liche die Evolvente der neuen. Die Evolventen einer beliebigen Kurve kann man stets durch eine Fadenkonstruktion erhalten, indem man an die Kurve ein Fadenstück straff anlegt und im einen Endpunkt befestigt; der andere Endpunkt beschreibt dann ein Evolventenstück, wenn man den Faden abwickelt und im beweglichen Endpunkt stets straff hält. Die Evolventen des Kreises haben wir schon S. 6 in dieser Weise konstruiert. Warum zwischen Evolvente und Evolute stets diese eigenartige Beziehung besteht, werden wir im nächsten Kapitel (S. 243 und 244) erläutern.

§ 27. Raumkurven.

Die meisten Überlegungen des vorigen Abschnitts lassen sich auf den Raum übertragen.

So ergibt sich zunächst die Tangente wieder als Grenzlage der Sekante für zusammenrückende Schnittpunkte. Im Gegensatz zu den ebenen Kurven gibt es aber unendlich viele Lote auf der Tangente im Berührungspunkt. Diese erfüllen eine Ebene, die *Normalebene* des Kurvenpunkts.

Wir suchen jetzt eine Ebene, die die Kurve im betrachteten Punkt möglichst gut annähert. Wir legen zu diesem Zweck durch die Tangente des Punkts und durch einen benachbarten Kurvenpunkt eine Ebene und verfolgen deren Lageänderung, wenn wir den Nachbarpunkt auf der Kurve immer näher an den Berührungspunkt der festgehaltenen Tangente heranrücken. Die Grenzlage, der sich die Ebene dabei nähert, definiert die gesuchte Ebene, die *Schmiegungsebene* der Kurve im betrachteten Punkt. Die Schmiegungsebene hat im früher erläuterten Sinn drei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein. Aus diesem Grund durchdringt sie im allgemeinen die Kurve im Berührungspunkt, während alle übrigen Ebenen durch die Tangente die Kurve auf einer Seite lassen.

Da die Schmiegungsebene die Tangente enthält, steht sie auf der Normalebene senkrecht. Wir betrachten nun noch diejenige Ebene durch unseren Kurvenpunkt, die sowohl auf der Normalebene als auch auf der Schmiegungsebene senkrecht steht. Man nennt sie die *rektifizierende Ebene*.

Die drei genannten Ebenen kann man nun als Koordinatenebenen eines räumlichen cartesischen Systems auffassen, das zur Beschreibung des Kurvenverlaufs im betrachteten Punkt besonders geeignet ist. Die Tangente ist die eine Achse dieses Systems; die beiden anderen Achsen, die also in der Normalebene liegen, heißen Hauptnormale und Binormale; die Hauptnormale liegt in der Schmiegungsebene, die Binormale liegt in der rektifizierenden Ebene (Abb. 189). Man nennt diese drei Geraden, in ihrer Abhängigkeit vom Kurvenpunkt, das begleitende Dreikant der Kurve. Es entspricht dem System von Tangente und Normale bei den ebenen Kurven. Im Raum bestimmt das Koordinatensystem nicht wie in der Ebene vier, sondern acht Gebiete. Mit Hilfe des begleitenden Dreikants kann ich also analog S. 153 acht Arten von Kurvenpunkten unterscheiden. Wiederum ist nur einer dieser Fälle regulär, die übrigen können (wenn die Kurve wirklich räumlich ist und nicht in einer Ebene verläuft) nur an getrennten Stellen eintreten. Im regulären Fall durchsetzt die Kurve die Schmiegungsebene und die Normalebene und bleibt auf einer Seite der rektifizierenden Ebene. Die Besprechung der übrigen Fälle soll hier nicht durchgeführt werden. Im übrigen können bei Raum-

