benachbarte und zusammenrückende Kurvenpunkte. Die Kugel, die diese Grenzlage einnimmt, heißt Schmiegungskugel. Wie der Grenzübergang ergibt, wird sie von der zugehörigen Tangente berührt, und ihr Mittelpunkt liegt auf der Krümmungsachse (Abb. 189). Für die Entfernung dieses Punkts vom Krümmungsmittelpunkt ergibt sich durch Rechnung der Wert $\frac{1}{t} \cdot \frac{dr}{ds}$, wobei $ds$, $dr$ die Differentiale der Bogenlänge und des Krümmungsradius bedeuten. Man kann ferner aus der Konstruktion schließen, daß die Schmiegungskugel die Schmiegungsebene gerade im Krümmungskreis durchsetzt. Für den Radius der Schmiegungskugel erhält man daher nach dem pythagoreischen Lehrsatz den Wert

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2}}\,.$$

Wie in der Ebene die Größen $s$ und $r$, so werden im Raum die Größen $s$, $r$, $t$ als die natürlichen Parameter einer Kurve bezeichnet. Analog wie in der Ebene gilt im Raum der wichtige Satz: Die Gestalt einer Raumkurve läßt sich auf eine und nur eine Art so bestimmen, daß auf ihr $r$ und $t$ vorgegebene Funktionen von $s$ werden. Verschwindet $1/r$ identisch, so erhält man die Geraden. Identisches Verschwinden von $t$ kennzeichnet die ebenen Kurven. Sind $r$ und $t$ konstant und von Null verschieden, so erhält man die Schraubenlinien.

Die Kurven auf der Kugel sind durch eine etwas kompliziertere Bedingung gekennzeichnet. Die Kugel, auf der die Kurve verläuft, muß nämlich offenbar für alle Kurvenpunkte zugleich Schmiegungskugel sein. Also muß der oben berechnete Radius der Schmiegungskugel konstant sein:

$$r^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2} = \text{const}\,.$$

Man kann analytisch beweisen, daß diese Bedingung auch hinreicht.

Andere auf Raumkurven bezügliche Fragen werden wir später bei der Flächentheorie erörtern.

## § 28. Die Krümmung auf Flächen. Elliptischer, hyperbolischer und parabolischer Fall. Krümmungslinien und Asymptotenlinien, Nabelpunkte, Minimalflächen, Affensättel.

Wir beschränken uns auf ein kleines Stück der Fläche, das sich nicht selbst durchdringt, und lassen die Randpunkte außer Betracht. Wir betrachten einen Flächenpunkt $P$ und alle Kurven, die ganz in der Fläche verlaufen und durch $P$ gehen. Merkwürdigerweise liegen alle Tangenten, die ich in $P$ an diese Kurven ziehen kann, im allgemeinen in einer Ebene, die deshalb die Tangentialebene der Fläche in $P$ genannt wird. Die Punkte, die eine Tangentialebene besitzen, heißen regulär, die anderen singulär. Singuläre Punkte können nur einzelne Kurvenzüge auf der Fläche erfüllen.

Die Gerade, welche in einem regulären Flächenpunkt $P$ auf dessen Tangentialebene senkrecht steht, heißt die Flächennormale in $P$. Als Normalenschnitte bezeichnet man die Schnittkurven der Fläche mit den durch eine Flächennormale gehenden Ebenen. Die Normalenschnitte eines regulären Punkts $P$ sind in $P$ entweder regulär oder haben in $P$ einen Wendepunkt.

Es handelt sich jetzt darum, den Begriff der Krümmung auf die Flächen zu übertragen. Bei den Kurven war die Krümmung bezeichnend für die Abweichung der Kurve von ihrer Tangente im betrachteten Punkt. Analog fragen wir jetzt nach dem Verhalten einer Fläche zu ihren Tangentialebenen. Hier lassen sich nun anschaulich zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden, nämlich die Punkte konvexer und die Punkte sattelförmiger Krümmung.

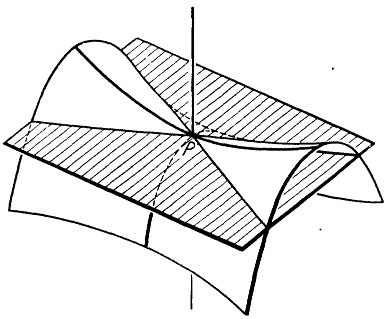

Abb. 190.

