wir ein Punktgebilde, das alle Eigenschaften hat, auf die wir ausgingen. Erstens ist jedes hinreichend kleine Teilstück längentreu auf ein Stück der Kugelfläche bezogen. Zweitens wird



das Abtragen von Strecken und das geodätische Verbinden zweier Punkte durch keinen Rand gestört. Drittens besitzen zwei verschiedene Punkte stets eine einzige geodätische Verbindung, und zwei geodätische Bögen haben niemals mehr als einen Schnittpunkt; beides folgt daraus, daß die Paare von Diametralpunkten, die unser Gebilde enthält, sämtlich als je ein Punkt angesehen wurden.

Das Analogon der ebenen Geometrie, das auf diesem Flächenmodell herrscht, nennt man *elliptische Geometrie*, die Fläche selbst wird als Modell der *elliptischen Ebene* bezeichnet. Ein zweites Modell der elliptischen Ebene erhält man offenbar, wenn man von der vollständigen Kugeloberfläche ausgeht und jedes Diametralpunktpaar als einen einzigen Punkt ansieht.

Wir untersuchen nun die elliptische Geometrie, wobei wir die Großkreise kurz als Geraden und die Großkreisbögen als Strecken bezeichnen. Dann springen zwei Unterschiede der elliptischen Geometrie von der gewöhnlichen euklidischen Geometrie ins Auge. Erstens sind die elliptischen Geraden geschlossene Kurven, während sich die euklidischen Geraden ins Unendliche erstrecken. Zweitens haben zwei elliptische Geraden stets einen Schnittpunkt, während es zu jeder euklidischen Geraden Parallelen, also nichtschneidende Geraden gibt.

Vollständig läßt sich die Beziehung der elliptischen zur euklidischen Geometrie nur überblicken, wenn man von den Axiomen der euklidischen ebenen Geometrie ausgeht und bei jedem Axiom nachsieht, ob es auch in der elliptischen Geometrie erfüllt ist oder ob es durch ein abgeändertes Axiom ersetzt werden muß. Wir haben schon früher die Axiome der Verknüpfung (S. 103) und der Stetigkeit (S. 115) erwähnt. Im ganzen läßt sich die euklidische ebene Geometrie auf fünf Axiomgruppen aufbauen, denen der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz, der Parallelen und der Stetigkeit. Jeder Axiomgruppe liegen gewisse Begriffe zugrunde, denen der Verknüpfung z. B. die Begriffe: Punkt, Gerade und Incidenz. Weitere Begriffe werden durch gewisse Axiome ihrerseits erst ermöglicht, z. B. der Begriff der Strecke oder der Halbgeraden durch die Axiome der Anordnung. Der Begriff der Strecke wiederum bildet die Grundlage der Kongruenzaxiome, so daß also die Kongruenzaxiome zu ihrer Formulierung gewisse Anordnungsaxiome voraussetzen. Wir wollen jetzt die Axiome der euklidischen ebenen Geometrie anführen<sup>1</sup>.

### I. Axiome der Verknüpfung.

1. Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade. 2. Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte. 3. Es gibt mindestens drei Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen.

<sup>1</sup> Vgl. HILBERT: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930.

## II. Axiome der Anordnung.

1. Unter drei Punkten einer Geraden liegt genau einer zwischen beiden anderen. 2. Zu zwei Punkten  $A$  und  $B$  gibt es mindestens einen solchen Punkt  $C$ , daß  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt. 3. Wenn eine Gerade eine Seite eines Dreiecks schneidet (d. h. einen Punkt enthält, der zwischen zwei Ecken liegt), so geht sie entweder durch den gegenüberliegenden Eckpunkt, oder sie schneidet noch eine Seite.

Die Anordnungsaxiome gestatten, die in den folgenden Axiomen auftretenden Begriffe „Strecke“, „Winkel“, „Seite einer Geraden von einem Punkte aus“, „Halbgerade“, „Seite einer Ebene von einer Halbgeraden aus“ zu definieren.

## III. Axiome der Kongruenz.

1. Eine Strecke läßt sich auf einer Geraden von einem Punkt der Geraden aus stets nach beiden Seiten abtragen; die entstehende Strecke heißt der ersten kongruent. 2. Sind zwei Strecken einer dritten kongruent, so sind sie auch einander kongruent. 3. Wenn auf zwei kongruenten Strecken je ein Punkt derart liegt, daß eine der entstehenden Teilstrecken der einen Strecke einer der Teilstrecken der anderen kongruent ist, so ist auch die zweite Teilstrecke der einen kongruent der zweiten Teilstrecke der anderen. 4. Ein Winkel läßt sich an einen Halbstrahl nach jeder Seite der Ebene hin in eindeutiger Weise abtragen; der entstehende Winkel heißt dem ersten kongruent. 5. (Erster Kongruenzsatz.) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

## IV. Parallelenaxiom.

Zu einer Geraden  $a$  gibt es durch jeden Punkt, der nicht auf  $a$  liegt, genau eine Gerade, die  $a$  nicht schneidet.

## V. Axiome der Stetigkeit.

Diese Axiome werden sehr verschieden formuliert. Sie besagen in jedem Fall etwa:

1. (Archimedisches Axiom, vgl. S. 115.) Jede Strecke läßt sich durch jede andere messen. 2. (Cantorsches Axiom.) In jeder unendlichen Folge ineinandergeschalteter Strecken gibt es stets einen allen diesen Strecken gemeinsamen Punkt.

In der elliptischen Geometrie sind die Verknüpfungsaxiome offenbar erfüllt. Dagegen sind die Anordnungsaxiome nicht erfüllt; denn da die Geraden geschlossene Kurven sind wie Kreise, läßt sich nicht sagen, von drei Punkten einer Geraden liege genau einer zwischen den beiden anderen. Statt der *Zwischen*beziehung dreier Punkte läßt sich aber in der elliptischen Geometrie eine *Trennungs*beziehung vierer Punkte einführen, für die dann ganz entsprechende Anordnungsaxiome gelten, deren erstes hier angeführt sei: *Vier Punkte einer Geraden zerfallen stets*

auf genau eine Weise in zwei einander trennende Paare. (Z. B. zerfallen in Abb. 232 die Punkte  $A, B, C, D$  in die einander trennenden Paare  $AC$  und  $BD$ .)

Wie die euklidischen so führen auch die elliptischen Anordnungsaxiome zur Definition der Strecke und der anderen Begriffe, die in den Kongruenzaxiomen verwandt werden. Man muß aber davon ausgehen, daß zwei Punkte  $AB$  stets zwei Strecken und nicht bloß eine bestimmen, ebenso wie jeder Kreis durch zwei seiner Punkte in zwei Bögen zerfällt. Erst durch Hinzunahme eines dritten Punktes  $C$  der Geraden  $AB$  läßt sich eine Unterscheidung der beiden Strecken  $AB$  herbeiführen; die eine Strecke besteht aus allen Punkten, die durch  $AB$  von  $C$  getrennt werden,

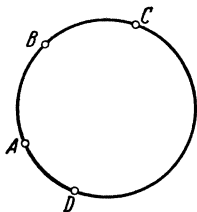


Abb. 232.

die andere aus den übrigen Punkten der Geraden  $AB$ . Ferner muß man überstumpfe Winkel als Innenwinkel eines Dreiecks ausschließen, weil sonst durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel nicht ein einziges Dreieck, sondern zwei inkongruente Dreiecke bestimmt werden (Abb. 233), was dem ersten Kongruenzsatz widerspricht. Es zeigt sich, daß bei diesen Einschränkungen in jedem hinreichend kleinen Teilgebiet der elliptischen Ebene die Analogie zu einem Teilgebiet der euklidischen Ebene,

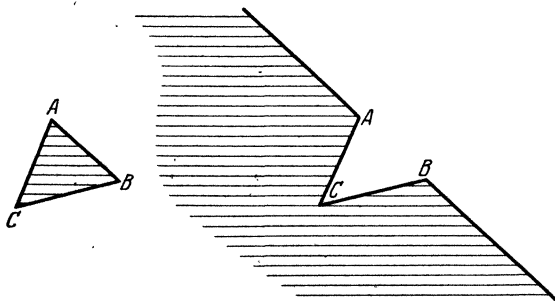


Abb. 233.

von der wir ausgegangen waren, erhalten bleibt, und daß die euklidischen Kongruenzaxiome in der elliptischen Ebene ihre Geltung behalten. Das gleiche gilt von den Stetigkeitsaxiomen.

Dagegen gilt das Parallelenaxiom nicht, sondern ist durch das schon S. 103 aufgestellte Verknüpfungaxiom der projektiven Ebene zu ersetzen: Zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

Auch hinsichtlich der Anordnung verhält sich die elliptische Ebene wie die projektive. Um das anschaulich in Evidenz zu setzen, wählen wir als Modell der elliptischen Ebene die vollständige Kugeloberfläche, auf der alle Diametralpunktpaare identifiziert sind; projizieren wir die Kugel von ihrem Mittelpunkt aus auf eine Ebene, so entspricht jeder Punkt der Ebene einem Diametralpunktpaar der Kugel, also einem Punkt der elliptischen Ebene. Jedem Großkreis, also jeder elliptischen Geraden, entspricht eine Gerade der Bildebene: Die Beziehung wird umkehrbar eindeutig, wenn wir die unendlich ferne Gerade der Bild-

ebene hinzunehmen, wenn wir also diese Ebene als projektive Ebene auffassen.

Wir können demnach die projektive Ebene direkt als ein Modell der elliptischen Ebene ansehen, wenn wir die Gleichheit von Längen und Winkeln in diesem Modell nicht euklidisch, sondern in der angedeuteten Art durch die sphärische Trigonometrie einer Hilfskugel bestimmen. Hiéaraus folgt, daß in der elliptischen Geometrie alle Schnittpunktsätze der projektiven Geometrie, z. B. die von DESARGUES und PASCAL, gelten.

Wenn wir nun die längentreuen Abbildungen der elliptischen Ebene ins Auge fassen, so können wir wie im euklidischen Fall nach den diskontinuierlichen Gruppen solcher Abbildungen fragen. Jeder solchen Gruppe entspricht eine diskontinuierliche Gruppe längentreuer Abbildungen der Kugelfläche, also eines der regulären Polyeder, die wir in § 13, 14 behandelt haben. Umgekehrt führt jedes reguläre Polyeder zu einer diskontinuierlichen Deckgruppe der elliptischen Ebene, und die Zentralprojektionen regulärer Polyeder, die in Abb. 160 bis 163 und 165 bis 168 dargestellt sind, geben einige Lösungen der mit jenen Gruppen zusammenhängenden Aufgabe der „Pflasterung“, die S. 72 für die euklidische Ebene formuliert ist.

Man kann nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raum die elliptische Geometrie definieren. Als Modell der Punkte, Geraden und Ebenen dieses Raums läßt sich der projektive Raum mit seinen Punkten und Geraden verwenden. Die Vergleichung der Längen und Winkel hat wieder abweichend von der euklidischen Geometrie zu erfolgen und läßt sich nur analytisch beschreiben; z. B. durch Zentralprojektion einer Hyperkugel des vierdimensionalen Raums. Die diskontinuierlichen Deckgruppen des elliptischen Raums hängen mit den regulären Zellen des vierdimensionalen Raums zusammen, und die Abb. 173 bis 176 lassen sich als „Pflasterungen“ des elliptischen Raums deuten.

### § 35. Hyperbolische Geometrie; ihr Verhältnis zur euklidischen und elliptischen Geometrie.

Wir wenden uns jetzt zu den Flächen konstanter negativer Krümmung. Es gibt unter ihnen keine von so einfacher Gestalt wie die Kugelfläche. Die Rotationsflächen dieser Art können drei verschiedene Gestalten haben, die in Abb. 234 dargestellt sind. Wir sehen, daß alle diese Flächen mit singulären Rändern behaftet sind, über die hinaus sie nicht stetig fortgesetzt werden können<sup>1</sup>. Die Gesamtheit aller Flächen konstanter negativer Krümmung läßt sich bisher nicht explizit angeben,

<sup>1</sup> In Abb. 234b ist nur der untere Rand singulär, nach oben zu läuft die Fläche ins Unendliche, wobei die Breitenkreise unbegrenzt klein werden.

doch läßt es sich beweisen, daß keine dieser Flächen von Singularitäten frei sein kann.

Es gibt also keine Fläche im Raum, die im kleinen längentreu auf eine Fläche konstanter negativer Krümmung abgebildet werden kann, und auf der die Abtragung geodätischer Strecken nirgends durch Randpunkte behindert wird. Man kann aber in der Ebene Modelle solcher abstrakt definierter Flächen angeben, ebenso wie wir die projektive

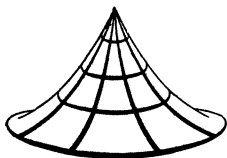


Abb. 234 a.

