Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0038

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343 keines ihrer Punkte ganz auf einer Seite ihrer Tangente liegt, so läßt sich zeigen, daß die Kurve notwendig eine Gerade sein muß.

Neben den stetigen Mannigfaltigkeiten von Punkten werden in der Differentialgeometrie auch Mannigfaltigkeiten anderer Gebilde, z. B. Mannigfaltigkeiten von Geraden, betrachtet; Probleme dieser Art stellt uns unter anderem die geometrische Optik, die stetige Systeme von Lichtstrahlen untersucht.

Endlich führt die Differentialgeometrie auf das von GAUSS und RIEMANN zuerst erfaßte Problem, die Geometrie als Ganzes durch Begriffe und Axiome aufzubauen, die nur die unmittelbare Umgebung jedes Punkts betreffen. So entstand eine bis heute noch nicht erschöpfte Fülle von Möglichkeiten allgemeinerer Geometrien, von denen die „nichteuklidische Geometrie" ein wichtiges, aber nur höchst spezielles Beispiel bildet. Die allgemeine Relativitätstheorie hat uns gelehrt, daß der sinngemäßen Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit nicht die gewöhnliche euklidische Geometrie, sondern eine allgemeinere RIEMANNsche Geometrie zugrunde gelegt werden muß.

§ 26. Ebene Kurven.

Um mit dem Einfachsten zu beginnen, betrachten wir zunächst ebene Kurven. Wir beschränken uns dabei auf ein kleines Stück der Kurve, in dem sie sich nicht selbst durchschneidet.

Eine Gerade, die die Kurve in zwei Punkten schneidet, heißt Sekante der Kurve. Drehen wir nun eine Sekante s so um einen ihrer Schnittpunkte, daß der andere Schnittpunkt immer näher an den ersten heranrückt (Abb. 182), so nähert sich die Sekante einer bestimmten Lage t. Die Gerade, die diese Lage einnimmt, heißt Tangente der Kurve. Der festgehaltene Punkt heißt der Berührungspunkt dieser Tangente. Offenbar ist die Tangente diejenige Gerade durch den Berührungspunkt, die dort den Verlauf der Kurve am genauesten annähert; als Richtung einer Kurve in einem Punkt bezeichnet man deshalb die Richtung der zugehörigen Tangente. Man sagt, daß zwei Kurven sich in einem gemeinsamen Punkt unter dem Winkel α schneiden bzw. sich berühren, wenn die beiden Tangenten in diesem Punkt den Winkel α bilden bzw. zusammenfallen. Eine Gerade, die auf einer Tangente im Berührungspunkt senkrecht steht, heißt Normale der Kurve.

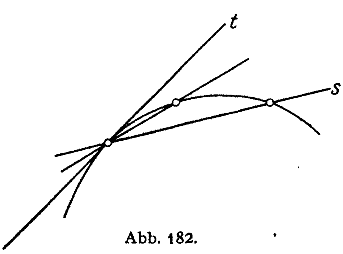

Abb. 182.

Tangente und Normale bilden für jeden Kurvenpunkt die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Dieses System ist besonders geeignet, das Verhalten der Kurve im betrachteten Punkt zu untersuchen. Ich gebe hierzu der Kurve willkürlich eine Durchlaufungsrichtung. Ferner numeriere ich die vier Quadranten, in die das Achsenkreuz die Ebene zerlegt. Und zwar erhält die Nummer 1 (Abb. 183) derjenige Quadrant, in dem ich mich befinde, wenn ich auf der Kurve im festgesetzten Sinne dem Nullpunkt des Systems zuwandere und ihm hinreichend nahe bin; die Nummern 2, 3, 4 erhalten die anderen Quadranten; und zwar soll stets die Tangente die Quadranten 1, 2 von den Quadranten 3, 4, und die Normale die Quadranten 1, 4 von den Quadranten 2, 3 trennen. Ich kann dann vier verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem ich mich im zweiten, dritten, vierten oder ersten Quadranten befinde, wenn ich auf der Kurve im festgesetzten Sinne den Nullpunkt gerade verlassen habe (I bis IV in Abb. 183). Nur im ersten Fall heißt der betrachtete Kurvenpunkt regulär, in den übrigen Fällen singulär. Das reguläre Verhalten zeigen nämlich fast alle Kurvenpunkte, während die singulären Fälle nur an einzelnen getrennten Stellen auftreten können[1]. Im Fall II spricht man von einem Wendepunkt, in den beiden letzten Fällen sagt man, daß die Kurve eine Hellebardenspitze bzw. eine Schnabelspitze hat, und nennt den Punkt einen Rückkehrpunkt der Kurve. Schließlich erkennt man, daß unsere Fallunterscheidung unabhängig davon ist, in welcher Richtung die Kurve durchlaufen wird.