Ein Punkt konvexer Krümmung ist dadurch gekennzeichnet, daß seine Tangentialebene die Fläche (in der nächsten Umgebung des betrachteten Punkts) nicht schneidet, sondern ganz auf einer Seite läßt. Man kann also in einem derartigen Punkt die Fläche auf eine ebene Tischplatte auflegen. Beispiele für Flächen, die in allen ihren Punkten konvex sind, haben wir in der Kugel und im Ellipsoid kennengelernt. Die Punkte konvexer Krümmung werden auch Punkte elliptischer Krümmung genannt.

Den Verlauf einer Fläche in einem Punkt sattelförmiger Krümmung können wir uns am leichtesten an einer Fläche klarmachen, die wie eine Paßhöhe im Gebirge aussieht (Abb. 190). Die Tangentialebene im höchsten Punkt $P$ des Passes liegt horizontal; das Gebirge steigt rechts und links von $P$ in die Höhe, während es vor und hinter diesem Punkt abfällt. Die Tangentialebene in $P$ muß also die Fläche in einer Kurve treffen, die aus zwei sich in $P$ schneidenden Ästen besteht (d. h. es gibt zwei horizontale Wege, die sich auf der Paßhöhe kreuzen). Dieses Verhalten der Tangentialebene ist für die Punkte sattelförmiger Krümmung charakteristisch, so daß ich also eine Fläche in einem derartigen Punkt nicht auf eine ebene Tischplatte legen kann. Beispiele für eine überall sattelförmig gekrümmte Fläche sind das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Die Punkte sattelförmiger Krümmung nennt man auch Punkte hyperbolischer Krümmung.

Der konvexe und der sattelförmige Typ werden durch einen Übergangsfall getrennt: die Punkte *parabolischer* Krümmung. Man erhält also solche Punkte z. B. durch folgendes Verfahren: Man geht von zwei Flächenstücken $F$ und $G$ aus, die sich in einem Punkt $P$ berühren, d. h. in $P$ dieselbe Tangentialebene haben, und von denen $F$ in $P$ elliptisch, dagegen $G$ hyperbolisch gekrümmt ist. Deformiert man nun $F$ stetig derart, daß $P$ und die zugehörige Tangentialebene sich nicht ändern und daß $F$ schließlich in $G$ übergeht, so nimmt die Fläche dazwischen einmal eine Gestalt an, für die $P$ parabolischer Punkt ist. Senken wir z. B. in Abb. 190 die Gebirge zu beiden Seiten des Passes soweit, daß der Kamm des Gebirges gerade noch überall die horizontale Tangentialebene berührt, so ist $P$ parabolischer Punkt. Denn wenn wir die Gebirge rechts und links noch weiter senken, so wird der frühere Paß zur Kuppe, also zu einem elliptischen Flächenpunkt. Dieses Beispiel liefert aber nicht alle Typen eines parabolischen Punkts. Es gibt im Gegenteil mehrere anschaulich ganz verschiedene Arten parabolischer Punkte, die wir später näher kennzeichnen werden (S. 175, 177, 179); auch solche, die sich nicht ohne weiteres als Übergangsfall zwischen elliptischer und hyperbolischer Krümmung deuten lassen.

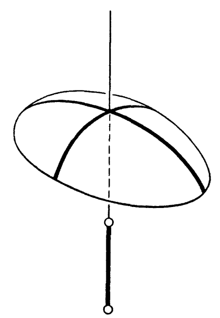
Abb. 191.

Um nun die Krümmung auch zahlenmäßig zu erfassen, kann man von den Krümmungen der Normalenschnitte in einem Flächenpunkt $P$ ausgehen. Der zu $P$ gehörige Krümmungsmittelpunkt eines solchen Normalenschnitts liegt stets auf der durch $P$ gehenden Flächennormalen, denn diese ist in $P$ Normale aller Normalenschnitte. Ich erhalte nun der Reihe nach alle Normalenschnitte, wenn ich eine durch die Flächennormale gehende Ebene um diese Normale drehe. Bei der Drehung wird der Krümmungsmittelpunkt in bestimmter Weise auf der Normalen wandern und mir dadurch ein Abbild der Krümmungseigenschaften des Flächenpunkts liefern.