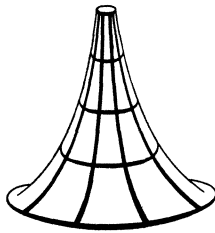


Abb. 234 b.

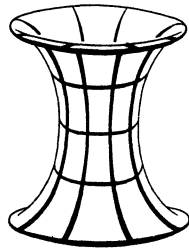


Abb. 234 c.

Ebene zu einem Modell der elliptischen Ebene gemacht hatten. Wir müssen zu diesem Zweck die Längen- und Winkelmessung auf eine neue Art einführen, die von der euklidischen und auch von der elliptischen Geometrie abweicht. Man nennt die Fläche, von denen wir solche Modelle konstruieren wollen, die *hyperbolische Ebene* und ihre Geometrie die *hyperbolische Geometrie*.

Als Punkte der hyperbolischen Ebene wollen wir die Punkte im Innern eines Kreises in einer gewöhnlichen Ebene betrachten und als hyperbolische Geraden die Sehnen dieses Kreises (mit Ausschluß der Endpunkte).

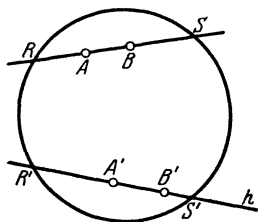


Abb. 235.

Es läßt sich nämlich für jedes Flächenstück  $F$  konstanter negativer Krümmung  $-1/c^2$  eine Abbildung angeben, die  $F$  in ein Gebiet  $G$  der Ebene im Kreisinnern derartig überführt, daß die geodätischen Linien, die in  $F$  verlaufen, durchweg in die Geradenstücke in  $G$  verwandelt werden. Natürlich kann diese Abbildung nicht längentreu sein, da ja die Krümmung

von  $G$  verschwindet, während die von  $F$  negativ ist. Sind  $A, B$  (Abb. 235) die Bilder zweier Punkte  $P, Q$  von  $F$  und sind  $R, S$  die Endpunkte der durch  $A, B$  gelegten Kreissehne, so gilt für den geodätischen Abstand  $s$  der Punkte  $P, Q$  die Formel

$$(1) \quad s = \frac{c}{2} \cdot \left| \log \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right|.$$

Wir wollen die rechte Seite der Gleichung (1) für alle Punktepaare  $AB$  unseres Modells der hyperbolischen Ebene als den „hyperbolischen Ab-

stand“ definieren. Ebenso führt die Abbildung  $F \rightarrow G$  zu einer bestimmten Messung des „hyperbolischen Winkels“, die von der euklidischen Bestimmungsweise abweicht. Um z. B. von einem Punkt  $A$  der hyperbolischen Ebene aus auf eine Gerade  $g$  das Lot  $h$  zu fällen, hat man  $h$  als Verbindungsgerade von  $A$  mit dem in Abb. 236 konstruierten Hilfspunkt  $P$  zu zeichnen. Man erkennt, daß der euklidische Winkel zwischen  $h$  und  $g$  im allgemeinen von einem Rechten verschieden ist.

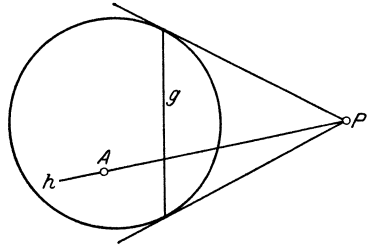


Abb. 236.

Untersuchen wir nun, welche Axiome der euklidischen Geometrie in der hyperbolischen Ebene gültig bleiben. Zunächst ist es klar, daß die Verknüpfungsaxiome gelten. Wenn wir ferner die „Zwischen“-beziehung dreier Punkte einfach aus ihrer Lage in unserem Modell übernehmen, so erkennen wir, daß auch die Anordnungsaxiome gelten. Als Strecke  $AB$  definieren wir nun die Punkte der euklidischen Verbindungsstrecke in unserem Modell. Der Streckenkongruenz legen wir die Formel (1) zugrunde. Wenn wir dann das erste Kongruenzaxiom betrachten, so könnte es zunächst scheinen, als sei die freie Streckenabtragung durch die Kreisperipherie behindert, das Axiom also ungültig. In Wahrheit gelangen wir aber bei der Abstandsdefinition (1) beim Streckenabtragen nie an die Kreisperipherie. Ist nämlich (Abb. 235) eine Strecke  $AB$  und eine vom Punkt  $A'$  ausgehende Halbgerade  $h$  im Kreisinnern gegeben, so gilt für den Punkt  $B'$  auf  $h$ , für den  $AB = A'B'$  sein soll, nach (1) die Relation:

$$\frac{AR}{BR} \cdot \frac{BS}{AS} = \frac{A'R'}{B'R'} \cdot \frac{B'S'}{A'S'}$$

oder

$$(2) \quad \frac{B'S'}{B'R'} = \frac{A'S'}{A'R'} \cdot \frac{AR}{AS} \cdot \frac{BS}{BR}$$

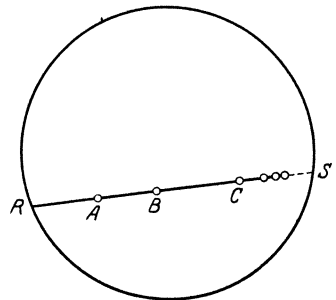


Abb. 237.

Da die drei Punkte  $A'$ ,  $A$  und  $B$  im Kreisinnern liegen, sind die drei Proportionen auf der rechten Seite von (2) alle negativ. Also ist auch  $\frac{B'S'}{B'R'}$  negativ, d. h.  $B'$  liegt im Kreisinnern, wie behauptet war. Trägt man eine Strecke beliebig oft an sich selbst an, so kommt man der Kreisperipherie unbegrenzt näher, ohne sie zu erreichen (Abb. 237); die Kreisperipherie spielt in unserem Modell der hyperbolischen Geometrie eine analoge Rolle wie die unendlich ferne Gerade der euklidischen Geometrie.

Unsere Betrachtung lehrt, daß das erste Kongruenzaxiom in der hyperbolischen Ebene gilt. Offenbar gelten auch die Kongruenzaxiome 2. bis 4.

Das fünfte Kongruenzaxiom ist, wie in § 34 ausgeführt, gleichbedeutend mit der Existenz einer hinreichend umfassenden Gruppe von Abbildungen, die das Kreisinnere derart in sich überführen, daß die Geraden in Geraden übergehen und die hyperbolischen Abstände und Winkel erhalten bleiben. Man zeigt nun in der projektiven Geometrie der Ebene, daß es eine solche Gruppe in der Tat gibt. (Die Abbildungen gehören zu den projektiven Transformationen der Ebene und lassen sich durch wiederholte Anwendung der Zentralprojektion anschaulich erzeugen.) Somit gelten in der hyperbolischen Geometrie sämtliche Kongruenzaxiome. Man sieht leicht ein, daß auch die Stetigkeitsaxiome erfüllt sind.

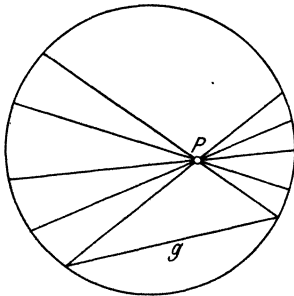


Abb. 238.

Nur ein einziges Axiom der euklidischen Geometrie gilt in der hyperbolischen Ebene nicht: das Parallelaxiom. Man erkennt dies aus Abb. 238. Durch einen Punkt gibt es zu jeder nicht durch  $P$  gehenden Geraden  $g$  stets ein ganzes Bündel von Geraden, die  $g$  nicht schneiden. Während also in der elliptischen Geometrie außer dem Parallelaxiom auch die euklidischen Ordnungsaxiome ungültig sind, unterscheidet sich die hyperbolische Geometrie von der eukli-

dischen ausschließlich dadurch, daß das Parallelaxiom nicht gilt.

Aus diesem Grund kommt unserem Modell eine große prinzipielle Bedeutung zu. Man hat sich während des ganzen Mittelalters und bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts vergeblich bemüht, das Parallelaxiom aus den übrigen Axiomen EUKLIDS zu beweisen. Mit der Entdeckung eines Modells der hyperbolischen Geometrie war die prinzipielle Unmöglichkeit eines solchen Beweises dargetan. Denn unser Modell erfüllt alle geometrischen Axiome mit Ausnahme des Parallelaxioms. Würde dieses aus den übrigen logisch folgen, so müßte es auch in unserem Modell gelten, was nicht zutrifft.

Die hyperbolische und die elliptische Geometrie werden als die beiden *nichteuklidischen* Geometrien bezeichnet. Wenn wir von der Wertverteilung der GAUSSschen Krümmung ausgehen, erweist sich die euklidische Geometrie als ein Übergangsfall zwischen der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie. Das gilt auch in anderer Hinsicht. So haben wir die hyperbolische Ebene erhalten, indem wir aus der euklidischen Ebene die Punkte im Äußeren eines Kreises entfernten, während wir, um die vollständige elliptische Ebene zu erhalten, zur euklidischen Ebene noch die Punkte der unendlich

fernen Geraden hinzunehmen mußten. Ferner gibt es zu einer Geraden durch einen außerhalb gelegenen Punkt in der elliptischen Geometrie keine, in der euklidischen Geometrie eine und in der hyperbolischen Geometrie unendlich viele Parallelen. Besonders charakteristisch für die drei Geometrien ist die Winkelsumme im Dreieck. Während sie in der euklidischen Geometrie  $\pi$  beträgt, ist sie in der elliptischen Geometrie stets größer als  $\pi$ , wie aus bekannten Sätzen der sphärischen Trigonometrie folgt. In der hyperbolischen Ebene ist nun diese Summe stets kleiner als  $\pi$ . Wir werden später einen anschaulichen Beweis dafür erbringen.

Der Satz der euklidischen Geometrie, daß die Winkelsumme jedes Dreiecks  $\pi$  beträgt, kann hiernach nicht ohne Benutzung des Parallelenaxioms bewiesen werden; sonst müßte er auch in der hyperbolischen Ebene gelten. Wenn andererseits irgendein Satz in der euklidischen und auch in der hyperbolischen Geometrie gilt, so ist zu seinem Beweise das euklidische Parallelenaxiom sicher nicht erforderlich. Ein solcher Satz ist es z. B., daß jeder Außenwinkel eines Dreiecks größer ist als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel. Man kann nun aus der Betrachtung sphärischer Dreiecke leicht erkennen, daß in der elliptischen Geometrie dieser Satz nicht gilt. Hieraus folgt, daß zu seinem Beweise die euklidischen Anordnungsaxiome gebraucht werden.

Ein Beispiel für einen Satz, der in allen drei Geometrien gilt, ist der Satz, daß die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck einander gleich sind. Zum Beweise dieses Satzes sind weder die euklidischen Anordnungsaxiome noch irgendeine Annahme über Parallelismus erforderlich.

Es wurde bemerkt, daß die projektiven Schnittpunktsätze, z. B. der von DESARGUES, in der elliptischen Ebene gelten. In der euklidischen Ebene gilt dieser Satz wie jeder andere Schnittpunktsatz nur dann, wenn wir die unendlich fernen Punkte hinzunehmen. In der hyperbolischen Ebene können die Schnittpunktsätze nur dann einheitlich formuliert werden, wenn wir zwei Arten uneigentlicher Punkte hinzunehmen: solche, die in unserem Modell den Peripheriepunkten, und solche, die den Punkten des Kreisäußeren entsprechen. Offenbar können wir z. B. zu einer in der Ebene gegebenen DESARGUESschen Konfiguration den Kreis, der unser Modell der hyperbolischen Ebene bestimmt, so legen, daß er neun Konfigurationspunkte im Innern und den zehnten auf der Peripherie oder im Äußeren enthält. Wegen der Regularität der Konfiguration können wir diesen Punkt als den DESARGUESschen Punkt auffassen; dann können wir unsere Figur als zwei hyperbolische Dreiecke deuten, deren entsprechende Seiten einander paarweise auf Punkten einer hyperbolischen Geraden schneiden. Nach dem DESARGUESschen Satz müssen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, während diese Geraden doch im Innern des Kreises keinen Punkt gemein haben.



