

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0041

LOG Titel: § 29. Sphärische Abbildung und Gaussche Krümmung.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

alle Ebene auf einer bestimmten Seite der Tangentialebene angenommen wird. Die Schnittkurve wird sich auf den Berührungspunkt zusammenziehen, wenn der Abstand der Ebenen gegen Null abnimmt. Lasse ich den Abstand gegen Null gehen, vergrößere aber gleichzeitig die Schnittkurve in passender Weise in immer stärkerem Maßstab, so zeigt es sich, daß die vergrößerte Schnittkurve sich unbegrenzt einer in der Tangentialebene gelegenen Ellipse nähert, die den Berührungspunkt zum Mittelpunkt und die Krümmungsrichtungen zu Achsenrichtungen hat. Das Verhältnis der Achsenlängen ist dabei gleich der Wurzel aus dem Verhältnis der Hauptkrümmungsradien.

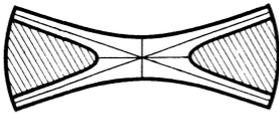


Abb. 199.

Betrachte ich die auf einer bestimmten Seite verlaufenden Parallelebenen zur Tangentialebene eines hyperbolischen Punkts, so ergibt der analoge Grenzübergang eine Hyperbel, deren Achsenrichtungen und Achsenlängen in derselben Weise wie im elliptischen Fall von den Krümmungsrichtungen und den Hauptkrümmungen abhängen (Abb. 199). Verfährt man ebenso mit den Parallelebenen auf der anderen Seite der Tangentialebene, so erhält man eine zweite Hyperbel, die dieselben Achsen wie die erste besitzt. Beide Hyperbeln haben überdies ihre Asymptoten gemeinsam, und zwar sind deren Richtungen gerade durch die Asymptotenrichtungen des betrachteten Flächenpunkts gegeben. Man nennt die von uns konstruierten Kegelschnitte die „DUPINSchen Indikatrizes“ der Flächenpunkte. In parabolischen Punkten kann das entsprechende Verfahren zu verschiedenartigen Kurven führen. In Nabelpunkten ist die DUPINSche Indikatrix ein Kreis. Man kann das an der Kugel und am Ellipsoid leicht bestätigen. In Affensätteln verläuft die Indikatrix etwa wie in Abb. 200 angegeben.

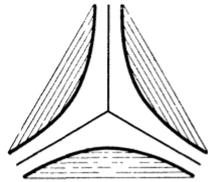


Abb. 200.

§ 29. Sphärische Abbildung und GAUSSsche Krümmung.

Wir haben bis jetzt die Flächenkrümmung durch zwei Zahlen, die Hauptkrümmungen, charakterisiert. GAUSS hat nun ein Verfahren angegeben, um die Krümmung in einem Flächenpunkt durch eine einzige Zahl, die natürlich von den Hauptkrümmungen abhängt, in analoger Weise darzustellen, wie wir das für die Raumkurven gelernt haben.

Ich ziehe zu jeder Normalen der betrachteten Fläche die Parallele durch den Mittelpunkt einer Einheitskugel. Ich zeichne willkürlich eine der beiden Richtungen der Normalen in einem Flächenpunkt aus und übertrage diese Festsetzung stetig auf alle Nachbarpunkte auf dem Flächenstück. Zeichne ich nun die gleiche Richtung auch auf dem ent-

sprechenden Kugeldurchmesser aus, so wird jedem Punkt des Flächenstücks ein bestimmter Punkt der Kugeloberfläche, der Endpunkt des Durchmessers, zugeordnet, die Fläche wird also auf die Kugel abgebildet. Man nennt dieses von GAUSS herrührende Verfahren die sphärische Abbildung der Fläche. Da die Durchmesser der Kugel auf den Tangentialebenen ihrer Endpunkte senkrecht stehen, so besitzt bei der GAUSSschen Abbildung jeder Punkt die gleiche Normalenrichtung wie sein sphärisches Bild, und ebenso sind die beiden Tangentialebenen parallel. Die sphärische Abbildung wird deshalb auch als Abbildung durch parallele Normalen bzw. durch parallele Tangentialebenen bezeichnet. Man kann eine Fläche nicht nur auf die Kugel, sondern auch auf jede beliebige andere geschlossene Fläche durch parallele Tangentialebenen abbilden. Diese allgemeineren Abbildungen spielen in der modernen Differentialgeometrie eine gewisse Rolle.