Bei den elliptischen Punkten (Abb. 191) liegt der Krümmungsmittelpunkt stets auf einer und derselben Halbgeraden der Normalen. Im allgemeinen wird der Krümmungsradius bei der Drehung der Normalebene seinen Wert ändern und für einen bestimmten Normalenschnitt $s_1$ seinen größten Wert $r_1$, für einen anderen, $s_2$, seinen kleinsten Wert $r_2$ annehmen. $r_1$ und $r_2$ heißen die Hauptkrümmungsradien der Fläche in $P$, die reziproken Werte $k_1 = 1/r_1$ und $k_2 = 1/r_2$ heißen die Hauptkrümmungen, die Tangentenrichtungen von $s_1$ und $s_2$ in $P$ heißen die Krümmungsrichtungen. Es zeigt sich nun, daß diese Richtungen in einem regulären Punkt stets aufeinander senkrecht stehen und daß überdies die Krümmung *jedes* Normalenschnitts durch die Hauptkrümmungen und den Winkel des Normalenschnitts mit den Krümmungsrichtungen vollständig bestimmt ist.

Bei den hyperbolischen Punkten (Abb. 192) ist der Ort des Krümmungsmittelpunkts nicht auf eine Halbgerade der Normalen beschränkt. Wenn nämlich der Normalenschnitt bei der als Paßhöhe gedeuteten Fläche durch die beiden Gebirge geht, liegt der Krümmungsmittelpunkt oberhalb des betrachteten Punkts $P$, wenn der Schnitt dagegen die beiden Einsenkungen trifft, liegt der Krümmungsmittelpunkt unterhalb $P$. Es gibt nun einen Normalenschnitt, dessen Krümmungsmittelpunkt oberhalb $P$ liegt und dessen Krümmung $k_1$ größer ist als bei allen anderen Normalenschnitten dieser Art. Wenn ich die Normalebene aus dieser Lage herausdrehe, wird die Krümmung stetig kleiner, der Krümmungsradius stetig größer. Wenn die Normalebene schließlich in die Richtung eines der beiden in Abb. 190 hervorgehobenen horizontalen Wege durch $P$ fällt, wird die Krümmung Null, und der Krümmungsmittelpunkt entfernt sich nach oben ins Unendliche. Wenn ich noch weiter drehe, springt der Krümmungsmittelpunkt auf die untere Halbgerade der Normalen über und beginnt aus dem Unendlichen nach oben zu wandern, d. h. der Krümmungsradius nimmt ab und die Krümmung zu. Sie erreicht schließlich einen Wert $k_2$, der größer ist als die Krümmung aller übrigen Normalenschnitte, deren Krümmungsmittelpunkt unterhalb $P$ liegt. Man bezeichnet $k_1$ und $k_2$ wie im elliptischen Fall als die Hauptkrümmungen und die Richtungen der zugehörigen Normalenschnitte als die Krümmungsrichtungen. Auch im hyperbolischen Fall stehen die Krümmungsrichtungen aufeinander senkrecht. Ferner halbieren sie Winkel und Nebenwinkel der beiden Kurvenzweige, die die Tangentialebene aus der Fläche ausschneidet. Man nennt die Richtungen dieser beiden Kurvenzweige die Asymptotenrichtungen in $P$.

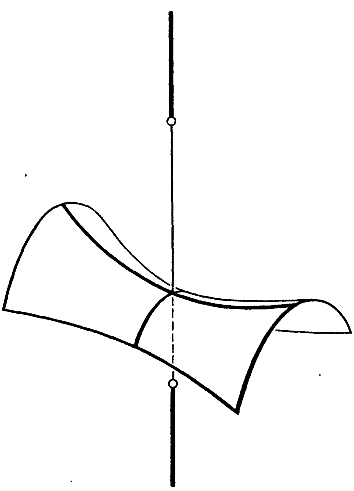
Abb. 192.