Sucht man den DESARGUESSchen Satz unmittelbar, ohne Bezugnahme auf unser Modell, im Bereich der hyperbolischen Geometrie zu beweisen, so stößt man auf ähnliche Schwierigkeiten wie in der euklidischen und projektiven Geometrie. Der Satz ist beweisbar mit Hilfe der Kongruenzaxiome. Ohne sie bedarf es zu seinem Beweise räumlicher Hilfsmittel. Es gibt nämlich auch im Raum eine hyperbolische Geometrie. Ein Modell des „hyperbolischen Raums“ erhält man, wenn man als Punkte, Geraden und Ebenen dieses Raums die Punkte, Geradenstücke und Ebenenstücke im Innern einer Kugel des gewöhnlichen Raums ansieht und den Abstand zweier Punkte analog wie im ebenen Modell definiert.

Wir hatten erwähnt, daß die Winkelsumme im Dreieck in der hyperbolischen Ebene stets kleiner ist als  $\pi$ . An unserem Modell tritt dieser Satz nicht in anschauliche Evidenz, weil die hyperbolischen Winkel von den euklidischen verschieden ausfallen. Wir werden daher im folgenden Abschnitt ein weiteres Modell der hyperbolischen Ebene aus dem bisher betrachteten Modell erzeugen, und in diesem neuen Modell werden die hyperbolischen Winkel unverzerrt wiedergegeben werden. Wir müssen zu diesem Zweck von einer einfachen elementargeometrischen Betrachtung ausgehen: der Lehre von der stereographischen Projektion und von den Kreisverwandtschaften.

### § 36. Stereographische Projektion und Kreisverwandtschaften. POINCARÉsches Modell der hyperbolischen Ebene.

Auf einer horizontalen Ebene liege eine Kugel (Abb. 239). Vom höchsten Punkt  $N$  der Kugel aus projizieren wir diese auf die Ebene. Die so

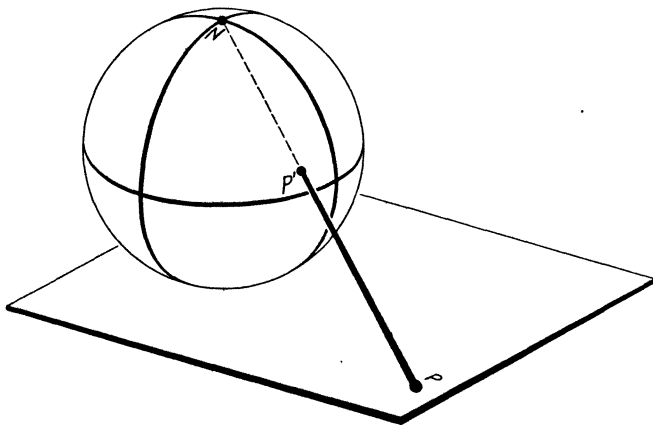


Abb. 239.

entstehende Abbildung der Kugeloberfläche auf die Ebene ( $P' \rightarrow P$  in Abb. 239) heißt *stereographische Projektion*. Dabei ist die ganze Ebene abgebildet auf die ganze Kugel mit Ausnahme des Punkts  $N$ . Die

Bildebene ist parallel der Tangentialebene  $n$  der Kugel in  $N$ . Ist ferner  $p'$  die Kugeltangentialebene in  $P'$  (Abb. 240), so bilden wegen der allseitigen Symmetrie der Kugel die beiden Tangentialebenen  $n$  und  $p'$  gleiche Winkel mit  $NP'$ , der Verbindungssehne ihrer Berührungspunkte, und die Schnittgerade von  $n$  und  $p'$  steht auf  $NP$  senkrecht.

Da  $n$  zur Bildebene parallel ist, bildet auch diese mit dem Projektionsstrahl  $PP'$  den gleichen Winkel wie  $p'$  und schneidet  $p'$  in einer zu  $PP'$  senkrechten Geraden. Hieraus folgen mehrere anschauliche Eigenschaften der stereographischen Projektion. Ist zunächst  $r'$  eine Tangente der Kugel in  $P'$  (Abb. 241) und ist  $r$  das Bild

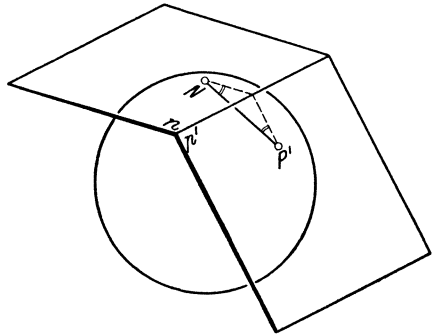


Abb. 240.

von  $r'$ , so bilden  $r$  und  $r'$  gleiche Winkel mit  $PP'$ . Denn ich erhalte  $r$ , indem ich die Bildebene mit der durch  $r'$  und  $NP'$  gehenden Ebene schneide; wenn aber eine durch  $PP'$  gehende Ebene  $e$  (Abb. 242) in den Geraden  $r$  und  $r'$  zwei Ebenen  $p, p'$  schneidet, die mit der Geraden  $PP'$  gleiche Winkel bilden und sich in einer zu  $PP'$  senkrechten Geraden schneiden, so bilden auch  $r$  und  $r'$  mit  $PP'$  gleiche

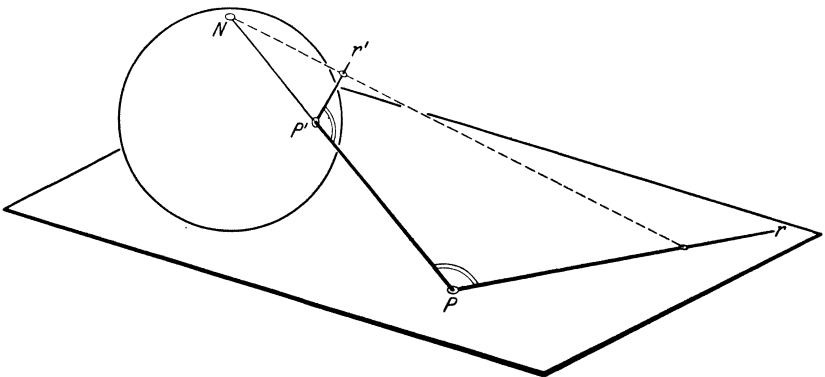


Abb. 241.

Winkel. Dieselbe Symmetriebetrachtung lehrt ferner: Ist  $s'$  eine weitere Tangente der Kugel in  $P'$  und ist  $s$  das Bild von  $s'$ , so bildet  $r$  mit  $s$  denselben Winkel wie  $r'$  mit  $s'$ . Die Winkel auf der Kugel werden also bei stereographischer Projektion unverzerrt wiedergegeben. Die Abbildung wird deshalb als *winkeltreu* bezeichnet.

Sei ferner  $k'$  ein beliebiger nicht durch  $N$  gehender Kreis auf der Kugel (Abb. 243). Die Tangentialebenen an die Kugel in den Punkten von  $k'$

umhüllen einen Rotationskegel, dessen Spitze  $S$  heißen möge. Da  $k'$  nicht durch  $N$  geht, ist  $NS$  keine Tangente der Kugel in  $N$ , also der Bildebene nicht parallel;  $M$  möge der Schnittpunkt der Bildebene mit  $NS$  sein.

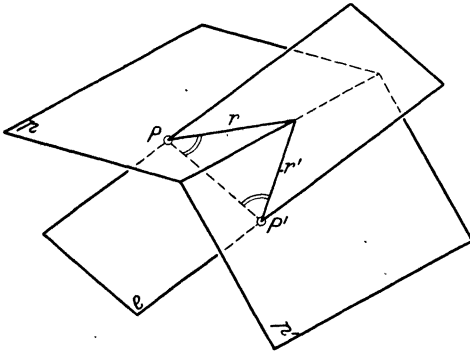


Abb. 242.

Ich behaupte, daß die Bildkurve  $k$  von  $k'$  ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  ist. Der Beweis ist aus Abb. 243 ersichtlich. Ist  $P'$  ein beliebiger Punkt von  $k'$ ,  $P$  sein Bildpunkt, dann ist  $P'S$  eine Kugeltangente in  $P'$ , und  $PM$  ist das Bild von  $P'S$ ; demnach ist  $\sphericalangle P P' S = \sphericalangle P' P M$ . Ich ziehe durch  $S$  die Parallele zu  $PM$ , die  $NP$  in  $P''$  treffen

möge. Dann fällt entweder  $P''$  mit  $P'$  zusammen, oder das Dreieck  $P' P'' S$  hat gleiche Winkel bei  $P'$  und  $P''$ , ist also gleichschenkelig:  $SP' = SP''$ . Nun ist aber  $\frac{PM}{P'S} = \frac{PM}{P''S} = \frac{MN}{SN}$  oder:  $PM = P'S \cdot \frac{MN}{SN}$ . Da  $S$  von allen Punkten von  $k'$  gleich weit entfernt ist, so ist  $P'S$  kon-

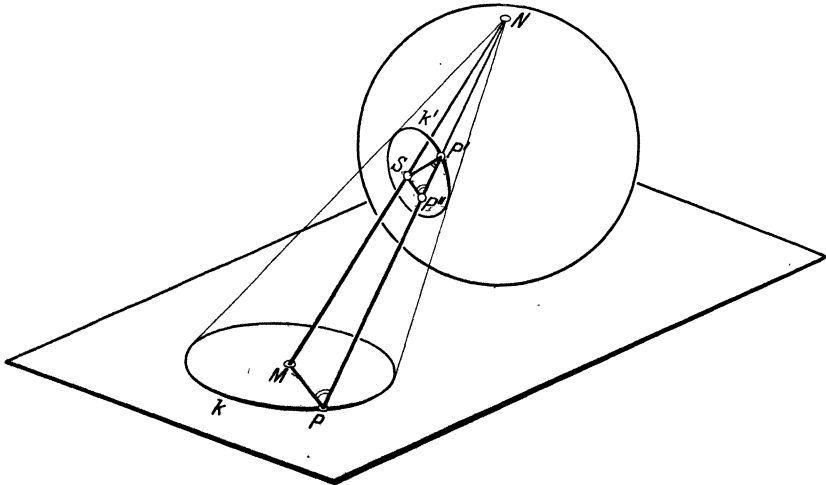


Abb. 243.

stant. Nach der letzten Formel ist daher auch  $PM$  konstant, d. h.  $k$  ist ein Kreis um  $M$ .

Die nicht durch  $N$  gehenden Kreise der Kugel werden also durch stereographische Projektion in Kreise der Ebene verwandelt, und indem man die soeben durchgeführte Betrachtung umkehrt, erkennt man, daß auch jeder Kreis der Ebene einem Kreis auf der Kugel

als Bild entspricht. Wenn ein auf der Kugel beweglicher Kreis gegen einen durch  $N$  gehenden Kreis rückt, so rückt  $NS$  gegen eine Kugeltangente in  $N$ , der Punkt  $M$  entfernt sich also ins Unendliche. Hieraus folgt, daß den durch  $N$  gehenden Kreisen der Kugel die Geraden der Bildebene entsprechen. Dies ist auch ohne Grenzübergang klar, da die Projektionsstrahlen eines durch  $N$  gehenden Kreises der Kugel in der Ebene dieses Kreises verlaufen, so daß die Schnittgerade dieser Ebene mit der Bildebene als die Bildkurve des Kreises erscheint. Die Gesamtheit der Kreise auf der Kugel entspricht demnach bei stereographischer Projektion der Gesamtheit der Kreise und Geraden in der Ebene. Die stereographische Projektion ist *kreistreu*.

Wir denken uns nun irgendeine Abbildung  $a'$  der Kugelfläche auf sich selbst, bei der die Kreise der Kugel sämtlich in Kreise übergehen; z. B. kann  $a'$  eine Drehung der Kugel um irgendeinen (nicht notwendig durch  $N$  gehenden) Durchmesser sein. Dann entspricht der Abbildung  $a'$  durch die stereographische Projektion eine Abbildung  $a$  der Bildebene auf sich, die die Gesamtheit der Kreise und Geraden in sich überführt. Man nennt jede solche Abbildung der Ebene eine *Kreisverwandtschaft*.