Ein und derselbe Punkt der Kugel entspricht bei der sphärischen Abbildung mehreren Flächenpunkten dann und nur dann, wenn gleichgerichtete parallele Normalen auf der Fläche vorhanden sind. Wie man sich anschaulich leicht klarmachen kann und wie wir später genauer verfolgen werden, gibt es in der nächsten Umgebung eines elliptischen oder hyperbolischen Flächenpunkts keine solchen Normalen (vergleiche Abb. 202, 203, S. 173). Dort ist also die sphärische Abbildung umkehrbar eindeutig.

Wenn ich auf dem Flächenstück eine geschlossene Kurve k ziehe, so entspricht ihr eine geschlossene Kurve k' auf der Kugel. Wir dividieren nun den Flächeninhalt G des Kugelstücks, das von k' eingeschlossen wird, durch den Inhalt F des von k umschlossenen Stücks unserer Fläche und ziehen die Flächenkurve k auf einen Flächenpunkt P zusammen. Dabei werden F und G immer kleiner, und wenn wir schließlich im Grenzübergang die Kurve in den Punkt P übergehen lassen, nähert sich der betrachtete Quotient einem bestimmten Grenzwert

$$\lim_{F \rightarrow 0} \frac{G}{F} = K.$$

Die durch dieses Verfahren definierte Zahl K heißt die GAUSSsche Krümmung der Fläche in P . Die analytische Betrachtung ergibt nun, daß die GAUSSsche Krümmung gleich dem Produkt der zugehörigen Hauptkrümmungen ist:

$$K = k_1 k_2.$$

Die GAUSSsche Krümmung hat die höchst wichtige Eigenschaft, daß sie sich bei beliebiger Verbiegung des Flächenstücks nicht ändert. Als Verbiegungen definiert man diejenigen Deformationen, welche die Längen und Winkel aller auf der Fläche gezogenen Kurven unverändert lassen; eine aus annähernd undehnbarem Material, z. B. Papier oder dünnem Blech hergestellte Fläche läßt sich zur Veranschaulichung von

Verbiegungen verwenden. Da nun die GAUSSsche Krümmung durch Verbiegungen nicht beeinflußt wird, muß sie in innigem Zusammenhang zu den Eigenschaften der Fläche stehen, die allein von den Längen und Winkeln der in der Fläche verlaufenden Kurven abhängen. In der Relativitätstheorie, die gerade diese „inneren“ Eigenschaften mehrdimensionaler gekrümmter Mannigfaltigkeiten untersucht, spielt deshalb die GAUSSsche Krümmung und ihr Analogon für mehr Dimensionen eine entscheidende Rolle.

Wir wollen uns plausibel machen, weshalb die GAUSSsche Krümmung, deren Definition doch wesentlich von der räumlichen Lage der Fläche abhängt, dennoch bei Verbiegungen ungeändert bleibt. Wir denken uns aus starren dreieckigen ebenen Platten (a, b, c, d in Abb. 201) eine körperliche Ecke zusammengesetzt, so daß zwei benachbarte Platten

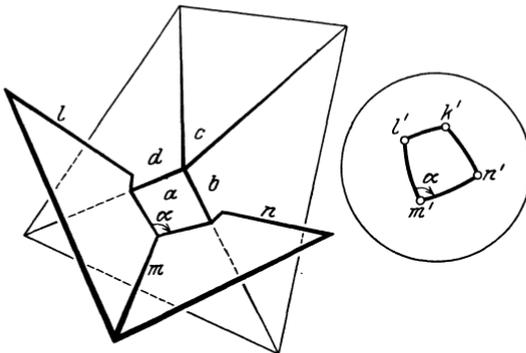


Abb. 201.

stets um die gemeinsame Kante drehbar sind. Wenn dann die Ecke mehr als drei Seitenflächen hat, ist ihre Gestalt im Raum noch veränderlich, und diese Veränderungen werden wir als Verbiegung bezeichnen dürfen, weil sie die Längen und Winkel aller Kurven ungeändert

lassen, die man auf der Oberfläche der körperlichen Ecke zeichnet. Wenn man auf jeder der Seitenflächen nach außen das Lot (l, m, n) errichtet, kommt man zu einer sphärischen Abbildung der Ecke durch einzelne Punkte (l', m', n') der Kugel. Um nun eine Analogie zur sphärischen Flächenabbildung herzustellen, verbinde ich durch Großkreisbögen diejenigen Kugelpunkte, die benachbarte Seitenflächen der körperlichen Ecke abbilden. Auf diese Weise ergibt sich ein Polygon auf der Kugel. Ich behaupte nun, daß bei den soeben definierten Verbiegungen der Flächeninhalt dieses Polygons sich nicht ändert; diese Tatsache steht offenbar in Analogie zu der Unveränderlichkeit der GAUSSschen Krümmung bei der Flächenverbiegung.