In den parabolischen Punkten gibt es im allgemeinen ebenfalls zwei aufeinander senkrechte Krümmungsrichtungen derart, daß die Krümmungen $k_1$ und $k_2$ der zugehörigen Normalenschnitte größer bzw. kleiner sind als die aller übrigen Normalenschnitte. Die parabolischen Punkte sind dadurch gekennzeichnet, daß eine dieser beiden Hauptkrümmungen den Wert Null hat. Im allgemeinen ist die andere Hauptkrümmung von Null verschieden. Dann wandert der Krümmungsmittelpunkt von der Lage, die der von Null verschiedenen Hauptkrümmung entspricht, auf einem Normalenhalbstrahl entlang ins Unendliche

(Abb. 193). Es gibt also in parabolischen Punkten im allgemeinen genau einen Normalenschnitt verschwindender Krümmung. Seine Richtung ist eine der Krümmungsrichtungen, sie ist aber auch als Asymptotenrichtung anzusehen.

Man kann analytisch auf jedem Flächenstück alle die Kurven bestimmen, deren Richtung in jedem Punkt eine der beiden Krümmungsrichtungen ist. Man erhält auf diese Weise ein „Kurvennetz" auf der Fläche, d. h. ein System von zwei Kurvenscharen, von denen jede das Flächenstück einfach und lückenlos überdeckt. Die Kurven heißen die Krümmungslinien der Fläche. Nach dem Früheren stehen die Krümmungslinien in jedem Punkt der Fläche aufeinander senkrecht; sie bilden also ein Orthogonalsystem auf der Fläche.

Es gibt jedoch Punkte, für die unsere bisherigen Betrachtungen nicht gelten. Wir gingen nämlich von der Annahme aus, daß die Krümmung des Normalenschnitts sich ändert, wenn man die Normalebene dreht. Es kann aber auch vorkommen, daß alle Normalenschnitte eines Punkts dieselbe Krümmung haben. Dann werden die Krümmungsrichtungen unbestimmt, und man spricht von einem Nabelpunkt. Ein Beispiel für eine Fläche aus lauter Nabelpunkten ist offenbar die Kugel. Übrigens sind die Kugeln und Ebenen auch die einzigen Flächen, die nur aus Nabelpunkten bestehen. Im allgemeinen treten die Nabelpunkte isoliert auf. Das Netz der Krümmungslinien kann in ihnen und nur in ihnen ein singuläres Verhalten zeigen.

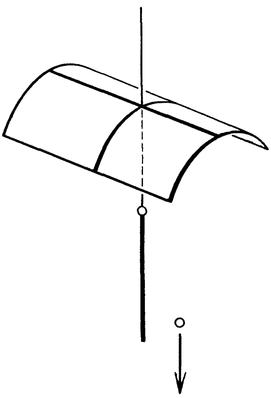

Abb. 193.

Über die Krümmungslinien gilt ein eigenartiger Satz von Dupin. Wir haben früher (S. 5) den Begriff der orthogonalen Kurvenscharen in der Ebene kennengelernt. Das räumliche Analogon sind Flächenscharen, deren Tangentialebenen in jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen. Da man nun durch einen Punkt in der Ebene nicht mehr als zwei paarweise senkrechte Geraden, dagegen im Raum drei paarweise senkrechte Ebenen legen kann, wird man orthogonale Flächenscharen betrachten, die durch jeden Raumpunkt drei Exemplare schicken. Ein Beispiel eines solchen Orthogonalsystems sind die früher erwähnten konfokalen Flächen zweiter Ordnung.

Man kann in der Ebene (und ebenso auf jeder krummen Fläche) zu jeder beliebig vorgegebenen Kurvenschar eine orthogonale Kurvenschar bestimmen. Entsprechend könnte man erwarten, daß man im Raum zu einer zweifachen orthogonalen Flächenschar stets noch eine orthogonale dritte finden kann. Nach dem Satz von Dupin ist nun diese Annahme falsch. Der Satz besagt nämlich, daß die Flächen eines dreifachen

Orthogonalsystems sich stets in ihren Krümmungslinien durchschneiden. Falls daher eine zweifache orhogonale Flächenschar sich zu einer dreifachen ergänzen läßt, müssen schon die gegebenen Flächen sich in ihren Krümmungslinien durchschneiden. Übrigens ist diese Bedingung auch hinreichend. Nach dem Satz von DUPIN sind die Krümmungslinien auf dem Ellipsoid dessen Schnittkurven mit den konfokalen ein- und zweischaligen Hyperboloiden (Abb. 194). Das so bestimmte Kurvennetz (Abb. 195) wird singulär in den Durchstoßpunkten der Fokalhyperbel. In der Tat sind diese vier Punkte die Nabelpunkte des Ellipsoids.