In der euklidischen Ebene sind die Kreisverwandtschaften im allgemeinen keine umkehrbar eindeutigen Abbildungen. Denn bei der stereographischen Projektion entspricht dem Punkt  $N$  der Kugel kein Punkt der Ebene. Die Abbildung  $a'$  der Kugel wird nun im allgemeinen den Punkt  $N$  nicht fest lassen, sondern wird einen anderen Punkt  $P'$ , dessen stereographisches Bild  $P$  sein möge, in  $N$  überführen. Dann hat der Punkt  $P$  bei der Kreisverwandtschaft  $a$ , die  $a'$  entspricht, keinen Bildpunkt. Wie in der projektiven Geometrie führt man zur Vereinheitlichung des Abbildungsvorgangs eine abstrakte Erweiterung der euklidischen Ebene durch. Diese Erweiterung geschieht aber in der Lehre von den Kreisverwandtschaften auf andere Weise wie in der projektiven Geometrie; man fügt nämlich zur euklidischen Ebene einen einzigen „unendlich fernen“ Punkt  $U$  hinzu, den man als das Bild von  $N$  bei stereographischer Projektion auffaßt. Nach dieser Erweiterung ist die Ebene umkehrbar eindeutig und stetig auf die ganze Kugeloberfläche bezogen, und die Kreisverwandtschaften werden umkehrbar eindeutige Abbildungen; in dem oben angeführten Beispiel wird der Punkt  $P$  durch die Kreisverwandtschaft  $a$  auf  $U$  abgebildet. Bei der zugehörigen Kugelabbildung  $a'$  gehen natürlich die Kreise durch  $P'$  in die Kreise durch  $N$  über; folglich bildet  $a$  die Kreise durch  $P$  auf die Geraden der Ebene ab. Hiernach erweist es sich als zweckmäßig, die Geraden als „Kreise durch den unendlich fernen Punkt“ aufzufassen. Parallele Geraden werden durch eine Kreisverwandtschaft entweder wieder in parallele Geraden oder in sich berührende Kreise übergeführt.

Triviale Beispiele von Kreisverwandtschaften sind die Bewegungen, Umklappungen und Ähnlichkeitstransformationen der Ebene; sie führen

schon die euklidische Ebene selbst umkehrbar eindeutig in sich über; legen wir also diesen Abbildungen die durch  $U$  erweiterte Ebene zugrunde, so können wir sagen, daß diese Abbildungen Kreisverwandtschaften sind, die  $U$  fest lassen. Man kann nun umgekehrt beweisen, daß die einzigen Kreisverwandtschaften, die  $U$  fest lassen, die soeben genannten sind. Nach diesem Satz läßt sich leicht eine vollständige Übersicht über alle Kreisverwandtschaften der Ebene geben. Sei  $P$  derjenige Punkt der Ebene, der bei einer vorgegebenen Kreisverwandtschaft  $a_0$  in  $U$  überführt wird, und sei  $P'$  das stereographische Bild des Kugelpunktes  $P'$ . Dann erteilen wir der Kugel eine solche Drehung  $a'$ , daß  $P'$  in  $N$  übergeht. Der Drehung  $a'$  entspricht eine Kreisverwandtschaft  $a$ , deren Eigenschaften mit denen von  $a'$  in einfacher anschaulicher Weise

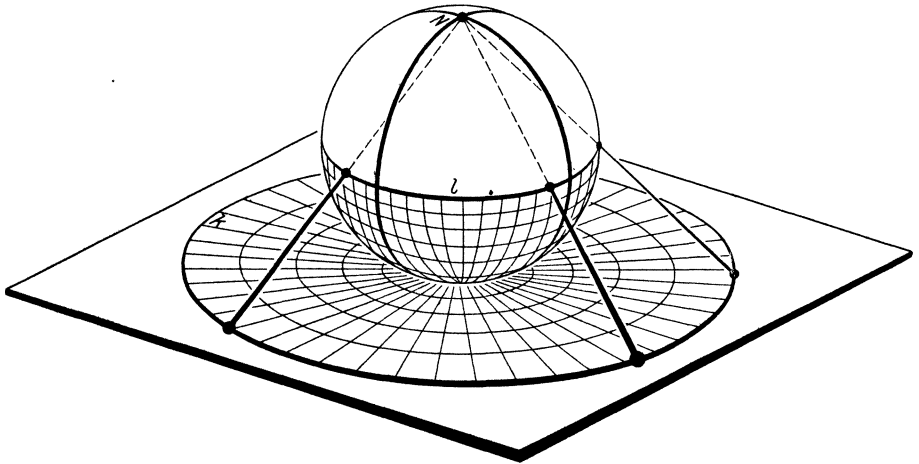


Abb. 244 a.

verknüpft sind. Nun kann sich die gegebene Kreisverwandtschaft  $a_0$ , die ebenso wie  $a$  den Punkt  $P$  in  $U$  überführt, von der Kreisverwandtschaft  $a$  nur durch eine Kreisverwandtschaft unterscheiden, die  $U$  fest läßt. Nach dem soeben angeführten Satz ist daher  $a_0$  bis auf eine Bewegung, Umklappung oder Ähnlichkeitstransformation mit  $a$  identisch.

Wir haben früher erwähnt, daß die stereographische Projektion winkeltreu ist. Die Drehung  $a'$  ist nun eine winkeltreue Abbildung der Kugel. Da  $a$  aus  $a'$  durch stereographische Projektion hervorgeht, ist  $a$  eine winkeltreue Abbildung der Ebene. Da sich  $a_0$  von  $a$  höchstens durch eine winkeltreue Abbildung unterscheidet, so folgt: *Alle Kreisverwandtschaften sind winkeltreu.*

Der Zusammenhang der Abbildungen  $a$  und  $a'$  ist in Abb. 244a, b durch Hervorhebung eines durch  $P$  gehenden Kreises  $k$  der Ebene veranschaulicht, der stereographisch einem Großkreis  $l$  der Kugel entspricht. Durch  $a'$  wird  $l$  in einen durch  $N$  gehenden Großkreis  $n$  übergeführt,

der die Gerade  $g$  zum Bilde hat. Durch  $a$  geht also  $h$  in  $g$  über. Aus den Figuren erkennt man ferner, daß das Innere und das Äußere von  $k$  in die beiden von  $g$  begrenzten Halbebenen übergeht, was aus Stetigkeitsgründen ohnehin klar ist.

Die Umklappung  $u$  der Ebene um  $g$  ist eine Kreisverwandtschaft. Demnach ist die Abbildung  $i = au a^{-1}$  eine Kreisverwandtschaft, die die Peripherie von  $k$  punktweise fest läßt und die das Innere und das Äußere dieses Kreises miteinander vertauscht. Die Abbildung  $i$  wird Inversion oder Spiegelung am Kreise  $k$  genannt. Diese Abbildung ist besonders wichtig und sei deshalb etwas genauer betrachtet.

Es sei  $h$  ein Kreis, der  $k$  in einem Punkt  $R$  senkrecht durchschneidet (Abb. 245). Dann treffen sich  $h$  und  $k$  in einem weiteren Punkt  $S$  und

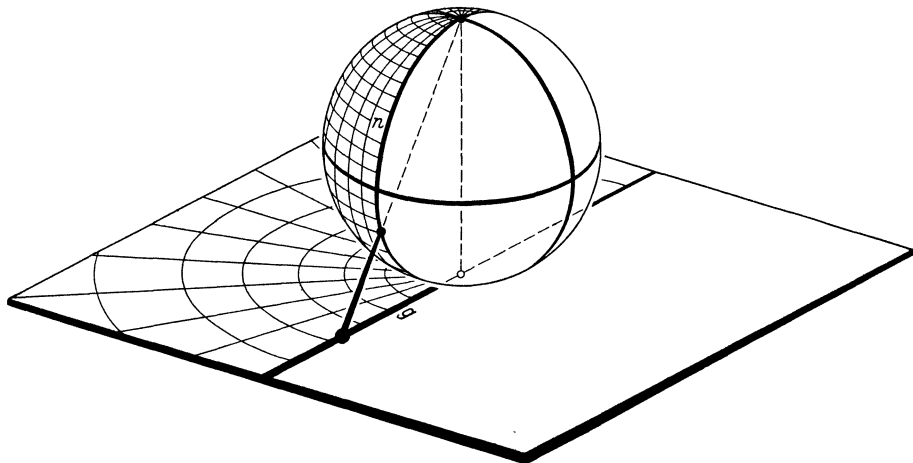


Abb. 244b.

schneiden einander auch in  $S$  senkrecht. Die Tangenten an  $h$  in  $R$  und  $S$  sind dann Radien von  $k$  und treffen einander im Mittelpunkt  $M$  von  $k$ , der somit im Äußeren von  $h$  liegt. Durch die Inversion  $i$  muß  $h$  in einen Kreis  $h'$  übergehen, der ebenfalls durch  $R$  und  $S$  geht, denn diese Punkte bleiben fest.  $h'$  muß wegen der Winkeltreue der Inversion den Kreis  $k$  in  $R$  und  $S$  senkrecht durchschneiden. Das ist aber nur möglich, wenn  $h'$  mit  $h$  identisch ist. Somit wird durch  $i$  jeder Kreis  $h$ , der  $k$  senkrecht schneidet, in sich übergeführt. Da Inneres und Äußeres von  $k$  vertauscht werden, müssen auch die beiden Kreisbögen von  $h$  vertauscht werden, in die  $h$  durch  $k$  zerlegt wird.

Betrachten wir jetzt eine Gerade  $l$  durch  $M$ , z. B. die Gerade  $RM$ , die  $k$  zum zweitenmal in  $R'$  schneiden möge (Abb. 245). Dann muß  $l$  in einen Kreis oder eine Gerade  $l'$  übergehen, so daß  $l'$  in  $R$  und  $R'$  auf  $k$  senkrecht steht. Das ist nur möglich, wenn  $l'$  mit  $l$  identisch ist. Die Inversion führt demnach alle Durchmesser von  $k$  in sich über. Da diese

Geraden in der erweiterten Ebene außer  $M$  nur den unendlich fernen Punkt  $U$  gemein haben, so muß  $M$  mit  $U$  vertauscht werden. Die Gesamtheit der nicht durch  $M$  gehenden Geraden wird demnach mit der Gesamtheit der durch  $M$  gehenden Kreise vertauscht.

Sei nun  $P$  ein von  $R$  und  $S$  verschiedener Punkt von  $h$ . Dann kann das Bild von  $P$  bei der Inversion  $\bar{i}$  nur der zweite Schnittpunkt  $Q$  der Geraden  $MP$  mit  $h$  sein, denn sowohl  $MP$  als auch  $h$  gehen in sich über. Nach dem elementaren Satz über das Produkt der Sehnenabschnitte im Kreis ist  $MP \cdot MQ = MR^2$ . Man nennt  $Q$  den zu  $P$  bezüglich  $h$  inversen Punkt, und wir haben ein Verfahren gefunden, um zu jedem Punkt  $P$  auch ohne den Hilfskreis  $h$  den inversen bezüglich  $h$  zu finden. Ist nämlich  $r$  der Radius von  $h$ , so haben wir den zu  $P$  inversen Punkt  $Q$  auf dem von  $M$  ausgehenden Halbstrahl  $MP$  so zu bestimmen, daß die

Gleichung  $MP \cdot MQ = r^2$  gilt.

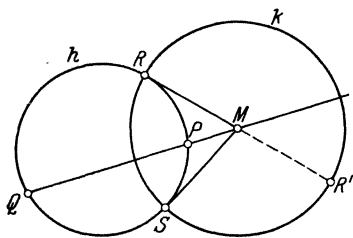


Abb. 245.

Man kann beweisen, daß jede Kreisverwandtschaft sich aus höchstens drei Inversionen zusammensetzen läßt. Wir wollen besonders die Gesamtheit der Kreisverwandtschaften betrachten, die einen festen Kreis  $k$  sowie dessen Inneres in sich überführen. Diese Abbildungen bilden ersichtlich eine Gruppe  $H$ . Ist  $n$  ein

auf  $k$  senkrechter Kreis, so gehört die Inversion an  $n$  jedenfalls zu  $H$ . Man kann zeigen, daß jede Abbildung aus  $H$  durch drei Inversionen erzeugbar ist, deren Grundkreise auf  $k$  senkrecht stehen, durch drei Inversionen also, die selbst zu  $H$  gehören.

Nunmehr wollen wir diese Betrachtungen mit dem Modell der hyperbolischen Geometrie in Zusammenhang bringen, das wir im vorigen Paragraphen konstruiert haben. Die hyperbolische Ebene sei dargestellt durch das Innere eines Kreises  $m$  in einer horizontalen Ebene. Im Mittelpunkt von  $m$  legen wir auf die Ebene eine Kugel, die mit  $m$  gleich großen Radius hat (Abb. 246). Wir projizieren nun  $m$  und das Innere von  $m$  durch vertikale Parallelprojektion auf die untere Halbkugel, die von dem zu  $m$  kongruenten Großkreis  $l$  begrenzt wird. Dadurch wird zunächst diese Halbkugel zu einem weiteren Modell der hyperbolischen Ebene. Jede Sehne  $g$  von  $m$  geht in einen auf  $l$  senkrechten Halbkreis  $v$  der Kugel über, diese Halbkreise sind also jetzt als die Bilder der hyperbolischen Geraden anzusehen. Nunmehr projizieren wir stereographisch die Halbkugel auf die Ebene zurück, wobei eine Kreisscheibe  $k$  bedeckt wird. Das Innere von  $k$  ist damit zu einem neuen Modell der hyperbolischen Ebene geworden. In diesem Modell sind die Halbkreise  $v$  wegen der Winkeltreue und Kreistreue der stereographischen Projektion in Kreisbögen  $n$  übergegangen, die auf dem Kreise  $k$  senkrecht stehen.