Meine Behauptung läßt sich aber aus elementaren Sätzen der sphärischen Trigonometrie ableiten. Bekanntlich ist nämlich der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, und ebenso jedes Großkreispolygons, allein abhängig von der Winkelsumme. Es genügt also zu zeigen, daß die Winkel des Polygons, das wir als sphärisches Bild der körperlichen Ecke eingeführt haben, bei deren Verbiegung sich nicht ändern. Aus Abb. 201 erkennt man nun, daß jeder solche Winkel gleich dem Supplement

eines Winkels ist, den zwei benachbarte Kanten der Ecke miteinander bilden. Nach unseren Voraussetzungen sind aber alle diese Winkel unveränderlich.

Man kann aus der eben durchgeführten Betrachtung durch einen Grenzübergang die Unveränderlichkeit der GAUSSschen Krümmung erhalten, wenigstens wenn man sich auf konvexe Flächenstücke beschränkt. Man hat zu diesem Zweck die Fläche durch einbeschriebene Dreieckspolyeder mit kleiner Kantenlänge zu approximieren und unsere Betrachtung auf jede Ecke dieses Polyeders anzuwenden.

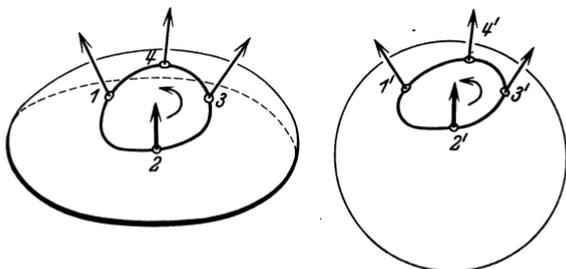


Abb. 202.

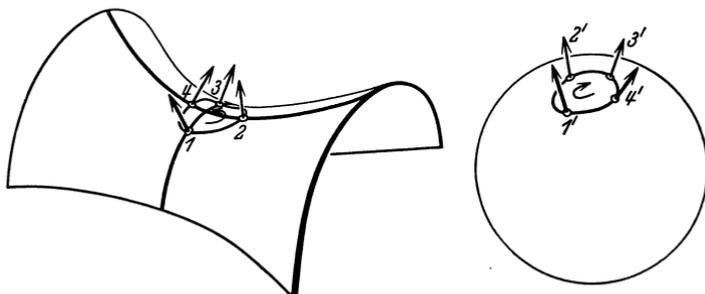


Abb. 203.

Wir wollen jetzt sehen, wie sich die Unterscheidung der Flächenpunkte in elliptische, hyperbolische und parabolische durch die sphärische Abbildung und die GAUSSsche Krümmung kennzeichnen läßt. Umläuft man einen Punkt elliptischer Krümmung auf einer kleinen geschlossenen doppelpunktfreien Flächenkurve, so erhält man auf der Kugel eine ebenfalls doppelpunktfreie geschlossene Kurve (Abb. 202). Auch in einem Punkt sattelförmiger Krümmung ist das sphärische Bild doppelpunktfrei (Abb. 203). Wie die Abb. 202 und 203 zeigen, ist im hyperbolischen Fall der Umlaufsinn der Kurve auf der Kugel entgegengesetzt dem Umlaufssinn der Flächenkurve, während in elliptischen Punkten beide Umlaufsinn gleich sind. Man pflegt nun in der analytischen Geometrie den Inhalten zweier Flächenstücke gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen beizulegen, je nachdem sie in gleichem oder entgegengesetztem Sinne umlaufen werden. Daher rechnet man die