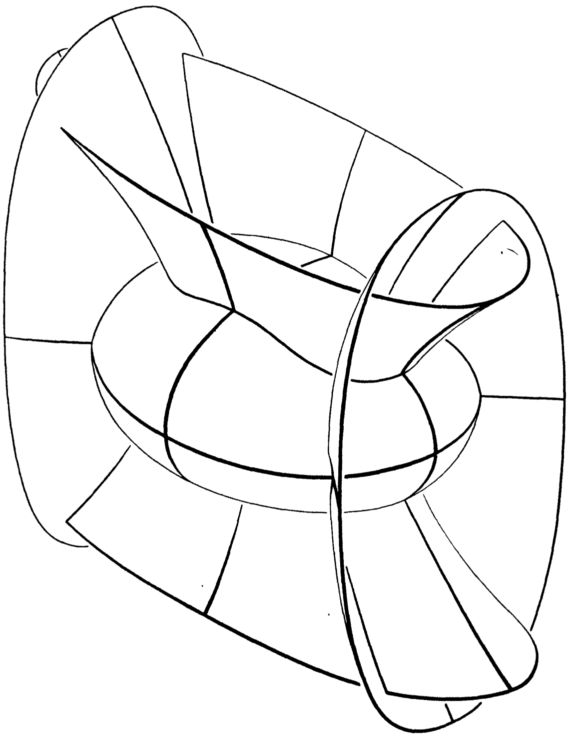

Abb. 194.

Die Krümmungslinien auf dem Ellipsoid umlaufen die Nabelpunkte in ähnlicher Weise, wie in der Ebene ein System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln die gemeinsamen Brennpunkte umgibt (Abb. 7, S. 5). Diese anschauliche Ähnlichkeit ist nicht zufällig, sondern bringt eine innere Verwandtschaft beider Kurvenscharen zum Ausdruck. Wir können nämlich die Krümmungslinien auf dem Ellipsoid durch eine Fadenkonstruktion, die zwei Nabelpunkte verwendet, in genau der gleichen Weise konstruieren, wie wir in der Ebene die Ellipsen durch Fadenkonstruktion aus den Brennpunkten erzeugt hatten. Die vier Nabelpunkte des Ellipsoids liegen einander paarweise diametral gegenüber. Ich kann daher auf zwei verschiedene Weisen (Abb. 196) zwei Nabelpunkte herausgreifen, die einander nicht gegenüberliegen. In diesen beiden Punkten $F_1$ und $F_2$ befestige ich die Endpunkte eines Fadens von ausreichender Länge und ziehe ihn in einem Punkte $P$ straff an, jedoch so, daß dieser Punkt auf dem Ellipsoid liegt. Dann muß sich der Faden in seiner Gesamtlänge von selbst dem Ellipsoid anlegen. Die verschiedenen Lagen, die $P$ auf dem Ellipsoid annehmen kann, erfüllen eine Krümmungslinie. Je nachdem, auf welche Weise ich die beiden Nabelpunkte gewählt habe, erhalte ich bei veränderlicher Fadenlänge die eine oder die andere Schar der Krümmungslinien. Während also im konfokalen System der Kegelschnitte die eine Kurvenschar aus Ellipsen und die andere aus Hyberbeln besteht, lassen sich auf dem Ellipsoid beide Scharen als verallgemeinerte Ellipsen auffassen.

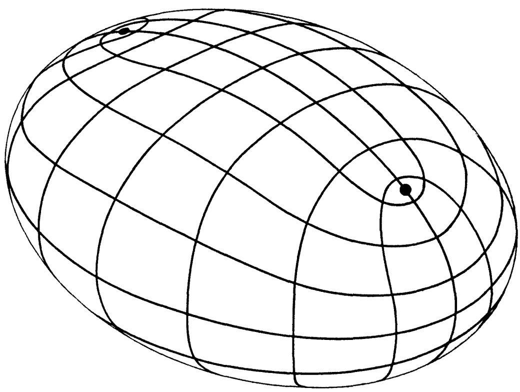

Abb. 195.

