§ 30. Abwickelbare Flächen, Regelflächen.

Wir haben bei unseren Betrachtungen über die parabolischen Punkte bisher den Fall ausgeschlossen, daß eine Fläche nur aus parabolischen Punkten besteht. Dieser Fall soll jetzt seiner besonderen Wichtigkeit wegen ausführlich besprochen werden.

Beispiele solcher Flächen haben wir bereits in allen den Flächen kennengelernt, die aus einem Stück der Ebene durch Verbiegung hervorgehen. Es gilt nun allgemein der Satz, daß sich zwei Flächen ineinander durch Verbiegung überführen lassen, wenn auf beiden Flächen die GAUSSsche Krümmung überall denselben *konstanten* Wert hat[1].

Nach diesem Satz kann man durch die Verbiegung von Ebenenstücken schon sämtliche Flächen überall verschwindender GAUSSscher Krümmung erhalten. Wegen dieser Erzeugungsweise nennt man die Flächen auch „abwickelbare Flächen".

Es gibt noch zwei ganz andere Arten, die abwickelbaren Flächen zu erzeugen. Zunächst sind abwickelbar alle Flächen, die von einer einparametrigen Ebenenschar eingehüllt werden. Die veränderliche Ebene berührt eine solche Fläche längs einer ganzen Geraden; man erhält diese Gerade durch Grenzübergang aus der Schnittgeraden der Ebene mit einer ihrer Nachbarlagen. Die Gerade ist parabolische Kurve der Fläche, da die Fläche ja längs der Geraden eine und dieselbe Tangentialebene hat. Da ferner die Gesamtheit dieser Geraden die ganze Fläche überdeckt, muß diese in der Tat aus lauter parabolischen Punkten bestehen. Merkwürdigerweise gilt nun auch umgekehrt der Satz, daß man auf diese Art alle abwickelbaren Flächen erhalten kann. Demnach sind die abwickelbaren Flächen sämtlich Regelflächen[2].

Da drei Ebenen stets einen Schnittpunkt haben[3], ist es plausibel, daß sich benachbarte Erzeugende einer abwickelbaren Fläche stets schneiden. Dies kann analytisch bewiesen werden und führt zur dritten Erzeugungsart der abwickelbaren Flächen. Die Schnittpunkte benachbarter Geraden beschreiben nämlich eine Kurve, und es läßt sich die anschauliche Vermutung bestätigen, daß diese Raumkurve von den Erzeugenden nicht geschnitten, sondern berührt wird. Wir können unsere Flächen also auch als diejenigen Flächen definieren, die von den Tangenten einer beliebigen Raumkurve überstrichen werden. Die

[1] Bei Flächen *veränderlicher* GAUSSscher Krümmung gibt es keine ähnlich einfache hinreichende Bedingung dafür, daß die Flächen sich ineinander durch Verbiegung überführen lassen. Notwendig ist, daß man die Flächen so aufeinander abbilden kann, daß sie in entsprechenden Punkten die gleiche GAUSSsche Krümmung besitzen. Diese Bedingung reicht aber nicht hin. Man kann sich das leicht am Beispiel von Rotationsflächen klarmachen.

[2] Dagegen gibt es im vierdimensionalen Raum abwickelbare Flächen, die nicht Regelflächen sind. Vgl. S. 301, 302.

[3] Parallelismus ist hierbei als Schnitt im Unendlichen aufzufassen.

Fläche wird dann zugleich eingehüllt von den Schmiegungsebenen der Kurve. Allein die Kegel und Zylinder entziehen sich dieser Darstellung, während sie durch die vorige Methode offenbar erzeugt werden können.

Aus der zweiten Darstellung läßt sich sofort das sphärische Bild aller abwickelbaren Flächen mit Ausnahme der Ebene bestimmen. Die einhüllenden Ebenen sind ja die Gesamtheit der Tangentialebenen der Fläche. Sie und ebenso ihre Normalenrichtungen bilden also eine Schar, die nur von *einem* veränderlichen Parameter abhängt. Also ist das sphärische Bild der abwickelbaren Fläche stets eine Kurve, und zwar das Binormalenbild der Raumkurve, deren Tangenten die Fläche überstreichen. Daß bei den Flächen der Krümmung Null das sphärische Bild auf eine Kurve zusammenschrumpft, war auch nach der ursprünglichen Definition der Gaussschen Krümmung zu erwarten. Danach hat nämlich das sphärische Bild jedes solchen Flächenstücks den Inhalt Null.

Wir wickeln nun die Tangentenfläche irgendeiner Raumkurve auf die Ebene ab. Dann muß die Raumkurve in eine ebene Kurve übergehen, und die Erzeugenden der Fläche gehen in die Tangenten dieser ebenen Kurve über. Jedem Bogen der Raumkurve entspricht ein gleich langer Bogen der ebenen Kurve. Es läßt sich aber außerdem zeigen, daß beide Kurven in entsprechenden Punkten auch gleiche Krümmung besitzen[1].

Geht man umgekehrt von einem ebenen konvexen Kurvenbogen s aus und schneidet das auf der Innenseite der Kurve gelegene Ebenenstück weg, so läßt sich das übrigbleibende Ebenenstück so verbiegen, daß die Raumkurve, in die der Bogen s übergeht, in allen Punkten seine Krümmung behält. Dabei kann man, wie sich analytisch beweisen läßt, dieser Raumkurve jede beliebige Torsion erteilen. Eine solche Formänderung einer Raumkurve, bei der Bogenlänge und Krümmung erhalten bleiben, während die Torsion sich ändert, nennt man „Verwindung" der Raumkurve.