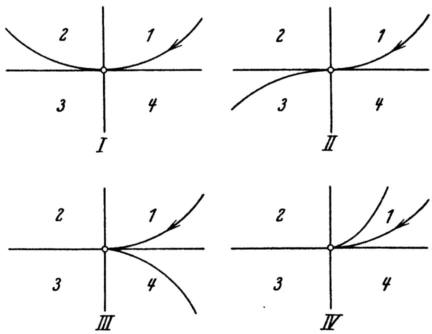

Abb. 183.

Wir wollen uns nun ein Bild davon machen, in welcher Weise sich in diesen vier Arten von Kurvenpunkten die Tangentenrichtung ändert, wenn man den Punkt auf der Kurve durchläuft. Hierzu benutzen wir ein Verfahren, das zuerst GAUSS angegeben hat und das besonders bei der Untersuchung von Flächen eine grundlegende Rolle spielt. Wir statten die Kurve wieder mit einer Durchlaufungsrichtung aus. Dann zeichnen wir in der Kurvenebene einen Kreis vom Radius 1. Wir lassen nun (Abb. 184) jeder Kurventangente denjenigen Halbstrahl entsprechen, der vom Kreismittelpunkt parallel der betrachteten Tangente ausläuft, und zwar in der Durchlaufungsrichtung der Kurve. Diese Konstruktion ordnet jedem Kurvenpunkt P einen Punkt Q des Kreises zu, nämlich den Durchstoßpunkt des Halbstrahls mit der Kreisperipherie. Bei dieser Abbildung nennt man die Punkte des Kreises

[1] Einzig für die Gerade gilt diese Behauptung nicht, auf sie ist auch das eben angegebene Verfahren nicht anwendbar. — Von einem höheren Standpunkt aus kann auch der Fall I singulären Charakter annehmen, wenn nämlich dort der Krümmungskreis in eine Gerade oder einen Punkt ausartet; vgl. S. 157.

das „Tangentenbild“ der Kurve. Da der Kreisradius stets auf der zugehörigen Kreistangente senkrecht steht, ist die Kurventangente stets parallel der Normalen des Tangentenbildes, während umgekehrt die Tangenten des Tangentenbildes den Kurvennormalen parallel sind.

Die GAUSSsche Abbildung ordnet zwar jedem Kurvenpunkt genau einen Kreispunkt zu, aber umgekehrt entspricht ein Kreispunkt gewöhnlich nicht einem, sondern mehreren Kurvenpunkten; nämlich allen, die parallele und gemäß einem festgesetzten Durchlaufungssinn gleichgerichtete Tangenten haben (P_1 und P_3 in Abb. 184).

Ich lasse nun einen Kurvenpunkt die in Abb. 183 gezeichneten Stellen durchlaufen. Dann kehrt er dort in den Fällen III und IV seine Richtung um, während er sie in den Fällen I und II beibehält. Ferner betrachte ich das Verhalten des im Tangentenbild zugeordneten Punktes. Dieser behält in den Fällen I und III seine Richtung und kehrt in den Fällen II und IV um. In der Tat sind in den Fällen II und IV in der Umgebung der betrachteten Stelle parallele und gleichgerichtete Tangenten vorhanden, in den anderen beiden Fällen nicht. Da die Richtung, in der sich der Punkt des Tangentenbildes bewegt, mir ein Abbild der Richtungsänderung der Kurventangente gibt, kann ich die vier Arten von Kurvenpunkten folgendermaßen charakterisieren:

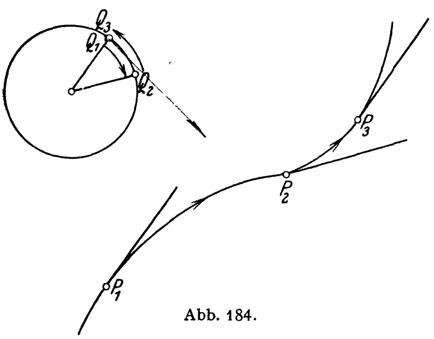

Abb. 184.

I regulärer Punkt: Kurvenpunkt und Tangentenbild laufen im selben Sinne weiter;

II Wendepunkt: der Kurvenpunkt läuft weiter, während das Tangentenbild umkehrt;

III Hellebardenspitze: der Kurvenpunkt kehrt um, während das Tangentenbild weiterläuft;

IV Schnabelspitze: Kurvenpunkt und Tangentenbild kehren um.