Die Kurven auf dem Ellipsoid, längs derer sich der Faden legt, entsprechen den Brennstrahlen der Ellipse, also geraden Linien, und sind wie die Geraden in der Ebene durch die Eigenschaft gekennzeichnet, zwischen irgend zweien ihrer Punkte die kürzeste in der Fläche mögliche Verbindung herzustellen. Man nennt derartige Kurven geodätische Linien einer Fläche, und wir werden uns später (S. 194 bis 198) mit ihrer Theorie beschäftigen.

In hyperbolischen Punkten hatten wir neben den Krümmungsrichtungen noch ein zweites Paar ausgezeichneter Richtungen, nämlich die Asymptotenrichtungen, kennengelernt. Man kann analog den Krümmungslinien ein Kurvennetz bestimmen, deren Kurven in jedem Punkt Asymptotenrichtung haben; man nennt diese Kurven die Asymptotenlinien oder Haupttangentenkurven der Fläche.

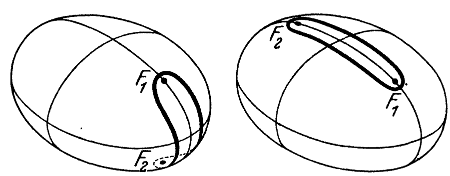


Abb. 196.

Auch in hyperbolischen Flächenpunkten kann es eintreten, daß die beiden Hauptkrümmungen gleich groß sind. Solche Punkte haben gewisse Ähnlichkeiten mit den Nabelpunkten. Flächen, die nur aus solchen Punkten bestehen, heißen Minimalflächen. Sie sind auch dadurch charakterisiert, daß ihre Asymptotenlinien ein orthogonales Netz bilden. Während die Gesamtheit der Flächen, die nur Nabelpunkte besitzen, allein aus den Kugeln besteht, ist die Klasse der Minimalflächen viel umfassender. Man kann nämlich eine Minimalfläche dadurch realisieren, daß man einen ganz beliebig geformten geschlossenen Draht in Seifenlösung taucht. Die Seifenhaut, die sich dann in den Draht spannt, hat stets die Gestalt einer Minimalfläche (vgl. Abb. 219, 220, S. 186). Das

Gesetz der Oberflächenspannung, dem die Seifenhaut folgt, sucht den Flächeninhalt der Haut möglichst zu verkleinern. Man kann hiernach rein mathematisch die Minimalflächen als diejenigen Flächen charakterisieren, die den kleinsten Flächeninhalt besitzen unter allen Flächen, die man in eine gegebene geschlossene Raumkurve einspannen kann. Dabei ist bemerkenswert, daß diese von der Gesamterstreckung eines Flächenstücks ausgehende Kennzeichnung auf dieselben Flächen führt wie die erstgenannte Eigenschaft, die nur die nächste Umgebung jedes Flächenpunkts betrifft. Man kann sich diesen Zusammenhang folgendermaßen plausibel machen. Auf einer gegebenen Minimalfläche, die in die geschlossene Kurve $S$ eingespannt sei, wählen wir eine sehr kleine geschlossene Kurve $s$ aus. Ich betrachte nur das Stück der Minimalfläche, das im Innern von $s$ liegt, und behaupte, daß dieses Stück kleineren Flächeninhalt hat als alle anderen Flächenstücke, die sich in $s$ einspannen lassen. Sonst könnte ich nämlich das im Innern von $s$ gelegene Stück meiner Fläche so abändern, daß sich dabei der Flächeninhalt dieses Stücks verkleinerte. Dabei würde aber auch der Gesamtinhalt der in $S$ eingespannten Fläche abnehmen, was der Definition der Minimalfläche widerspricht. Wenn ich nun die kleine Kurve $s$ auf irgendeinen Punkt der Minimalfläche zusammenziehe, kann ich erwarten, daß ich durch einen Grenzübergang auf solche Eigenschaften der Minimalfläche geführt werde, die nur die Umgebung eines Flächenpunkts betreffen.