GAUSSsche Krümmung in konvexen Stücken als positiv, in sattelförmigen als negativ. Zu derselben Vorzeichenbestimmung kommen wir auch, wenn wir von den beiden Hauptkrümmungen ausgehen. In elliptischen Punkten liegen nämlich die den Hauptkrümmungen entsprechenden Krümmungsmittelpunkte auf derselben Halbgeraden der Normalen, während sie in hyperbolischen Punkten auf den entgegengesetzten Halbgeraden liegen. Wenn ich also die eine Halbgerade als positiv, die andere als negativ kennzeichne, so ist das Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien — also auch das Produkt der Hauptkrümmungen und damit die GAUSSsche Krümmung — positiv für elliptische Punkte und negativ für hyperbolische Punkte. — Da das Bild hinreichend kleiner geschlossener doppelpunktfreier Kurven ebenfalls doppelpunktfrei ausfällt, so muß die sphärische Abbildung in überall konvexen oder überall sattelförmigen hinreichend kleinen Flächenstücken stets umkehrbar eindeutig sein.

Die parabolischen Punkte nehmen eine Mittelstellung zwischen den elliptischen und den hyperbolischen Punkten ein; daher werden wir erwarten, daß die GAUSSsche Krümmung in den parabolischen Punkten verschwindet. Das bestätigt sich. Denn die parabolischen Punkte sind dadurch definiert, daß in ihnen eine Hauptkrümmung verschwindet; also verschwindet in ihnen auch das Produkt der Hauptkrümmungen, d. h. die GAUSSsche Krümmung.

Die Ebene besteht nur aus parabolischen Punkten. Aus der Biegunsinvarianz der GAUSSschen Krümmung folgt daher, daß ich ein ebenes Blatt Papier niemals auf ein positiv oder negativ gekrümmtes Flächenstück auflegen kann. Die Anschauung ergibt in der Tat, daß das Papier im ersten Fall sich falten, im zweiten Fall zerreißen muß.

Wir betrachten jetzt eine gegebene Fläche, die nicht aus lauter parabolischen Punkten besteht und auf der sowohl Punkte positiver als auch Punkte negativer GAUSSscher Krümmung vorhanden sind. Da die GAUSSsche Krümmung sich stetig auf der Fläche ändert, so muß es auf der Fläche auch Punkte geben, in denen die GAUSSsche Krümmung verschwindet, und diese Punkte müssen stetige Kurvenzüge bilden, die die Gebiete positiver von denen negativer GAUSSscher Krümmung trennen. Man nennt solche aus parabolischen Punkten bestehenden Kurven die parabolischen Kurven der Fläche¹. Natürlich müssen parabolische Kurven nur dann auftreten, wenn die GAUSSsche Krümmung

¹ Die parabolischen Kurven sind von F. KLEIN zu einer eigenartigen Untersuchung herangezogen worden. Er nahm an, daß die künstlerische Schönheit eines Gesichts ihren Grund in gewissen mathematischen Beziehungen hätte, und ließ deshalb auf dem Apollo von Belvedere, dessen Gesichtszüge uns einen besonders hohen Grad von klassischer Schönheit wiedergeben, die sämtlichen parabolischen Kurven einzeichnen. Diese Kurven besaßen aber weder eine besonders einfache Gestalt, noch ließ sich ein allgemeines Gesetz ausfindig machen, dem sie gehorchten (Abb. 204).

auf der Fläche beide Vorzeichen annimmt. Auf den bisher von uns betrachteten Flächen trat das nie ein; die Flächen zweiter Ordnung besitzen entweder überall positive Krümmung wie das Ellipsoid, oder überall negative wie das einschalige Hyperboloid, oder überall verschwindende wie der Zylinder und der Kegel, die sich ja aus einem ebenen Blatt Papier formen lassen. Die Minimalflächen ferner haben nirgends positive Krümmung.

Wir wollen jetzt Beispiele von Flächen mit parabolischen Kurven angeben und deren sphärische Abbildung betrachten. Eine besonders einfache Fläche dieser Art ist die Oberfläche einer Glocke. Man erhält sie, indem man eine ebene Kurve, die einen Wendepunkt hat, um eine in ihrer Ebene gelegene Achse rotieren läßt



Abb. 204.