Zu diesen Kreisbögen sind hier und im folgenden die Durchmesser von  $k$  als Grenzfälle hinzuzurechnen.

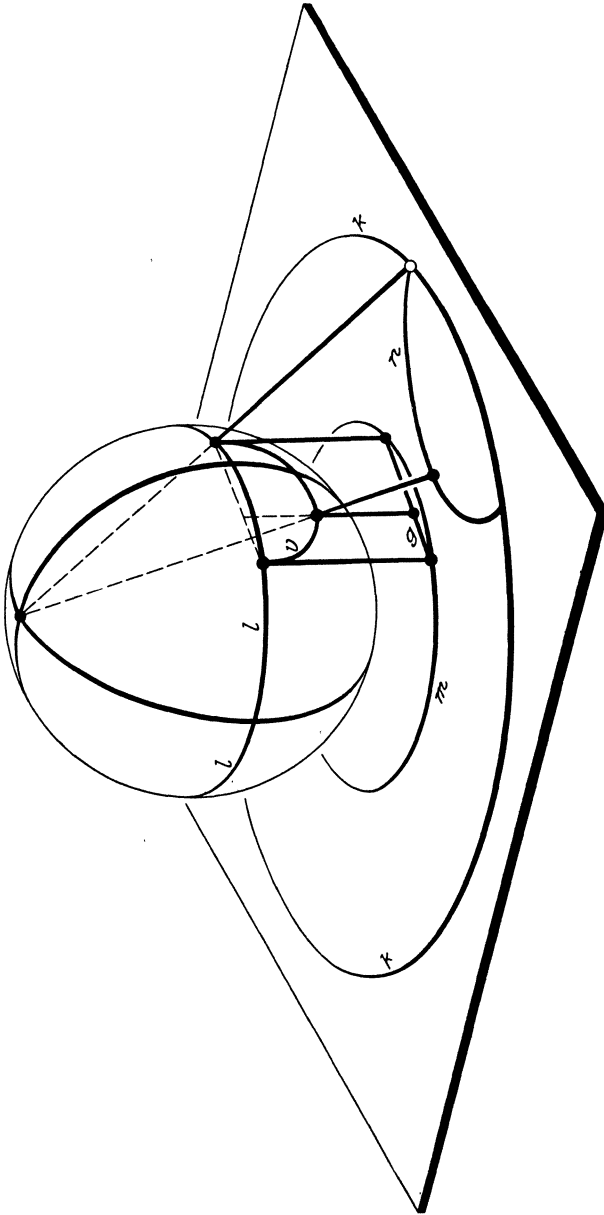


Abb. 246.

Wir wollen dieses neue Modell, das von POINCARÉ stammt, genauer betrachten. Aus unserer Ableitung folgt, daß die Gesamtheit der auf



$k$  senkrechten Kreisbögen umkehrbar eindeutig der Gesamtheit der Sehnen eines anderen Kreises  $m$  zugeordnet werden kann. Demnach können wir zwei Punkte  $A$  und  $B$  im Innern von  $k$  stets durch genau einen solchen Bogen verbinden. Sind  $R$  und  $S$  seine beiden Schnittpunkte mit  $k$  (Abb. 247), so läßt sich der hyperbolische Abstand von  $A$  und  $B$  aus der Formel (1) S. 214 ableiten. Sind nämlich  $A'B'R'S'$  diejenigen Punkte des ursprünglichen Modells, aus denen  $ABRS$  durch die von uns beschriebene Konstruktion hervorgegangen sind, so läßt sich durch projektiv-geometrische Sätze die Relation beweisen:

$$\frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} = \sqrt{\frac{A'R' \cdot B'S'}{B'R' \cdot A'S'}}$$

Hieraus ergibt sich für den hyperbolischen Abstand  $s$  von  $A$  und  $B$  in unserem neuen Modell die Formel:

$$(2) \quad s = c \left| \log \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right|.$$

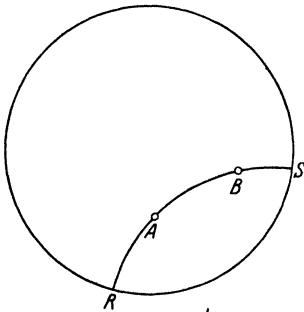


Abb. 247.

Nun muß jeder Bewegung der hyperbolischen Ebene in sich eine Abbildung  $a$  des Innern von  $k$  auf sich entsprechen, die die Gesamtheit der auf  $k$  senkrechten Kreisbögen in sich überführt. Es ist plausibel und leicht streng zu schließen, daß diese Abbildung eine Kreisverwandtschaft ist, also der früher betrachteten Gruppe  $H$  angehört. Darüber hinaus läßt sich zeigen, daß die Gruppe  $H$  sogar mit der

Gruppe aller hyperbolischen Bewegungen identisch ist<sup>1</sup>. Nun sind die Abbildungen  $H$  als Kreisverwandtschaften winkeltreu und lassen gleichzeitig als hyperbolische Bewegungen die hyperbolischen Winkel unverändert. Hieraus folgt, daß die euklidischen Winkel im POINCARÉschen Modell den hyperbolischen Winkeln proportional mit einem festen Proportionalitätsfaktor sein müssen, und da der Vollwinkel  $2\pi$  der hyperbolischen Ebene natürlich ungeändert wiedergegeben wird, so muß der Proportionalitätsfaktor Eins betragen. *Das POINCARÉsche Modell ist winkeltreu.*

Man kann analytisch eine Abbildungsformel aufstellen, die direkt ein vorgegebenes Stück einer Fläche konstanter negativer Krümmung winkeltreu auf ein Stück der Ebene im Innern von  $k$  derart abbildet, daß die geodätischen Linien in die auf  $k$  senkrechten Kreisbögen übergehen.

<sup>1</sup> Als Bewegungen gelten hier auch solche längentreuen Abbildungen der hyperbolischen Ebene, die sich nicht stetig erzeugen lassen. Eine einfache derartige Bewegung wird durch jede in  $H$  vorkommende Inversion dargestellt: eine „Umklappung“ der hyperbolischen Ebene um eine Gerade. Nach S. 224 ist jede hyperbolische Bewegung durch höchstens drei Umklappungen erzeugbar.

Wir wollen jetzt den Beweis des S. 217 ausgesprochenen Satzes nachholen, daß die Winkelsumme im Dreieck in der hyperbolischen Geometrie stets kleiner ist als  $\pi$ . Wir gehen von einem beliebigen Dreieck  $ABC$  aus und legen das POINCARÉsche Modell zugrunde (Abb. 248). Nach den Kongruenzaxiomen, die ja in der hyperbolischen Geometrie gelten, können wir ein zu  $ABC$  kongruentes Dreieck  $A'B'M$  zeichnen, bei dem der  $C$  entsprechende Punkt  $M$  der Mittelpunkt von  $k$  ist. Nun haben wir S. 223 gesehen, daß jeder durch  $M$  gehende auf  $k$  senkrechte Kreis notwendig in einen Durchmesser von  $k$  entarten muß, während die nicht durch  $M$  gehenden auf  $k$  senkrechten Kreise den Punkt  $M$  im Äußern lassen. In unserem Modell werden demnach die hyperbolischen Geraden  $A'M$  und  $B'M$  durch euklidische Geraden dargestellt, die hyperbolische Gerade  $A'B'$  dagegen durch einen Kreisbogen, der  $M$  im Äußern läßt. Die euklidischen Winkel bei  $A'$  und  $B'$  fallen daher in dem von zwei Geraden und einem Kreisbogen begrenzten Dreieck  $A'B'M$  kleiner aus als im geradlinigen Dreieck  $A'B'M$ , und demnach bleibt auch die Winkelsumme unter  $\pi$ . Wegen der Winkeltreue des Modells gilt dasselbe für die Summe der hyperbolischen Winkel des hyperbolischen Dreiecks  $A'B'M$  und des dazu kongruenten Dreiecks  $ABC$ .

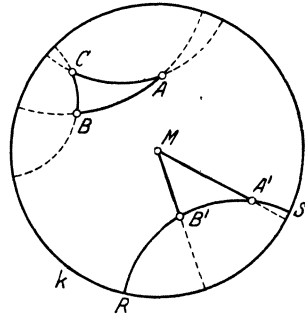


Abb. 248.

Es liegt nahe, unter den hyperbolischen Bewegungen nach diskontinuierlichen Gruppen zu suchen. In der elliptischen Geometrie reduzierte sich dieses Problem auf die Betrachtung regulärer Polyeder, und es gab nur wenige Gruppen dieser Art. In der euklidischen Geometrie war die Aufstellung schon schwieriger. In der hyperbolischen Geometrie ist nun die Anzahl der diskontinuierlichen Gruppen noch bei weitem größer als in der euklidischen Geometrie. Alle diese Gruppen werden im POINCARÉschen Modell durch Gruppen von Kreisverwandtschaften realisiert, die als Untergruppen in  $H$  enthalten sind.

In der Funktionentheorie spielen diese Gruppen eine Rolle. Besonders wichtig unter ihnen sind die „Schiebungsgruppen“. Als „Schiebung“ bezeichnet man jede hyperbolische Bewegung, die sich stetig aus der Identität erzeugen läßt und die keinen Punkt fest läßt. In der ebenen elliptischen Geometrie gibt es kein Analogon dazu, da jede ebene elliptische Bewegung einen Fixpunkt besitzt. In der euklidischen Geometrie entsprechen den Schiebungen die Translationen. Für die Zusammensetzung von Schiebungen besteht aber kein so einfaches Gesetz wie für die Zusammensetzung von Translationen, da in der hyperbolischen Geometrie die Eindeutigkeit des Parallelismus wegfällt.

Wir wollen uns auf diejenigen diskontinuierlichen Gruppen von Schiebungen beschränken, die einen geschlossenen Fundamentalbereich haben. Ihnen entsprechen die euklidischen Translationsgruppen mit einem Parallelogramm als Fundamentalbereich. Bei einer hyperbolischen Schiebungsgruppe mit geschlossenem Fundamentalbereich ist dieser niemals ein Viereck. Dagegen kann außer 4 jede andere durch 4 teilbare Zahl als Eckenzahl des Fundamentalbereichs auftreten. In Abb. 249 ist für den Fall achteckiger Fundamentalbereiche die Pflasterung der hyperbolischen Ebene mit solchen Fundamentalbereichen im POINCARÉschen Modell veranschaulicht. Die vollständige Pflasterung läßt sich natürlich nicht zeichnen, da die Kreisbogenachtecke sich gegen

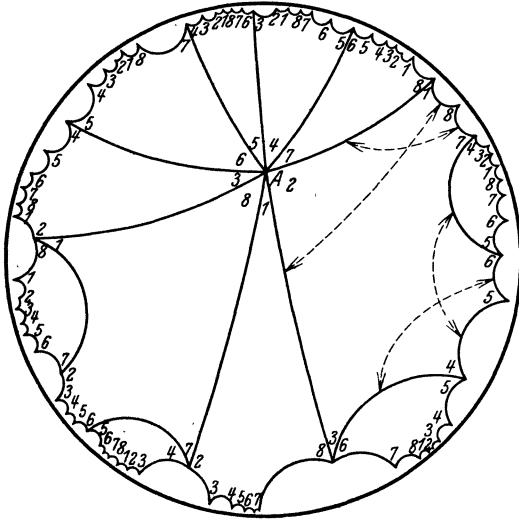


Abb. 249.

den Kreisrand zu immer mehr zusammendrängen. Wie im Fundamentalparallelogramm der euklidischen Translationsgruppen sind auch hier die Seiten des Fundamentalbereichs paarweise gleich lang und äquivalent. In Abb. 249 ist diese Paarung an einem der Fundamentalbereiche angedeutet. Entsprechende Ecken verschiedener Fundamentalbereiche sind durch gleiche Ziffern gekennzeichnet. Man erkennt, daß um einen beliebig herausgegriffenen

Eckpunkt  $A$  herum jede Ziffer genau einmal auftritt. Hieraus folgt, daß die Winkelsumme im Fundamentalbereich  $2\pi$  betragen muß. Auch in jeder anderen Schiebungsgruppe weisen die Fundamentalbereiche die analoge Anordnung auf, die Winkelsumme im Fundamentalbereich muß daher stets  $2\pi$  betragen. Ferner müssen die Seiten in einer bestimmten, hier nicht näher zu beschreibenden Zuordnung paarweise gleich sein. Im übrigen kann der Fundamentalbereich beliebig vorgegeben werden. Daß die Winkelsumme  $2\pi$  betragen muß, bildet den Grund dafür, warum keine viereckigen Fundamentalbereiche vorkommen können. Denn die Winkelsumme in einem hyperbolischen Viereck ist stets kleiner als  $2\pi$ , wie man leicht durch Zerlegung des Vierecks in zwei Dreiecke erkennt.