Jede Aufgabe, Kurven oder Flächen durch eine Minimumseigenschaft zu bestimmen, heißt ein Variationsproblem. Eine analoge Betrachtung, wie wir sie eben für die Minimalflächen ausgeführt haben, zeigt auch für jedes andere Variationsproblem, daß die Minimumseigenschaft sich durch eine Umgebungseigenschaft ersetzen läßt. Die Durchführung dieser Grenzübergänge ist der Gegenstand der Variationsrechnung. Die Variationsrechnung geht also den umgekehrten Weg wie die Differentialgeometrie; während die Differentialgeometrie die Umgebungseigenschaften zugrunde legt und aus ihnen Aussagen über den Gesamtverlauf eines Gebildes herleitet, werden in der Variationsrechnung Umgebungseigenschaften hergeleitet aus solchen Eigenschaften, die dem Gebilde als Ganzem zukommen.

Die Variationsrechnung ist für die theoretische Physik von grundlegender Bedeutung. Alle in der Natur vorkommenden Gleichgewichts- und Bewegungszustände sind durch Minimumseigenschaften ausgezeichnet.

Man kann durch Seifenhäute auch Minimalflächen erzeugen, die durch mehr als eine Randkurve bestimmt sind. Z. B. kann ich von zwei kreisförmigen geschlossenen Drähten ausgehen, die ich in der Seifenlösung zur Deckung bringe und nach dem Herausziehen so voneinander trenne, daß die beiden Kreise dieselbe Achse behalten. Dann spannt sich zwischen den beiden Kreisen eine hyperboloidähnliche Fläche auf (Abb. 197 und Abb. 220, S. 186), von der man aus Symmetriegründen erwarten muß, daß sie eine Rotationsfläche ist. Die Rechnung bestätigt das und ergibt, daß der Meridian dieser Rotationsminimalfläche eine Kettenlinie ist, d. h. dieselbe Gestalt hat, wie sie eine an zwei Punkten aufgehängte Kette unter dem Einfluß der Schwerkraft annimmt. Die Fläche wird deswegen Katenoid genannt.

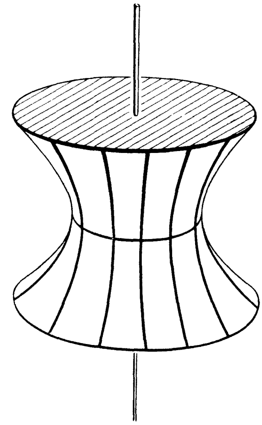
Abb. 197.

Die Kennzeichen des Nabelpunktes und der Punkte der Minimalflächen vereinigen in sich diejenigen parabolischen Punkte, in denen beide Hauptkrümmungen zugleich verschwinden. In einem solchen Punkt verschwinden die Krümmungen aller Normalenschnitte. Offenbar sind alle Punkte einer Ebene von dieser Art, zugleich sind die Ebenen die einzigen Flächen, die aus lauter parabolischen Nabelpunkten bestehen. Ein Beispiel für einen isolierten parabolischen Nabelpunkt kann man analog dem gewöhnlichen Sattel (Abb. 190, S. 162) leicht konstruieren, wenn man in der Paßhöhe nicht zwei, sondern drei Gebirge und drei Einsenkungen aneinanderstoßen läßt, so daß die Fläche durch eine Drehung um $2\pi/3$ mit sich selbst zur Deckung kommt (Abb. 198). Dann liegt offenbar jedem Gebirge eine Senkung gegenüber. Daher hat jeder Normalenschnitt einen Wendepunkt, also verschwindende Krümmung. Man nennt eine solche Fläche einen Affensattel. Diese Bezeichnung rührt daher, daß der Mensch zum Reiten nur zwei Vertiefungen braucht, daß aber der Affe eine dritte für seinen Schwanz nötig hat.