in ihrer Ebene gelegene Achse rotieren läßt (Abb. 205). Wir wollen diese Achse als vertikal annehmen. Für den in Abb. 205 gezeichneten Fall erzeugt der oberhalb des Wendepunkts verlaufende Zweig der Kurve ein elliptisch gekrümmtes Flächenstück, während der untere Teil der Kurve ein hyperbolisch gekrümmtes Flächenstück liefert. Der Breitenkreis der Rotationsfläche, der vom Wendepunkt der Kurve beschrieben wird, ist also die parabolische Kurve der Glocke. Man erkennt das auch am Verhalten der Tangentialebenen. Die Tangentialebenen der hyperbolischen Punkte schneiden die Glocke in einer schleifenartigen Kurve, die zwei Äste durch den Berührungspunkt schießt (Abb. 206). Nähert sich nun der Berührungspunkt von unten her der parabolischen Kurve, so wird der geschlossene Teil der Schleife immer kleiner, und die beiden durch den Berührungspunkt laufenden Zweige der Schnittkurve schließen dort einen immer spitzeren Winkel ein. Liegt

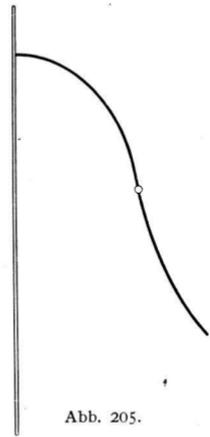


Abb. 205.

der Berührungspunkt schließlich auf der parabolischen Kurve (Abb. 207), so ist die Schleife auf den Berührungspunkt zusammengeschrumpft, und die Schnittkurve hat im Berührungspunkt eine Spitze. Wandert der Berührungspunkt weiter in den elliptischen Teil der Fläche (Abb. 208), so besteht die Schnittkurve aus dem Berührungspunkt als isoliertem

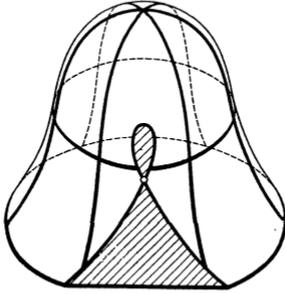


Abb. 206.

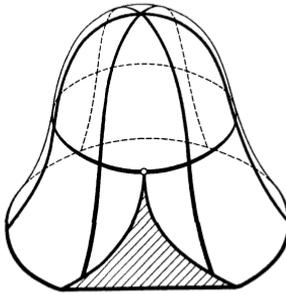


Abb. 207.

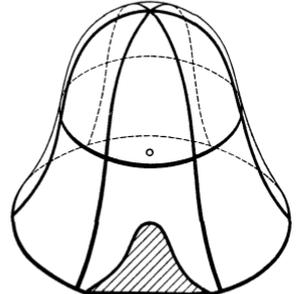


Abb. 208.

Punkt und einem ganz im hyperbolischen Teil verlaufenden stetig gekrümmten Kurvenbogen. Wir haben damit zugleich Beispiele für die früher (S. 154) aufgezählten Fälle singulärer Punkte ebener Kurven.

Wir untersuchen nun die sphärische Abbildung der Glocke in der Nähe des parabolischen Breitenkreises (Abb. 209). Wir umgeben einen beliebigen Punkt der parabolischen Kurve mit dem kleinen geschlossenen

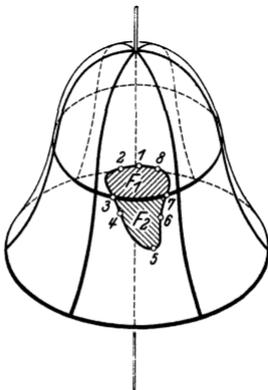
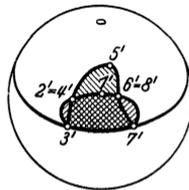


Abb. 209.



Kurvenzug 123456781 , durch den ein gewisses Flächenstück F eingeschlossen ist. Die Punkte 1 und 5 mögen der höchste und tiefste Punkt von F sein. In 3 und 7 soll der Kurvenzug den parabolischen Breitenkreis treffen. Nun besitzt der Meridian, durch dessen Rotation die Glocke erzeugt wird, in der Umgebung seines Wendepunkts parallele Tangenten

(vgl. S. 154). Offenbar besitzen die entsprechenden Punkte der Glocke parallele Normalen, also das gleiche sphärische Bild. Demnach gehört zu jedem Breitenkreis unmittelbar oberhalb des parabolischen Kreises ein zweiter Breitenkreis unmittelbar unterhalb des parabolischen, der dasselbe sphärische Bild hat. Wir erkennen also, daß die sphärische Abbildung des Flächenstücks F nicht umkehrbar eindeutig sein kann. Zur Veranschaulichung dieser Tatsache wählen wir die Punkte 2, 4, 6, 8 auf dem Rand von F so, daß sowohl 2 und 4 als auch