Noch weit größer ist die Mannigfaltigkeit der Schiebungsgruppen mit offenem Fundamentalbereich. Eine solche Gruppe kommt in der Theorie der elliptischen Modulfunktion zur Anwendung.

### § 37. Methoden der Abbildung. Längentreue, inhaltstreue, geodätische, stetige und konforme Abbildung.

Wir haben öfters und auf verschiedene Arten Flächen aufeinander abgebildet, z. B. durch Zentralprojektion oder durch parallele Normalen. Wir wollen jetzt zusammenfassend die wichtigsten Arten von Abbildungen einander gegenüberstellen.

Das getreueste Bild einer Fläche gibt die *längentreue* Abbildung. Dabei ist die geodätische Entfernung zweier Punkte stets der geodätischen Entfernung ihrer Bildpunkte gleich, alle Winkel bleiben erhalten, und geodätische Linien gehen in geodätische Linien über. Wie schon erwähnt, lassen sich zwei beliebige Flächenstücke gewöhnlich nicht längentreu aufeinander abbilden. In entsprechenden Punkten müssen nämlich die GAUSSschen Krümmungen der Flächen übereinstimmen. Daher kann man auf ein Stück der Ebene nur solche Flächenstücke längentreu abbilden, deren GAUSSsche Krümmung überall verschwindet, also z. B. kein Stück einer Kugel. Jede Landkarte weist infolgedessen Verzerrungen auf.

Weniger genau, dafür aber öfter anwendbar ist die *inhaltstreue* Abbildung. Sie wird durch die Forderung charakterisiert, daß jede geschlossene Kurve ein Flächenstück desselben Inhalts umschließt wie ihre Bildkurve. Es ist plausibel und leicht zu beweisen, daß diese Forderung für beliebige geschlossene Kurven erfüllt ist, wenn sie nur für alle „unendlich kleinen“ geschlossenen Kurven gilt. Daher läßt sich die inhaltstreue Abbildung leicht differentialgeometrisch charakterisieren.

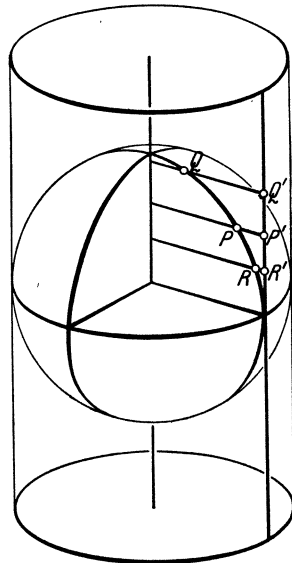


Abb. 250.

Die inhaltstreue Abbildung wird in der Geographie viel benutzt. Es gibt ein einfaches Verfahren, um Teile der Kugel inhaltstreu auf Teile der Ebene abzubilden. Man legt um die Kugel einen Kreiszyylinder vom gleichen Radius (Abb. 250). Man projiziert die Kugelpunkte nach außen längs der Zylindernormalen auf den Zylinder. Schneidet man den Zylinder längs einer Erzeugenden auf und wickelt ihn auf die Ebene ab, so erhält man, wie die Rechnung zeigt, ein inhaltstreuues Bild der Kugel in der Ebene. Das Bild wird offenbar um so stärker verzerrt, je weiter man sich von dem Berührungskreise des Zylinders mit der Kugel entfernt.

Ebenfalls wichtig in der Geographie, vor allem für Schiffskarten, ist die *geodätische* Abbildung. Bei ihr wird verlangt, daß die geodätischen Linien der einen Fläche in die der anderen übergehen. Die längentreuen

Abbildungen sind also spezielle geodätische Abbildungen. Eine andere solche Abbildung haben wir beim Studium der elliptischen Geometrie betrachtet; projizieren wir die Kugel von ihrem Mittelpunkt aus auf eine Ebene, so gehen die Großkreise der Kugel in die Geraden der Ebene über; die Abbildung ist also geodätisch. Damit ist gleichzeitig eine geodätische Abbildung aller Flächen konstanter positiver GAUSSscher Krümmung auf die Ebene gegeben. Denn alle diese Flächen lassen sich längentreu auf Kugeln abbilden. Auch für alle Flächen konstanter negativer GAUSSscher Krümmung gibt es eine geodätische Abbildung auf die Ebene. Sie wird durch das in § 35 geschilderte Modell der hyperbolischen Ebene geleistet.

Es läßt sich zeigen, daß es außer den Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung keine Fläche gibt, die auf die Ebene geodätisch abgebildet werden kann. Das allgemeine Problem, wann zwei krumme Flächenstücke *aufeinander* geodätisch abgebildet werden können, führt auf schwierige Rechnungen. Die Verallgemeinerung dieses Problems von den Flächen auf drei- oder mehrdimensionale Räume spielt eine gewisse Rolle in der neueren Physik; nach der allgemeinen Relativitätstheorie hat man nämlich die Bahnkurven materieller Punkte als geodätische Linien eines vierdimensionalen Kontinuums aufzufassen.

Die allgemeinste Abbildung, die überhaupt der Anschauung zugänglich ist, ist die *stetige* Abbildung. Bei ihr wird nur verlangt, daß sie umkehrbar eindeutig ist und daß benachbarte Punkte benachbart bleiben. Eine stetige Abbildung kann also jede Figur beliebig verzerren, nur dürfen zusammenhängende Teile nicht auseinandergerissen und getrennte Teile nicht zusammengeheftet werden. Trotz dieser großen Allgemeinheit vermag die stetige Abbildung nicht zwei beliebige Flächenstücke ineinander überzuführen. Ein Beispiel zweier Flächenstücke, die sich nicht stetig aufeinander abbilden lassen, sind die Kreisfläche und das ebene Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen (Abb. 251). Nicht einmal die Ränder dieser beiden Flächenstücke lassen sich stetig aufeinander abbilden, da die Kreisscheibe von einer zusammenhängenden Kurve berandet wird, während der Rand des Ringgebiets aus zwei getrennten Stücken besteht.

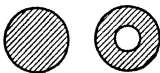


Abb. 251.

Die Frage, wann zwei Flächen stetig aufeinander abgebildet werden können, gehört in den Problembereich der Topologie, den wir im letzten Kapitel behandeln. Offenbar umfaßt diese Abbildungsart alle übrigen; eine geometrische Abbildung wird immer nur, soweit sie stetig ist, brauchbare Ergebnisse liefern. So hatten wir nach Abb. 250 Kugelstücke inhaltstreu auf die Ebene abgebildet. Die ganze Kugeloberfläche geht offenbar in ein Rechteckgebiet über. Man erkennt, daß die Abbildung auf dem Rand des Rechtecks ihre anschauliche Bedeutung verliert, weil sie dort aufhört, stetig zu sein. In der neueren Topologie werden

allerdings noch allgemeinere Abbildungen betrachtet, die nicht umkehrbar eindeutig, sondern nur in einer Richtung eindeutig und stetig sind, z. B. Abbildungen eines Flächenstücks auf ein Kurvenstück.

Eingehender als alle bisher genannten Abbildungsarten ist die *winkeltreue* oder *konforme* Abbildung untersucht worden. Sie wird durch die Forderung gekennzeichnet, daß die Winkel, unter denen sich zwei Kurven schneiden, unverzerrt wiedergegeben werden. Abgesehen von den längentreuen Abbildungen sind die stereographische Projektion und die Kreisverwandtschaften die einfachsten Beispiele solcher Abbildungen. Eine winkeltreue Abbildung von Flächen negativer GAUSS'Scher Krümmung auf die Ebene gibt uns das POINCARÉ'Sche Modell der hyperbolischen Geometrie.

Die winkeltreue Abbildung hat mit der längentreuen etwas Gemeinsames. Es läßt sich nämlich analytisch zeigen, daß sehr kleine Figuren bei winkeltreuer Abbildung fast unverzerrt bleiben; d. h. außer den Winkeln bleiben zwar nicht die Längen, wohl aber die Längenverhältnisse annähernd erhalten, um so genauer, je kleiner die betrachtete Figur ist. Die Bezeichnung *konform* weist auf diese Eigenschaft hin. Im kleinen kommt demnach die konforme Abbildung der längentreuen am nächsten unter den hier beschriebenen Abbildungsarten. Denn aus unseren Beispielen ist ersichtlich, daß bei inhaltstreuen oder geodätischen Abbildungen auch beliebig kleine Figuren beliebig stark verzerrt werden können.

Während nun die längentreue Abbildung nur in sehr beschränktem Maße anwendbar ist, besitzt die konforme Abbildung eine große Anpassungsfähigkeit, und gerade durch die Frage nach ihrer Anwendbarkeit ist die konforme Abbildung in den Mittelpunkt fruchtbarer geometrischer Untersuchungen gerückt. Die einfachste Frage dieser Art, wann nämlich zwei *ebene* Flächenstücke konform aufeinander abgebildet werden können, führt auf eine anschauliche Deutung der komplexen Zahlen und wird in der *geometrischen Funktionentheorie* behandelt.

### § 38. Geometrische Funktionentheorie. RIEMANN'Scher Abbildungssatz. Konforme Abbildung im Raum.

Wir legen ein cartesisches Koordinatensystem in der Ebene zugrunde und ordnen jedem beliebigen Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x, y$  die komplexe Zahl  $z = x + iy$  zu. Hierdurch ist eine eindeutige Beziehung zwischen den komplexen Zahlen und den Punkten der Ebene hergestellt. Es ist zweckmäßig, diese Beziehung dadurch zu vervollständigen, daß man der Ebene wie in der Lehre von den Kreisverwandtschaften einen unendlich fernen Punkt  $P_\infty$  zuschreibt, den man der „Zahl“  $\infty$  zuordnet. Man nennt diese anschauliche Realisierung der komplexen Zahlen die *Zahlenebene*.

Abbildungen eines Stückes der Ebene auf ein anderes gehen hiernach in Zuordnungen zwischen komplexen Zahlen über. Als einfaches Beispiel möge die Beziehung  $w = az + b$  betrachtet werden, wobei  $a, b$  beliebige komplexe Konstanten seien; nur sei  $a \neq 0$  vorausgesetzt. Als Bild des Punktes, dem die komplexe Zahl  $z$  entspricht, sehen wir den Punkt an, dem  $w = az + b$  entspricht. Die so entstehende Abbildung der Ebene auf sich ist nun einfach eine Ähnlichkeitstransformation, und umgekehrt erhält man alle stetig aus der Identität erzeugbaren Ähnlichkeitstransformationen der Ebene, wenn man den Zahlen  $a$  und  $b$  alle komplexen Werte außer  $a = 0$  erteilt. Die Ähnlichkeitstransformationen, die nur durch eine Umklappung der Ebene, aber nicht in der Ebene selbst stetig erzeugbar sind, entsprechen der Gleichung  $w = a\bar{z} + b$ , wobei mit  $\bar{z}$  die zu  $z = x + iy$  konjugiert komplexe Zahl  $\bar{z} = x - iy$  bezeichnet wird. Man kann diese Sätze elementar beweisen.

Den Kreisverwandtschaften, die  $P_\infty$  nicht fest lassen, entsprechen die *gebrochenen linearen Transformationen*

$$(1) \quad w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0),$$

wenn man nur diejenigen Kreisverwandtschaften betrachtet, die stetig in der Ebene aus der Identität erzeugbar sind. Die übrigen erhält man, wenn man in (1)  $z$  durch  $\bar{z}$  ersetzt. Die Inversion an dem um den Anfangspunkt geschlagenen Kreis  $k$  vom Radius 1 wird z. B. durch die Formel  $w = \frac{1}{\bar{z}}$  dargestellt. Denn es ist

$$w = u + iv = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2},$$

also

$$(2) \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Sind  $M, P, Q$  die Punkte mit den Koordinaten  $(0, 0), (x, y), (u, v)$ , also  $P, Q$  die den Zahlen  $z, w$  zugeordneten Punkte, so folgt aus (2), daß  $P$  und  $Q$  auf demselben von  $M$  ausgehenden Halbstrahl liegen und daß die Abstände  $MP$  und  $MQ$  die Relation  $MP \cdot MQ = 1$  erfüllen.  $P$  und  $Q$  liegen daher in der Tat invers zu  $k$ .