Diese Fallunterscheidung ist nicht erschöpfend. Auch wenn wir uns auf Kurvenstücke beschränken, die eine einfache analytische Darstellung gestatten, so kommen noch drei weitere Möglichkeiten hinzu: Die „Doppelpunkte“, in denen die Kurve sich selbst durchschneidet, ferner Punkte, in denen eine Kurve plötzlich endet; endlich kann eine Kurve auch „isolierte“, d. h. von allen übrigen Kurvenpunkten völlig getrennte Punkte besitzen (vgl. S. 176). Merkwürdigerweise gibt es andere anschaulich einfache Vorkommnisse, z. B. Knickstellen mit von Null verschiedenem Winkel, die eine verhältnismäßig komplizierte analytische Darstellung erfordern.

Wir kommen jetzt zur Einführung der *Krümmung*, die für die ganze Kurven- und Flächentheorie von grundlegender Wichtigkeit ist. Sie steht, wie wir im folgenden sehen werden, in engem Zusammenhang mit der GAUSSschen Tangentenabbildung. Ich ziehe in zwei benachbarten Kurvenpunkten P_1 und P_2 die Tangenten t_1 und t_2 und die Normalen n_1 und n_2; der Schnittpunkt der beiden Normalen sei M (Abb. 185). Offenbar ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten gleich dem Winkel zwischen den beiden Normalen

$$\sphericalangle(t_1 t_2) = \sphericalangle(n_1 n_2).$$

Ich lasse nun P_2 auf der Kurve immer näher an P_1 heranrücken und betrachte dabei den Quotienten jenes Winkels mit der Entfernung der beiden Kurvenpunkte. Der Quotient nähert sich im allgemeinen einem Grenzwert

$$\lim_{P_1 P_2 \to 0} \frac{\sphericalangle(n_1 n_2)}{P_1 P_2} = k.$$

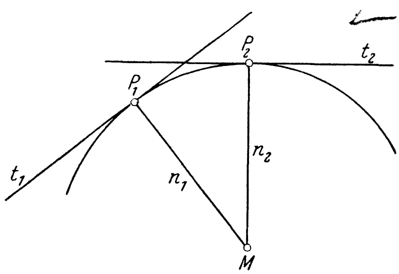

Abb. 185.

Dieser Grenzwert k heißt die Krümmung der Kurve im Punkt P_1.

k ist gleich dem Reziproken der Strecke r, in die beim Grenzübergang die beiden Normalenabschnitte MP_1 und MP_2 zusammenfallen. Das ergibt sich aus folgender Umformung, deren analytische Rechtfertigung wir allerdings übergehen:

$$k = \lim_{P_1 P_2 \to 0} \frac{\sphericalangle(n_1 n_2)}{P_1 P_2} = \lim_{P_1 P_2 \to 0} \frac{\sin(n_1 n_2)}{P_1 P_2} = \lim_{P_1 P_2 \to 0} \frac{P_1 P_2}{MP_1 \cdot P_1 P_2}$$

$$= \lim_{P_1 P_2 \to 0} \frac{1}{MP_1} = \frac{1}{r}.$$

Auf die Größe r werden wir noch auf eine andere Weise geführt. Wir legen einen Kreis durch P_1 und zwei benachbarte Punkte auf der Kurve. Wenn wir dann die beiden Nachbarpunkte auf der Kurve gegen P_1 rücken lassen, nähert sich der Kreis einer Grenzlage. Wie man es aus der Konstruktion erwarten kann und wie eine analytische Betrachtung bestätigt, ergibt sich als Grenzlage gerade der Kreis durch P_1, der die Grenzlage des Normalenschnittpunkts M zum Mittelpunkt, also r als Radius hat. Man nennt diesen Kreis den Krümmungskreis der Kurve in P_1, seinen Mittelpunkt den Krümmungsmittelpunkt und seinen Radius r den Krümmungsradius. Der angegebenen Konstruktion wegen pflegt man zu sagen, daß der Krümmungskreis drei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat. Ebenso sagt man, die Tangente hat mit der Kurve zwei zusammenfallende Punkte gemein.