6 und 8 parallele Normalen besitzen. Der parabolische Kreis teilt F in zwei Gebiete F_1 und F_2 , deren Inneres ganz aus elliptischen bzw. hyperbolischen Flächenpunkten besteht, die also umkehrbar eindeutig auf zwei Gebiete der Kugel abgebildet werden. Diese Gebiete grenzen beide an das Bild des parabolischen Kreises, das offenbar auf der Kugel ebenfalls ein Kreis in einer horizontalen Ebene ist. Während aber F_1 und F_2 auf verschiedenen Seiten des parabolischen Kreises liegen, grenzen die Bildgebiete auf der Kugel beide von oben an das Bild des parabolischen Kreises. Sie überdecken sich daher. Der Rand von F wird in eine Kurve $1'2'3'4'5'6'7'8'1'$ abgebildet, und dabei fällt $2'$ mit $4'$ und $6'$ mit $8'$ zusammen, und die Kurve durchschneidet in diesen Punkten sich selbst.

Das sphärische Bild der Glocke erfährt also längs des Bilds der parabolischen Kurve eine Umklappung. Diese Umklappung tritt auch bei den parabolischen Kurven beliebiger Flächen in der Regel ein. Es gibt jedoch eine charakteristische Ausnahme, die an einem zweiten Beispiel erklärt werden soll.

Durch eine vertikale Achse lege ich eine Ebene, zeichne in ihr einen Kreis, der die Achse nicht trifft, und drehe die Ebene um die Achse. Dann beschreibt der Kreis eine Rotationsfläche, welche Ringfläche oder Torus genannt wird (Abb. 210). Der Kreis wird durch seinen höchsten Punkt A und seinen tiefsten Punkt B in zwei Halbkreise I und II geteilt. Der von I erzeugte Teil des Torus besitzt offenbar positive GAUSSsche Krümmung, der von II erzeugte Teil des Torus dagegen negative. Die beiden Teile des Torus werden voneinander durch die Breitenkreise getrennt, die die Punkte A und B beschreiben. Diese Kreise sind die parabolischen Kurven der Fläche. Jede Tangentialebene, die in einem Punkt eines dieser Kreise an den Torus gelegt wird, hat mit dem Torus einen einzigen durch den Berührungspunkt gehenden Kurvenzweig gemein, da sie offenbar den Torus längs des ganzen Kreises berührt und ihn sonst nicht trifft. Wir haben also hier ein Beispiel parabolischer Punkte, in denen die Tangentialebene keine mit einer Spitze versehene Kurve aus der Fläche ausschneidet. In Abb. 211 ist für einen der parabolischen Kurve benachbarten hyperbolischen Toruspunkt die Schnittkurve der Tangentialebene mit dem Torus gezeichnet. In den elliptischen Toruspunkten hat die Tangentialebene allein ihren Berührungspunkt mit dem Torus gemein.

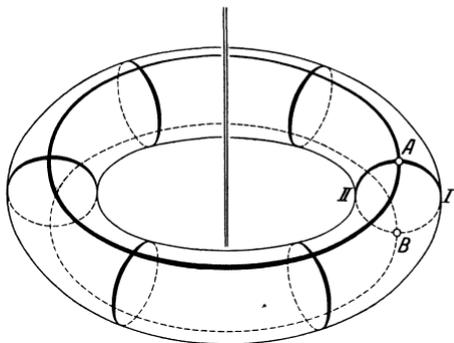


Abb. 210.

Wir betrachten nun das sphärische Bild des Torus. Wir denken uns etwa in jedem Punkt die nach außen weisende Richtung der Normalen ausgezeichnet. Dann werden die beiden parabolischen Kreise, da sie lauter parallele Normalen besitzen, nur in je einen einzigen Punkt der

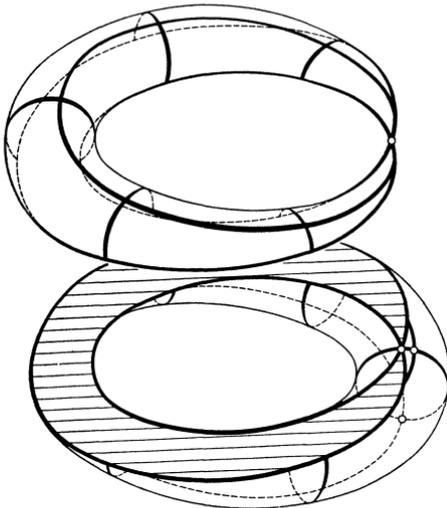


Abb. 211.