Geht man nun von einer allgemeineren Relation  $w = f(z)$  aus, wo etwa  $f(z)$  irgendeine gebrochene rationale Funktion von  $z$  ist, so wird auch durch diese Funktion stets eine *konforme* Abbildung der Ebene vermittelt. Man muß sich dann nur auf Gebiete der Ebene beschränken, die gewisse durch die Funktion bestimmte Punkte nicht enthalten.

Jede Funktion  $f(z)$  von der Art, daß  $w = f(z)$  eine konforme Abbildung in der Zahlenebene definiert, nennt man eine *analytische Funktion*<sup>1</sup>. Nicht nur die rationalen, sondern fast alle in der Praxis überhaupt

<sup>1</sup> Diese anschauliche Definition ist äquivalent damit, daß  $f(z)$  differenzierbar ist, d. h. daß der Quotient  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  in jedem Punkt  $z_0$  des Gebiets gegen eine

vorkommenden Funktionen sind analytisch. Man kann mit den komplexen analytischen Funktionen weitgehend genau so rechnen wie mit reellen Funktionen reeller Veränderlicher. Das zweidimensionale Problem der konformen Abbildung wird damit auf Betrachtungen von eindimensionalem Typus zurückgeführt.

Durch solche Betrachtungen der komplexen Funktionentheorie kann man zunächst den wichtigen Satz beweisen, daß die Kreisverwandtschaften bzw. die ganzen und gebrochenen linearen Funktionen die einzigen konformen Abbildungen darstellen, die das Innere eines Kreises in das Innere oder Äußere eines (anderen oder desselben) Kreises überführen. Hiernach stellen uns die hyperbolischen Bewegungen im POINCARÉschen Modell sämtliche konformen Abbildungen einer Kreisscheibe auf sich selbst dar. Wenn ich also von einer konformen Abbildung weiß, in was für ein Gebiet sie eine Kreisscheibe überführt, so ist die Abbildung durch diese Angabe bis auf eine hyperbolische Bewegung bestimmt.

Dementsprechend können wir die analytischen Funktionen bis auf eine unwesentliche Transformation durch das Gebiet kennzeichnen, in das sie eine Kreisscheibe verwandeln. Gebiete, die durch eine Kreisverwandtschaft auseinander hervorgehen, wollen wir dabei nicht als

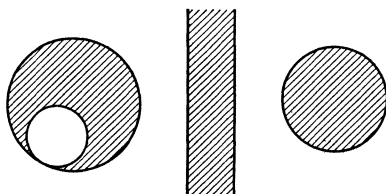


Abb. 252.

wesentlich verschieden ansehen. Z. B. können wir statt von einer Kreisscheibe auch von einer Halbebene ausgehen. So führt die Funktion  $\sqrt{z}$  eine Halbebene in einen Quadranten über, und die Funktion  $\log z$  verwandelt eine Halbebene in einen Streifen zwischen zwei parallelen Geraden. Durch lineare Transformationen läßt sich daher leicht eine konforme Abbildung herstellen, die die in Abb. 252 gezeichnete Kreisscheibe in eins der beiden anderen in dieser Abbildung gezeichneten Flächenstücke überführt.

In allen diesen und den später zu besprechenden Beispielen ist die Abbildung zwar in den inneren Punkten der Flächenstücke durchweg konform, auf dem Rand dagegen nur, soweit keine Ecken auftreten. Soll ein glatter Randbogen in einen geknickten übergehen, so kann natürlich die Abbildung dort nicht konform sein. Es ergibt sich, daß in solchen Punkten die Abbildung stets winkelpropportional ist, d. h. daß alle Winkel mit dem gleichen Faktor multipliziert werden. So geht bei der durch  $\sqrt{z}$  vermittelten Abbildung die Gerade, die die betrachtete Halbebene begrenzt, in die Schenkel eines rechten Winkels über. In dem

---

komplexe Zahl  $f'(z_0)$  konvergiert, wenn  $z$  im Gebiet gegen  $z_0$  strebt. Das Wesentliche dabei ist, daß die Zahl  $f'(z_0)$  nicht davon abhängen darf, auf welchem Wege  $z$  in der Zahlenebene gegen  $z_0$  rückt.



Punkt, der in den Scheitel des Winkels übergeht, werden alle Winkel auf die Hälfte verkleinert.

RIEMANN hat den wichtigen Satz aufgestellt, daß jedes ebene Gebiet, das nicht die ganze euklidische Ebene ist und das umkehrbar eindeutig und stetig auf die Kreisscheibe abgebildet werden kann, auch *konform* auf sie abbildbar ist. Dieser Satz gibt eine Vorstellung von der Mannigfaltigkeit der analytischen Funktionen.

Der RIEMANNsche Abbildungssatz wurde von RIEMANN selbst nicht streng bewiesen, sondern nur als äquivalent einem Variationsproblem, dem sog. DIRICHLETSchen Problem, erkannt, von dem RIEMANN als evident annahm, daß es eine Lösung besitzt. Die Lösbarkeit des DIRICHLETschen Problems ist erst viel später streng bewiesen worden. Inzwischen ist es auch gelungen, den RIEMANNschen Abbildungssatz auf dem folgenden einfacheren Wege zu beweisen.

Um ein beliebiges in eine Kreisscheibe deformierbares Gebiet  $G$  konform auf die Kreisscheibe  $K$  abzubilden, geht man von irgendeiner konformen Abbildung  $a_0$  aus, die  $G$  konform auf ein Teilgebiet  $K_0$  von  $K$  abbildet. Man kann z. B. für  $a_0$  eine Ähnlichkeitstransformation wählen. Wir wollen auch noch fordern, daß bei  $a_0$  irgendein vorgegebener innerer Punkt  $P$  von  $G$  in den Kreismittelpunkt  $M$  übergeht. Sei jetzt  $R_0$  das Bild irgendeines anderen inneren Punktes  $Q$  von  $G$ . Dann läßt sich zeigen: Man kann die Abbildung  $a_0$  in eine andere konforme Abbildung  $a_1$  verwandeln, so daß  $G$  durch  $a_1$  in ein Teilgebiet  $K_1$  von  $K$  übergeführt wird, so daß ferner wieder  $P$  in  $M$  übergeht, und so daß  $Q$  in einen Punkt  $R_1$  des Radius  $MR_0$  übergeht, der von  $M$  weiter als  $R_0$  entfernt ist. Der Übergang von  $a_0$  zu  $a_1$  wird übrigens durch eine konforme Abbildung geliefert, der die Quadratwurzel aus einer gebrochenen linearen Funktion entspricht. Auf dieselbe Art kann ich auch  $a_1$  wieder abändern, und so gelange ich zu einer Folge von konformen Abbildungen  $a_n$  des Gebietes  $G$  auf Teilgebiete  $K_n$  von  $K$ , so daß bei allen diesen Abbildungen der Punkt  $P$  in  $M$ , und der Punkt  $Q$  in eine Folge von Punkten  $R_n$  übergeht, die sich auf dem Radius  $MR_0$  immer weiter von  $M$  entfernen. Es zeigt sich nun, daß die Gebiete  $K_n$  die Kreisscheibe  $K$  immer mehr ausfüllen und daß die Folge der Abbildungen  $a_n$  gegen eine konforme Abbildung  $a$  konvergiert.  $a$  bildet  $G$  konform auf  $K$  ab, wie der RIEMANNsche Satz es gefordert hatte.

Das hier skizzierte, von KOEBE stammende Verfahren zeigt, daß die gesuchte Abbildung durch eine Extremaleigenschaft ausgezeichnet ist. Offenbar ist nämlich der Punkt  $R$  von  $K$ , in den  $Q$  durch  $a$  abgebildet wird, derjenige Punkt auf  $MR_0$ , gegen den die Punkte  $R_n$  konvergieren. Für alle  $n$  ist daher  $MR > MR_n$ . Dieselbe Ungleichung gilt auch, wenn wir den Abstand nicht euklidisch, sondern hyperbolisch messen, indem wir das Innere von  $K$  als POINCARÉsches Modell der hyperbolischen Ebene ansehen. Denn der hyperbolische Abstand eines Punktes vom

Kreismittelpunkt  $M$  wird wie der euklidische längs der Radien gemessen, da diese die durch  $M$  gehenden hyperbolischen Geraden darstellen (vgl. S. 223, 227). Nun gibt es außer  $a$  noch andre konforme Abbildungen  $b$  von  $G$  auf  $K$ . Nach einem früher erwähnten Satz kann sich aber  $b$  von  $a$  nur durch eine hyperbolische Bewegung von  $K$  unterscheiden. Sind daher  $S, T$  die Bilder von  $P, Q$  bei  $b$ , so sind die hyperbolischen Abstände  $MR$  und  $ST$  notwendig gleich. Damit haben wir die gesuchte Extremaleigenschaft gefunden: *Bei jeder konformen Abbildung von  $G$  auf  $K$  haben die Bildpunkte eines beliebigen Paares innerer Punkte von  $G$  größeren hyperbolischen Abstand in  $K$  als bei jeder konformen Abbildung von  $G$  auf ein Teilgebiet von  $K$ .*

Im Sinn der hyperbolischen Geometrie können wir das Verfahren auch so beschreiben: Wenn wir  $G$  auf ein Gebiet  $K'$  der hyperbolischen Ebene konform abbilden, und wenn wir die Abbildung stetig so abzuändern suchen, daß sie konform bleibt, daß sich aber irgend zwei herausgegriffene Punkte voneinander immer mehr entfernen, so füllt  $K'$  allmählich die ganze hyperbolische Ebene aus. Der Abstand der beiden Punkte wächst bis zu einem *endlichen* Maximum, das dann und nur dann erreicht wird, wenn  $K'$  die ganze hyperbolische Ebene ausfüllt.

Es liegt nahe zu versuchen, das Innere von  $G$  statt auf die hyperbolische auf die euklidische Ebene konform abzubilden. Die *stetige* Abbildung ist natürlich möglich, da sich das Innere von  $G$  nach Voraussetzung auf das Innere eines Kreises und das Innere eines Kreises offenbar auf die euklidische Ebene stetig abbilden läßt (z. B. können wir das Kreisinnere  $H$  durch stereographische Projektion auf eine Halbkugel und diese durch Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt aus auf die euklidische Ebene  $E$  stetig abbilden). Die *konforme* Abbildung von  $H$  auf  $E$  ist aber unmöglich. Bei einer solchen Abbildung müßte nämlich jeder konformen Abbildung von  $H$  auf sich selbst eine konforme Abbildung von  $E$  auf sich selbst entsprechen. Die Gesamtheit der konformen Abbildungen von  $H$  auf sich sind die hyperbolischen Bewegungen, die eine dreiparametrische Schar bilden. Bestände also eine konforme Abbildung  $H \rightarrow E$ , so müßte auch die Gesamtheit der konformen Abbildungen von  $E$  auf sich eine dreiparametrische Schar bilden. Solche Abbildungen sind aber jedenfalls die Ähnlichkeitsformationen. Sie bilden eine vierparametrische Schar. Denn stellt man sie in der Form  $w = az + b$  dar, so werden sie durch die beiden komplexen Zahlen  $a$  und  $b$ , also durch vier reelle Zahlen bestimmt. Demnach gibt es keine konforme Abbildung von  $H$  auf  $E$ . Übrigens ist mit den Ähnlichkeitstransformationen die Gesamtheit der konformen Abbildungen von  $E$  auf sich erschöpft.

Im Raum läßt sich die konforme Abbildung genau so definieren wie in der Ebene. Im Raum aber ist die Gesamtheit aller konformen Abbildungen sehr beschränkt. Alle diese Abbildungen sind nämlich Kugelverwandtschaften, d. h. sie führen die Gesamtheit der Kugeln

und Ebenen in sich über. Die Gesamtheit aller Kugelverwandtschaften bildet eine zehnp-parametrische Schar. Eine besonders einfache Kugelverwandtschaft ist die räumliche Inversion. Sie ist ähnlich definiert wie die Inversion in der Ebene; nachdem ein fester Punkt  $M$  und eine feste positive Zahl  $r$  willkürlich vorgegeben sind, wird jedem von  $M$  verschiedenen Punkt  $P$  derjenige Punkt  $Q$  als Bild zugeordnet, der auf der von  $M$  ausgehenden Halbgeraden  $MP$  liegt und die Gleichung  $MP \cdot MQ = r^2$  erfüllt. Jede Kugelverwandtschaft läßt sich aus einer räumlichen Inversion und einer Ähnlichkeitstransformation zusammensetzen.