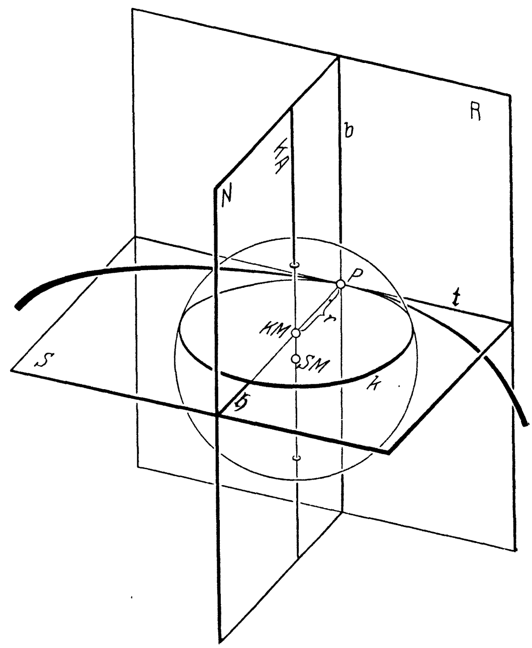

Abb. 189.

P	der betrachtete Kurvenpunkt,
S	Schmiegungsebene,
N	Normalebene,
R	Rektifizierende Ebene,
$\mathfrak{t}$	Tangente,
$\mathfrak{h}$	Hauptnormale,
$\mathfrak{b}$	Binormale,
k	Krümmungskreis,
r	Krümmungsradius,
KA	Krümmungsachse,
KM	Krümmungsmittelpunkt,
SM	Schmiegkugelmittelpunkt.

kurven einfacher analytischer Struktur genau wie bei einer ebenen Kurve noch drei weitere Singularitäten eintreten, nämlich Doppelpunkte, Endpunkte und isolierte Punkte.

Wir verallgemeinern nun auch die GAUSSsche Abbildung auf den Raum. Zu diesem Zweck legen wir irgendeine Kugel vom Radius Eins zugrunde. Zu jeder Tangente der (mit einem Durchlaufungssinn versehenen) Kurve ziehen wir den gleichgerichteten Kugelradius. Seinen Endpunkt auf der Kugeloberfläche nennen wir das Tangentenbild des Kurvenpunkts. Der gesamten Kurve entspricht dann eine bestimmte Kurve auf der Kugeloberfläche. Geht man statt von der Tangente von der Haupt- oder Binormalen aus, so erhält man zwei weitere Kurven auf der Einheitskugel; diese drei „sphärischen Bilder“ stehen in bezug auf ihre Dreikante untereinander und mit der Ausgangskurve in gewissen einfachen Beziehungen. Tangentenbild und Binormalenbild zusammen charakterisieren z. B. die erwähnten acht Typen von Kurvenpunkten. Es können nämlich auf der Kurve der Kurvenpunkt selbst, die Tangente und die Binormale entweder stetig weiterlaufen oder umkehren. Die Kombination der verschiedenen Möglichkeiten gibt gerade die acht Fälle.

Wir übertragen jetzt den Krümmungsbegriff auf die Raumkurven. Ich ziehe in zwei benachbarten Kurvenpunkten P_1 und P_2 die Tangenten t_1 und t_2, und betrachte den Quotienten $\sphericalangle(t_1 t_2)/P_1 P_2$. Wenn P_2 gegen P_1 rückt, strebt dieser Quotient in der Regel gegen einen Grenzwert; dieser heißt die Krümmung der Kurve in P_1. In der Ebene steht die Krümmung in einer bestimmten Beziehung zu der Grenzlage des Schnittpunkts zweier Normalen. Die analoge Betrachtung im Raum liefert nicht einen Punkt, sondern eine Gerade. Man betrachtet nämlich die Schnittgerade benachbarter Normalebenen und bezeichnet ihre Grenzlage als die Krümmungsachse der Kurve. Sie liegt in der Normalebene; wie der Grenzübergang ergibt, ist sie der Binormalen parallel (Abb. 189). Ihr Schnittpunkt mit der Hauptnormalen wird als Krümmungsmittelpunkt bezeichnet. Die Entfernung r dieses Punkts vom zugehörigen Kurvenpunkt heißt der Krümmungsradius; wie in der Ebene ist r gleich dem reziproken Wert der Krümmung. Legt man durch drei benachbarte Kurvenpunkte den Kreis und läßt die drei Punkte zusammenrücken, so erhält man als Grenzlage den Krümmungskreis; einen Kreis, der in der Schmiegungsebene liegt und den Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius zum Mittelpunkt und Radius hat.