Der Krümmungskreis kann auf eine zweite Art bestimmt werden. Ich betrachte alle Kreise durch einen Kurvenpunkt P (Abb. 186), die die Kurve in P berühren, deren Mittelpunkte also auf der zugehörigen Kurvennormalen liegen. Durch die Kurve wird die Ebene in der Umgebung von P in zwei Teile zerlegt, die wir die beiden Seiten des Kurvenstücks nennen wollen. Von den betrachteten Kreisen werden in der Umgebung von P einige ganz auf der einen Seite, andere ganz auf der anderen Seite verlaufen. Der Krümmungskreis, dessen Radius r sein möge, besitzt nun im allgemeinen die Eigenschaft, diese beiden Arten von Kreisen zu trennen, und zwar so, daß alle Kreise, deren Radien größer sind als r, auf der einen Seite, und alle Kreise, deren Radien kleiner sind als r, auf der anderen Seite der Kurve verlaufen. Der Krümmungskreis selbst verläuft in der Regel zu beiden Seiten der Normalen auf verschiedenen Seiten der Kurve, d. h. er durchsetzt die Kurve im Berührungspunkt. Punkte, in denen der Krümmungskreis die Kurve nicht durchsetzt, können ebenso wie die singulären Punkte nur an getrennten einzelnen Stellen der Kurve auftreten. Ein Beispiel bilden die vier Scheitel der Ellipse (Abb. 187). Es ist aus Symmetriegründen klar, daß dort eine Durchdringung nicht möglich ist. Das gleiche gilt allgemein von allen Kurvenpunkten, in denen die Kurve von einer Symmetrieachse geschnitten wird.

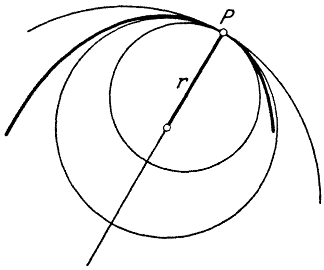

Abb. 186.

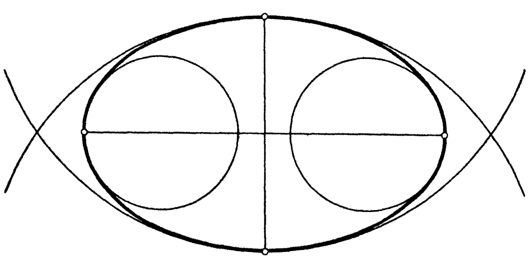
Abb. 187.

Daß der Krümmungskreis die Kurve gewöhnlich durchsetzt, wird aus seiner ersten Herleitung plausibel. Eine Kurve wird nämlich von einem Kreis, der durch einen ihrer Punkte geht, im allgemeinen dort durchsetzt. Aus diesem Grunde wird ein Kreis, der durch drei benachbarte Kurvenpunkte läuft, im ersten Punkt von der Seite A zur Seite B, im zweiten Punkt von der Seite B zur Seite A, im dritten von A zu B übergehen; wenn die drei Punkte zusammenrücken, wird sich an diesem Verhalten des Kreises gewöhnlich nichts ändern, so daß der Krümmungskreis in der Tat im Berührungspunkt von der einen Seite der Kurve zur anderen übergehen muß[1].

[1] Aus analogen Gründen wird eine Kurve von der Tangente in der Regel nicht durchsetzt.

Wie schon erwähnt, steht die Krümmung in Zusammenhang mit der Tangentenabbildung. Es mögen den beiden Kurvenpunkten P_1 und P_2 die Tangentenbilder Q_1 und Q_2 entsprechen (Abb. 188). Dann ist

$$\sphericalangle(t_1 t_2) = \sphericalangle(Q_1 O Q_2) = \widehat{Q_1 Q_2},$$

der Krümmungsradius ist also der Grenzwert des Quotienten der Längen eines kleinen Kurvenbogens und seines Tangentenbildes.

Der Krümmungsradius kann für einzelne Punkte der Kurve unendlich werden; dann entartet der Krümmungskreis in eine Gerade, fällt also mit der Tangente zusammen. Die Tangente durchsetzt in einem solchen Punkt gewöhnlich die Kurve, wir haben es dann also mit einem Wendepunkt zu tun; es gibt jedoch Ausnahmefälle, in denen die Krümmung verschwindet und trotzdem die Kurve von ihrer Tangente nicht durchsetzt wird; das ist analog dem Verhalten des Krümmungskreises in den Scheiteln der Ellipse (vgl. S. 153, Fußnote).

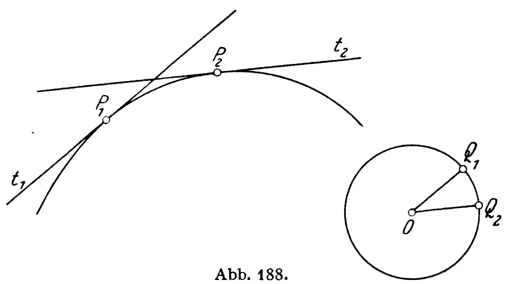

Abb. 188.