### § 39. Konforme Abbildung krummer Flächen. Minimalflächen. PLATEAUSCHES Problem.

Ein Beispiel für eine konforme Abbildung einer gekrümmten Fläche auf die Ebene ist die stereographische Projektion. Durch sie geht jede konforme Abbildung in der Ebene in eine konforme Abbildung auf der Kugel über. Den konformen Abbildungen der Kugel, die einen Punkt  $N$  festlassen, entsprechen bei stereographischer Projektion von  $N$  aus die konformen Abbildungen der euklidischen Ebene auf sich selbst. Wie wir erwähnten, sind das die Ähnlichkeitstransformationen und nur sie. Demnach sind alle konformen Abbildungen der Kugelfläche auf sich, die einen Punkt festlassen, Kreisverwandtschaften. Jede beliebige konforme Abbildung der Kugelfläche auf sich kann ich durch Drehung der Kugel um einen Durchmesser in eine Abbildung verwandeln, die einen Punkt festläßt. Daher muß die Gesamtheit aller konformen Abbildungen der Kugel auf sich mit der Gesamtheit der Kreisverwandtschaften auf der Kugel identisch sein, also der Transformationen, die den Kreisverwandtschaften der Ebene durch stereographische Projektion entsprechen. Die Kreisverwandtschaften der Ebene werden durch Formel (1), S. 232, dargestellt. Dabei treten vier komplexe Konstanten auf, die jedoch nur bis auf einen komplexen gemeinsamen Faktor bestimmt sind. Demnach bilden die Kreisverwandtschaften der Ebene und ebenso die der Kugel eine sechsp-parametrische Schar.

Man kann nun zeigen, daß jede beliebige geschlossene Fläche, die stetig auf die Kugel abgebildet werden kann, wie z. B. das Ellipsoid, auch konform auf die Kugel abbildbar ist. Hieraus folgt, daß irgend zwei solche Flächen stets auch aufeinander konform abgebildet werden können, und daß jede solche Fläche eine genau sechsp-parametrische Schar konformer Abbildungen auf sich selbst gestattet.

Die Flächen, die sich stetig auf das Innere eines Kreises oder auf die euklidische Ebene abbilden lassen, wie z. B. das hyperbolische Paraboloid, können sicher nicht alle konform aufeinander abgebildet werden, da ja z. B. das Kreisinnere nicht konform auf die euklidische Ebene abbildbar ist. Es gilt aber der wichtige „Entweder-Oder“-Satz, daß jede

solche Fläche entweder auf das Innere eines Kreises oder auf die euklidische Ebene konform abgebildet werden kann.

Auch für andere Flächentypen, z. B. die Oberfläche eines Torus, läßt sich die Frage nach der konformen Abbildbarkeit vollständig beantworten. Da hierbei topologische Hilfsmittel benötigt werden, werden wir erst im Kapitel über Topologie darauf zurückkommen.

Ein besonders interessantes Beispiel konformer Abbildung geben uns die Minimalflächen. Wir haben diese Flächen dadurch charakterisiert (S. 167), daß in jedem ihrer Punkte beide Hauptkrümmungen entgegengesetzt gleich sind. Aus dieser Definition läßt sich leicht folgern, daß bei den Minimalflächen die sphärische Abbildung konform ist, und umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß außer den Kugeln die Minimalflächen die einzigen Flächen sind, bei denen die sphärische Abbildung konform ausfällt. Die Minimalflächen stehen deswegen in enger Beziehung zur Funktionentheorie. Man kann jede analytische komplexe Funktion zur Bestimmung einer Minimalfläche verwenden.

Spannt man in einen geschlossenen Draht eine Membran aus Seifenhaut, so nimmt diese, wie früher erwähnt, die Gestalt einer Minimalfläche an. So ergibt sich das zuerst von PLATEAU gestellte Problem, zu jeder gegebenen geschlossenen Raumkurve ein Minimalflächenstück anzugeben, das von der Kurve begrenzt wird. Lange Zeit hat man sich vergeblich bemüht, auch nur die Existenz einer solchen Minimalfläche für jeden vorgegebenen Rand zu beweisen. Erst in neuester Zeit hat J. DOUGLAS<sup>1</sup> eine Lösung des allgemeinen PLATEAUSCHEN Problems gegeben.

DOUGLAS ersetzt das Problem durch ein noch umfassenderes; er sucht nicht nur eine Minimalfläche  $M$ , die in die gegebene Raumkurve  $r$  eingespannt ist, sondern auch ihre konforme Abbildung auf eine ebene Kreisscheibe  $K$ . Zu diesem Zweck wird zunächst die Abbildung betrachtet, durch die hierbei die Kurve  $r$  auf die Peripherie  $k$  von  $K$  übergeht. Es zeigt sich, daß diese Abbildung durch eine Extremaleigenschaft ausgezeichnet ist. Jeder Sehne  $s$  von  $r$  entspricht durch die Abbildung ihrer Endpunkte eine Sehne  $s'$  von  $k$ . Bezeichnet man das Verhältnis  $s'/s$  als Streckung der Sehne  $s$  und bildet man vom reziproken Quadrat der Streckung den Mittelwert über alle Sehnen von  $r$ , so wird bei der gesuchten Abbildung dieser Mittelwert so klein wie möglich<sup>2</sup>. Man kann

<sup>1</sup> Trans. Amer. math. Soc. Bd. 33 (1931). Unter etwas spezielleren Voraussetzungen hat kurz vorher T. RADÓ das PLATEAUSCHE Problem gelöst [Math. Z. Bd. 32 (1930)].

<sup>2</sup> In Formeln: Sind  $P$  und  $Q$  zwei Punkte von  $r$ , die in die Punkte  $P'$  und  $Q'$  von  $k$  übergehen, sind  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkelargumente von  $P'$  und  $Q'$  und setzt man  $\frac{PQ}{P'Q'} = v(\alpha, \beta)$ , so hat das Doppelintegral

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} [v(\alpha, \beta)]^2 d\alpha d\beta$$

bei der gesuchten Abbildung den kleinstmöglichen Wert.

also sagen, daß die gesuchte Abbildung alle Punkte von  $r$  im Mittel möglichst weit voneinander entfernt. Es läßt sich nun zeigen, daß eine Abbildung mit dieser Extremaleigenschaft stets existiert. Mit Hilfe dieser Abbildung  $r \rightarrow k$  lassen sich dann die cartesischen Koordinaten der übrigen Punkte von  $M$  als Ortsfunktionen auf  $K$  durch bekannte analytische Formeln<sup>1</sup> darstellen.

Setzt man  $r$  als ebene Kurve voraus, so entartet  $M$  in das ebene Gebiet  $G$ , das von  $r$  begrenzt wird. Das DOUGLASSCHE Verfahren liefert dann eine konforme Abbildung von  $G$  auf  $K$ , also eine Lösung des RIEMANNschen Abbildungsproblems. Diese Lösung ergibt sich offenbar gerade auf dem umgekehrten Weg wie bei dem früher beschriebenen Verfahren. Das frühere Konstruktionsverfahren ging von einem Paar innerer Punkte von  $G$  aus; indem man den hyperbolischen Abstand ihrer Bilder vergrößerte, wurde der Rand von  $G$  von selbst allmählich mit dem Rand von  $K$  zur Deckung gebracht. Das Verfahren von DOUGLAS dagegen ermittelt zunächst eine geeignete durch eine Extremaleigenschaft ausgezeichnete Abbildung des Randes von  $G$  auf den Rand von  $K$ . Die Abbildung der inneren Punkte ergibt sich dann von selbst.

Für spezielle Raumkurven  $r$  lassen sich die zugehörigen Minimalflächen auf viel einfacherem Wege bestimmen, z. B. wenn man für  $r$  ein räumliches geschlossenes geradliniges Polygon wählt. Während im allgemeinen die Minimalfläche in  $r$  einen singulären Rand besitzt, kann man es durch spezielle Wahl von  $r$  erreichen, daß die Minimalfläche sich über  $r$  hinaus regulär fortsetzen läßt. Auf diese Weise ist es NEOVIUS<sup>2</sup> gelungen, eine Minimalfläche zu konstruieren, die sich ohne Singularität und Selbstdurchdringung durch den ganzen Raum erstreckt und die gleiche Symmetrie besitzt wie das Diamantgerüst.

Das sphärische Bild dieser Fläche kann ebenfalls keinen Rand besitzen. Auch läßt sich zeigen, daß auf Minimalflächen keine parabolischen Kurven verlaufen, in denen das sphärische Bild umgeklappt sein könnte. Andererseits kann das sphärische Bild der NEOVIUSschen Fläche nicht glatt die ganze Kugel überdecken, da sonst jene Fläche stetig auf die Kugel abbildbar wäre. Der Widerspruch löst sich dadurch, daß auf der NEOVIUSschen Fläche Affensättel auftreten. In ihnen wird ein einmaliger Umlauf auf der Fläche in einen mehrmaligen Umlauf auf dem sphärischen Bild verwandelt (vgl. S. 179). Das sphärische Bild der NEOVIUSschen Minimalfläche überzieht nun die Kugel in unendlich vielen Schichten, die untereinander in den Bildern der Affensättel zusammenhängen. Auch bei vielen anderen Minimalflächen zeigt das sphärische Bild einen analogen Verlauf. RIEMANN wurde auf derart über der Kugel oder der Ebene ausgebreitete Flächen geführt, indem er die konforme Abbildung, die

<sup>1</sup> POISSONSche Integrale über  $r$ .

<sup>2</sup> E. R. NEOVIUS: Bestimmung zweier speziellen periodischen Minimalflächen. Akad. Abhandlung, Helsingfors 1883.

durch nichtlineare Funktionen, z. B.  $w = z^2$ , vermittelt wird, in ihrem Gesamtverlauf verfolgte. Die Stellen, in denen die Schichten einer RIEMANNschen Fläche analog wie das sphärische Bild eines Affensattels miteinander zusammenhängen, werden nach RIEMANN als Windungspunkte bezeichnet.

## Fünftes Kapitel.

### Kinematik.

Wir haben bisher hauptsächlich die im Raum *festen* Gebilde untersucht, da die Geometrie von diesen Gebilden ausgehen muß. Aber bereits in den Elementen der Geometrie spielt der Begriff der *Bewegung* eine Rolle. So haben wir zwei Figuren kongruent genannt, wenn sie durch eine Bewegung miteinander zur Deckung gebracht werden können. Ferner haben wir bewegliche Hyperboloide betrachtet (S. 15), haben Regelflächen durch eine wandernde Ebene bestimmt (S. 181) und haben Flächen verbogen und verzerrt (viertes Kapitel). In der Kinematik werden nun Bewegungen systematisch untersucht.

Wir wollen zunächst einen Teil der Kinematik behandeln, der eng mit der elementaren Metrik zusammenhängt: die Lehre von den Gelenkmechanismen. An zweiter Stelle wollen wir die stetigen Bewegungsvorgänge allgemeiner untersuchen; dabei werden wir nach differentialgeometrischen Methoden verfahren.

### § 40. Gelenkmechanismen.

Einen ebenen Gelenkmechanismus nennt man jedes ebene System von starren Stäben, die teilweise miteinander oder mit festen Punkten der Ebene drehbar verbunden sind, so daß das System in seiner Ebene noch bewegt werden kann. Der einfachste solche Mechanismus ist ein einziger starrer Stab, der in einem Endpunkt drehbar in der Ebene befestigt ist, also ein Zirkel. So wie der freie Endpunkt des Zirkels einen Kreis beschreibt, bewegen sich auch bei allen anderen ebenen Gelenkmechanismen alle Punkte der Stäbe auf algebraischen Kurven; d. h. auf Kurven, deren Koordinaten in einem cartesischen System einer algebraischen Gleichung genügen. Umgekehrt kann man zu jeder noch so komplizierten algebraischen Kurve eine geeignete Verbindung von Gelenken finden, mit deren Hilfe diese Kurve (wenigstens stückweise) konstruiert werden kann.

Für die einfachste algebraische Kurve, die gerade Linie, eine derartige Konstruktion anzugeben, ist das berühmte Problem der Geradföhrung. Ein Modell der Geradföhrung, den Inversor von PEAUCELLIER, werde hier näher betrachtet. Wir gehen aus von dem in Abb. 253