Zur GAUSSschen Tangentenabbildung steht die Krümmung in derselben Beziehung wie in der Ebene; der Krümmungsradius ist der Grenzwert des Quotienten zwischen einem kleinen Kurvenbogen und seinem Tangentenbild. Der Beweis verläuft wie in der Ebene.

Statt vom Winkel zweier Tangenten kann man auch vom Winkel zweier Schmiegungsebenen oder, was dasselbe ist, vom Winkel zweier Binormalen ausgehen, wodurch man zu einem weiteren für die Theorie der Raumkurven wesentlichen Begriff gelangt. Man dividiert jenen Winkel durch den Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte und läßt dann diese zusammenrücken. Den Grenzwert t dieses Quotienten bezeichnet man als die Torsion oder auch als die „zweite Krümmung“ oder Windung im betrachteten Kurvenpunkt. Das Reziproke der Torsion ist offenbar der Grenzwert des Quotienten eines kleinen Kurvenbogens und seines Binormalenbildes.

Die Krümmung ließ sich aus einem Grenzübergang gewinnen, in dem drei benachbarte Kurvenpunkte auftraten. Um eine analoge Deutung der Torsion zu erhalten, muß man von vier benachbarten Punkten ausgehen. Durch vier Punkte ist im allgemeinen eine Kugel bestimmt. Man betrachtet nun die Grenzlage einer Kugel durch vier benachbarte und zusammenrückende Kurvenpunkte. Die Kugel, die diese Grenzlage einnimmt, heißt Schmiegungskugel. Wie der Grenzübergang ergibt, wird sie von der zugehörigen Tangente berührt, und ihr Mittelpunkt liegt auf der Krümmungsachse (Abb. 189). Für die Entfernung dieses Punkts vom Krümmungsmittelpunkt ergibt sich durch Rechnung der Wert $\frac{1}{t} \cdot \frac{dr}{ds}$, wobei ds, dr die Differentiale der Bogenlänge und des Krümmungsradius bedeuten. Man kann ferner aus der Konstruktion schließen, daß die Schmiegungskugel die Schmiegungsebene gerade im Krümmungskreis durchsetzt. Für den Radius der Schmiegungskugel erhält man daher nach dem pythagoreischen Lehrsatz den Wert

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2}}\,.$$

Wie in der Ebene die Größen s und r, so werden im Raum die Größen s, r, t als die natürlichen Parameter einer Kurve bezeichnet. Analog wie in der Ebene gilt im Raum der wichtige Satz: Die Gestalt einer Raumkurve läßt sich auf eine und nur eine Art so bestimmen, daß auf ihr r und t vorgegebene Funktionen von s werden. Verschwindet $1/r$ identisch, so erhält man die Geraden. Identisches Verschwinden von t kennzeichnet die ebenen Kurven. Sind r und t konstant und von Null verschieden, so erhält man die Schraubenlinien.

Die Kurven auf der Kugel sind durch eine etwas kompliziertere Bedingung gekennzeichnet. Die Kugel, auf der die Kurve verläuft, muß nämlich offenbar für alle Kurvenpunkte zugleich Schmiegungskugel sein. Also muß der oben berechnete Radius der Schmiegungskugel konstant sein:

$$r^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2} = \text{const}\,.$$

Man kann analytisch beweisen, daß diese Bedingung auch hinreicht.

Andere auf Raumkurven bezügliche Fragen werden wir später bei der Flächentheorie erörtern.

§ 28. Die Krümmung auf Flächen. Elliptischer, hyperbolischer und parabolischer Fall. Krümmungslinien und Asymptotenlinien, Nabelpunkte, Minimalflächen, Affensättel.

Wir beschränken uns auf ein kleines Stück der Fläche, das sich nicht selbst durchdringt, und lassen die Randpunkte außer Betracht. Wir betrachten einen Flächenpunkt P und alle Kurven, die ganz in der Fläche verlaufen und durch P gehen. Merkwürdigerweise liegen alle Tangenten, die ich in P an diese Kurven ziehen kann, im allgemeinen in einer Ebene, die deshalb die Tangentialebene der Fläche in P genannt wird. Die Punkte, die eine Tangentialebene besitzen, heißen regulär,