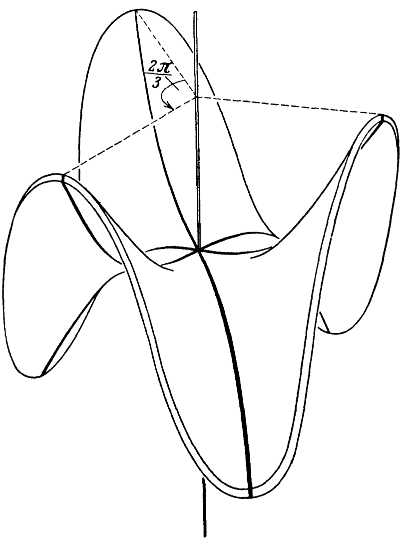

Abb. 198.

Man kann die verschiedene Gestalt der Flächen in elliptischen und hyperbolischen Punkten noch auf eine andere Art kennzeichnen, die auch die Namen „elliptisch" und „hyperbolisch" rechtfertigt. Hierzu lege ich zur Tangentialebene in geringem Abstand eine Parallelebene und betrachte deren Schnitt mit der Fläche. In einem elliptischen Flächenpunkt wird eine solche Schnittkurve nur vorhanden sein, wenn die Parallelebene auf einer bestimmten Seite der Tangentialebene angenommen wird. Die Schnittkurve wird sich auf den Berührungspunkt zusammenziehen, wenn der Abstand der Ebenen gegen Null abnimmt. Lasse ich den Abstand gegen Null gehen, vergrößere aber gleichzeitig die Schnittkurve in passender Weise in immer stärkerem Maßstab, so zeigt es sich, daß die vergrößerte Schnittkurve sich unbegrenzt einer in der Tangentialebene gelegenen Ellipse nähert, die den Berührungspunkt zum Mittelpunkt und die Krümmungsrichtungen zu Achsenrichtungen hat. Das Verhältnis der Achsenlängen ist dabei gleich der Wurzel aus dem Verhältnis der Hauptkrümmungsradien.

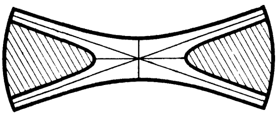

Abb. 199.

Betrachte ich die auf einer bestimmten Seite verlaufenden Parallelebenen zur Tangentialebene eines hyperbolischen Punkts, so ergibt der analoge Grenzübergang eine Hyperbel, deren Achsenrichtungen und Achsenlängen in derselben Weise wie im elliptischen Fall von den Krümmungsrichtungen und den Hauptkrümmungen abhängen (Abb. 199). Verfährt man ebenso mit den Parallelebenen auf der anderen Seite der Tangentialebene, so erhält man eine zweite Hyperbel, die dieselben Achsen wie die erste besitzt. Beide Hyperbeln haben überdies ihre Asymptoten gemeinsam, und zwar sind deren Richtungen gerade durch die Asymptotenrichtungen des betrachteten Flächenpunkts gegeben. Man nennt die von uns konstruierten Kegelschnitte die „DUPINschen Indikatrizes" der Flächenpunkte. In parabolischen Punkten kann das entsprechende Verfahren zu verschiedenartigen Kurven führen. In Nabelpunkten ist die DUPINsche Indikatrix ein Kreis. Man kann das an der Kugel und am Ellipsoid leicht bestätigen. In Affensätteln verläuft die Indikatrix etwa wie in Abb. 200 angegeben.

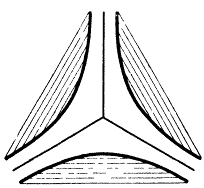

Abb. 200.

## § 29. Sphärische Abbildung und GAUSSsche Krümmung.

Wir haben bis jetzt die Flächenkrümmung durch zwei Zahlen, die Hauptkrümmungen, charakterisiert. GAUSS hat nun ein Verfahren angegeben, um die Krümmung in einem Flächenpunkt durch eine einzige Zahl, die natürlich von den Hauptkrümmungen abhängt, in analoger Weise darzustellen, wie wir das für die Raumkurven gelernt haben.

Ich ziehe zu jeder Normalen der betrachteten Fläche die Parallele durch den Mittelpunkt einer Einheitskugel. Ich zeichne willkürlich eine der beiden Richtungen der Normalen in einem Flächenpunkt aus und übertrage diese Festsetzung stetig auf alle Nachbarpunkte auf dem Flächenstück. Zeichne ich nun die gleiche Richtung auch auf dem ent-