Kugel, nämlich in den höchsten und den tiefsten Punkt derselben, abgebildet. Der elliptische Teil des Torus besitzt keine parallelen Normalen. Sein sphärisches Bild bedeckt, wie man leicht sieht, die ganze Kugel mit Ausnahme des höchsten und tiefsten Punkts einfach und lückenlos. Das gleiche gilt aber auch vom hyperbolischen Teil.

Im ganzen wird also die Kugel vom sphärischen Bild des Torus genau zweimal bedeckt, mit Ausnahme des höchsten und tiefsten Punkts, wo beide Bildteile zusammenhängen. Um die Art dieses Zusammenhangs zu veranschaulichen, verfahren wir wie beim vorigen Beispiel. Wir denken uns den Torus und sein sphärisches Bild schräg von oben gesehen (Abb. 212) und umgeben einen parabolischen Punkt mit einem kleinen geschlossenen doppelpunktfreien Kurvenzug 12341. Aus der Figur ist die Wahl dieser Punkte und die Gestalt des sphärischen Bilds des Kurvenzugs wohl ohne nähere Erörterung ersichtlich. Daß das sphärische Bild achtförmig ausfällt, steht im Einklang damit, daß im elliptischen Gebiet der Umlaufsinn erhalten bleibt, während er im hyperbolischen Gebiet umgekehrt wird.

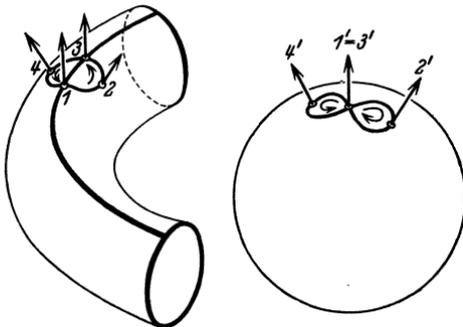


Abb. 212.

Unser Beispiel ist charakteristisch für den Fall, daß die Fläche längs eines ganzen (notwendig parabolischen) Kurvenstücks von derselben Ebene berührt wird. Dagegen veranschaulicht das Beispiel der Glocke den Fall, daß die Tangentialebene sich längs der parabolischen Kurve ändert. Bei beiden Beispielen trennt die parabolische Kurve auf der Fläche ein Gebiet positiver von einem Gebiet negativer GAUSSScher Krümmung.

Als letztes Beispiel betrachten wir nun eine Fläche mit einem parabolischen Punkt, der isoliert in einem sonst sattelförmig gekrümmten Gebiet liegt (Abb. 213); es ist der S. 169 beschriebene Affensattel. Bei dieser Fläche haben offenbar diejenigen Punkte parallele Normalen, die zu dem parabolischen Punkt diametral liegen. Einer geschlossenen doppelpunktfreien Kurve um diesen Punkt herum entspricht also auf der Kugel eine geschlossene Kurve, die das sphärische Bild des Punkts zweimal umläuft¹. Ebenso kann man offenbar isolierte parabolische Punkte mit sattelförmiger Umgebung konstruieren, bei denen das sphärische Bild einen einmaligen Umlauf in einen drei- oder beliebig vielfachen verwandelt. Geht man dagegen von einem isolierten parabolischen

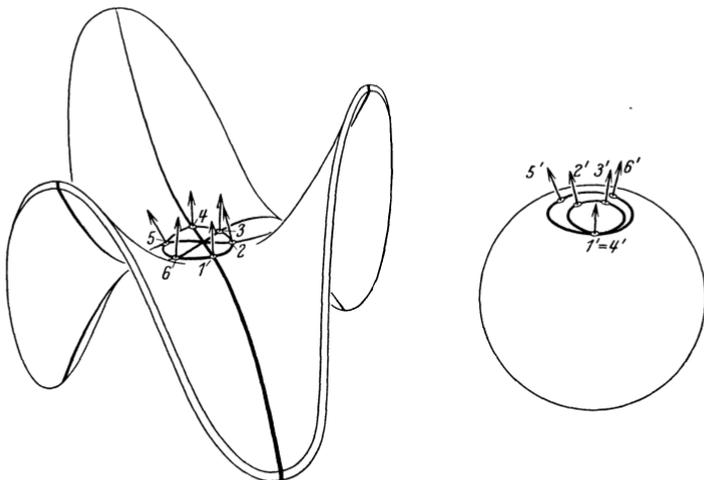


Abb. 213.