Aus der Beziehung der Krümmung zur Tangentenabbildung ergibt sich ferner, daß im Fall der Hellebardenspitze die Krümmung in der Regel unendlich groß wird, daß also dort der Krümmungskreis in seinen Berührungspunkt zusammenschrumpft. Für Schnabelspitzen läßt sich nichts Allgemeines aussagen.

Im Anschluß an die von uns aufgestellten Begriffe ergeben sich eine Reihe wichtiger Fragen. Z. B. liegt der Versuch nahe, eine Kurve dadurch zu bestimmen, daß man die Krümmung als Funktion der Bogenlänge vorgibt. Es ist plausibel und läßt sich analytisch beweisen, daß die Gestalt der Kurve dadurch eindeutig festgelegt ist und daß andererseits zu jeder solchen willkürlich vorgegebenen Funktion (unter gewissen Stetigkeitsannahmen) wirklich eine Kurve gehört. Diese Bestimmungsweise hat den Vorzug, daß sie sich nicht auf ein spezielles Koordinatensystem bezieht. Man nennt daher Bogenlänge und Krümmung die „natürlichen Parameter der Kurve". Der einfachste Fall ist, daß die Krümmung k überall konstant ist. Das gilt für die Kreise vom Radius $1/k$ und nach dem eben Gesagten nur für diese. Für $k = 0$ erhalten wir die Geraden; Geraden und Kreise sind somit die einzigen ebenen Kurven konstanter Krümmung.

Ferner kann man durch mannigfache Verfahren aus einer Kurve eine zweite ableiten. So bildet z. B. die Gesamtheit der Krümmungsmittelpunkte eine neue Kurve, die die Evolute der ursprünglichen heißt. Geht man umgekehrt von der neuen Kurve aus, so heißt die ursprüngliche die Evolvente der neuen. Die Evolventen einer beliebigen Kurve kann man stets durch eine Fadenkonstruktion erhalten, indem man an die Kurve ein Fadenstück straff anlegt und im einen Endpunkt befestigt; der andere Endpunkt beschreibt dann ein Evolventenstück, wenn man den Faden abwickelt und im beweglichen Endpunkt stets straff hält. Die Evolventen des Kreises haben wir schon S. 6 in dieser Weise konstruiert. Warum zwischen Evolvente und Evolute stets diese eigenartige Beziehung besteht, werden wir im nächsten Kapitel (S. 243 und 244) erläutern.

§ 27. Raumkurven.

Die meisten Überlegungen des vorigen Abschnitts lassen sich auf den Raum übertragen.

So ergibt sich zunächst die Tangente wieder als Grenzlage der Sekante für zusammenrückende Schnittpunkte. Im Gegensatz zu den ebenen Kurven gibt es aber unendlich viele Lote auf der Tangente im Berührungspunkt. Diese erfüllen eine Ebene, die *Normalebene* des Kurvenpunkts.

Wir suchen jetzt eine Ebene, die die Kurve im betrachteten Punkt möglichst gut annähert. Wir legen zu diesem Zweck durch die Tangente des Punkts und durch einen benachbarten Kurvenpunkt eine Ebene und verfolgen deren Lageänderung, wenn wir den Nachbarpunkt auf der Kurve immer näher an den Berührungspunkt der festgehaltenen Tangente heranrücken. Die Grenzlage, der sich die Ebene dabei nähert, definiert die gesuchte Ebene, die *Schmiegungsebene* der Kurve im betrachteten Punkt. Die Schmiegungsebene hat im früher erläuterten Sinn drei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein. Aus diesem Grund durchdringt sie im allgemeinen die Kurve im Berührungspunkt, während alle übrigen Ebenen durch die Tangente die Kurve auf einer Seite lassen.

Da die Schmiegungsebene die Tangente enthält, steht sie auf der Normalebene senkrecht. Wir betrachten nun noch diejenige Ebene durch unseren Kurvenpunkt, die sowohl auf der Normalebene als auch auf der Schmiegungsebene senkrecht steht. Man nennt sie die *rektifizierende Ebene*.

Die drei genannten Ebenen kann man nun als Koordinatenebenen eines räumlichen cartesischen Systems auffassen, das zur Beschreibung des Kurvenverlaufs im betrachteten Punkt besonders geeignet ist. Die Tangente ist die eine Achse dieses Systems; die beiden anderen Achsen, die also in der Normalebene liegen, heißen Hauptnormale und Binormale; die Hauptnormale liegt in der Schmiegungsebene, die Binormale liegt in der rektifizierenden Ebene (Abb. 189). Man nennt diese drei Geraden, in ihrer Abhängigkeit vom Kurvenpunkt, das begleitende Dreikant der Kurve. Es entspricht dem System von Tangente und Normale bei den