Punkt aus, dessen Umgebung elliptische Krümmung aufweist, so läßt sich zeigen, daß das sphärische Bild sich genau so verhält, als wäre die Krümmung überall elliptisch und gar kein parabolischer Punkt vorhanden.

Zum Schluß wollen wir angeben, in welcher Weise sich die Krümmungslinien und die Asymptotenlinien einer Fläche bei der sphärischen Abbildung verhalten. Die Krümmungsrichtungen lassen sich durch die sphärische Abbildung vollständig kennzeichnen; es sind die einzigen Richtungen, die ihren Bildrichtungen parallel sind; nur in den Nabelpunkten versagt dieses Kriterium; dort sind alle Richtungen ihren Bildern parallel. In elliptischen Punkten sind außerdem beide Krümmungsrichtungen mit ihren Bildern gleichgerichtet oder bei anderer Wahl der Normalenrichtung alle beide mit ihren Bildern entgegengesetzt

¹ Der Affensattel wird also durch parallele Normalen auf eine RIEMANNsche Fläche über der Kugel abgebildet, die im Bild des parabolischen Punkts einen Windungspunkt hat (vgl. S. 238). Man beachte in Abb. 213 auch die Umkehrung des Umlaufsinns.

gerichtet, dagegen ist in hyperbolischen Punkten stets eine der Krümmungsrichtungen mit ihrem sphärischen Bild gleichgerichtet, die andere entgegengesetzt gerichtet.

Aus diesem Kriterium können wir leicht die Krümmungslinien der Rotationsflächen bestimmen. Ich behaupte, das sind die Breitenkreise und Meridiane. Diese beiden Kurvenscharen gehen nämlich ersichtlich in ein System von Breitenkreisen und Meridianen auf der Kugel über, und zwar so, daß jede Richtung ihrer Bildrichtung parallel ist. Die beiden Pole konvexer geschlossener Rotationsflächen sind somit stets Nabelpunkte.

Die Asymptotenrichtungen haben eine andere Eigenschaft. Sie stehen nämlich auf ihrem sphärischen Bild senkrecht und sind die einzigen Richtungen dieser Art. Der Drehungssinn, in dem ich eine

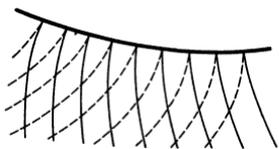


Abb. 214.

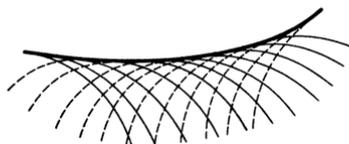


Abb. 215.

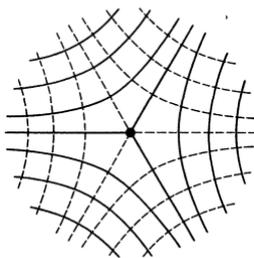


Abb. 216.

Asymptotenrichtung in der Tangentialebene drehen muß, um ihre Bildrichtung zu erhalten, ist stets für beide Asymptotenrichtungen entgegengesetzt. Das hängt damit zusammen, daß die sphärische Abbildung den Umlaufsinn sattelförmig gekrümmter Flächenstücke stets umkehrt.

Da die Asymptotenlinien nur den hyperbolischen Teil der Fläche bedecken, müssen sie in der Nähe parabolischer Kurven ein singuläres Verhalten zeigen. Falls die parabolische Kurve eine veränderliche Tangentialebene hat wie bei der Glocke, haben die Asymptotenlinien Spitzen längs der parabolischen Kurve (Abb. 214). Falls dagegen alle Punkte einer parabolischen Kurve dieselbe Tangentialebene haben, so wie beim Torus, ist die parabolische Kurve die Einhüllende der Asymptotenlinien, d. h. sie berührt in jedem Punkt eine Asymptotenlinie (Abb. 215). Den Verlauf der Asymptotenlinien auf einem Affensattel kennzeichnet Abb. 216. Es laufen gerade n Asymptotenlinien durch einen Punkt dieser Art, wenn ein geschlossener Umlauf um ihn durch das sphärische Bild in einen $n - 1$ -fachen Umlauf verwandelt wird.