Bei unserer Verbiegung der Ebene bleiben offenbar die Tangenten von s stets geradlinig, während alle übrigen Geraden der Ausgangsebene gekrümmt werden[2]. Es zeigt sich aber, daß wir durch die Verbiegung des Ebenenstücks keineswegs die ganze Tangentenfläche der Raumkurve t erhalten, die aus s hervorgeht. Die Fläche, die wir kon-

[1] Das ist anschaulich einleuchtend; denn der Winkel benachbarter Tangenten bleibt bei der Verbiegung ungeändert, und die Krümmung ist der Grenzwert des Quotienten dieses Winkels und des zugehörigen Bogens.

[2] Bei einer ganz beliebigen Verbiegung des Ebenenstückes ändert sich natürlich auch die Krümmung von s. Damit nun die Krümmung von s erhalten bleibt, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, daß die Tangenten von s geradlinig bleiben. Wir erhalten daher ein brauchbares Modell, wenn wir das Ebenenstück aus Papier ausschneiden und einige Halbtangenten von s durch aufgeklebte Stäbe versteifen.

struiert haben, enthält nämlich von allen Tangenten von t nur den einen vom Berührungspunkt begrenzten Halbstrahl. Ziehe ich diese Halbtangenten zu vollen Geraden aus, so erhalte ich ein zweites Flächenstück, das mit dem ersten zusammen die Tangentenfläche von t bildet. Beide Flächenstücke stoßen in t in einer scharfen Kante zusammen, die man die Rückkehrkante der Fläche nennt. Wenn man nun t wieder stetig in die Kurve s verwindet, schließen sich die beiden Teile immer enger aneinander und fallen schließlich beide in die Ebene s. Man erhält die volle Tangentenfläche von t, indem man den äußeren Teil der Ebene von s in zwei Exemplaren übereinanderlegt, längs s zusammenheftet und dann bei der Verwindung von s die beiden Blätter auseinanderzieht. Hierbei ist es wesentlich, daß die Krümmung von s nirgends verschwindet. Geht man dagegen von Kurven mit Wendepunkten aus, so besteht die Tangentenfläche im allgemeinen aus vier Blättern, die im Wendepunkt zusammenstoßen und von denen zwei längs der Wendetangente zusammenhängen.

Wir fragen nun nach den Regelflächen, die nicht abwickelbar sind. Nach dem Vorigen müssen es diejenigen sein, bei denen zwei benachbarte Erzeugende zueinander windschief sind. Denn abwickelbar ist die Fläche ja dann und nur dann, wenn benachbarte Erzeugende sich schneiden.

Durch naheliegende Verallgemeinerung des Gedankenganges, der zu jeder abwickelbaren Fläche eine auf ihr verlaufende Raumkurve, die Rückkehrkante, bestimmt, läßt sich auch zu jeder anderen Regelfläche eine entsprechende Kurve, die „Striktionslinie“, bestimmen. Wir greifen dazu aus der Schar der auf der Fläche verlaufenden Geraden zwei Erzeugende a und b heraus und ziehen ihr gemeinsames Lot (Abb. 217). Bekanntlich ist das die kürzeste Verbindung zwischen a und b. A sei der Fußpunkt dieses Lotes auf a. Lassen wir b in der Geradenschar immer näher an a heranrücken, so nähert sich A einer Grenzlage, die wir den Kehlpunkt von a nennen. Er entspricht dem Punkt, in dem eine Erzeugende einer abwickelbaren Fläche die benachbarte Erzeugende und die Rückkehrkante trifft.

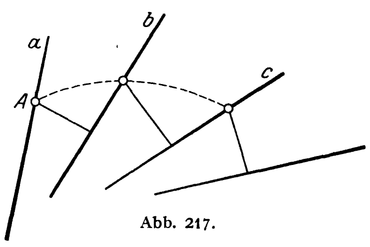

Abb. 217.

Die Striktionslinie ist die Kurve, die der Kehlpunkt beschreibt, wenn a alle Erzeugenden der Fläche durchläuft. Es wäre ein Trugschluß, zu glauben, daß die Striktionslinie alle Erzeugenden senkrecht trifft. Denn sind a, b, c drei benachbarte Erzeugende (Abb. 217), so hat im allgemeinen das gemeinsame Lot von b und c einen anderen Fußpunkt auf b als das gemeinsame Lot von b und a. Deshalb hat die Verbindungslinie der Kehlpunkte nicht notwendig die Richtung der gemeinsamen Lote, braucht also die Erzeugenden nicht senkrecht zu treffen. Z. B. wird die Striktionslinie des einschaligen Rotationshyperboloids durch den Kehlkreis gebildet, und dieser steht offenbar auf den Geraden des Hyperboloids nirgends senkrecht.

Die Regelflächen sind einparametrige Mannigfaltigkeiten von Geraden. Sie haben deshalb gewisse Analogien zu den Raumkurven, den einparametrigen Mannigfaltigkeiten von Punkten. So kann man für Regelflächen einen Begriff einführen, der der Krümmung der Raumkurven entspricht; es ist die sog. Striktion oder der Drall. Man dividiert den Winkel zweier Erzeugenden durch ihren kürzesten Abstand und bezeichnet als Drall den Grenzwert, dem dieser Quotient zustrebt, wenn die Erzeugenden zusammenrücken.

Der Drall ist kennzeichnend für die Lageänderung der Tangentialebene längs einer Regelgeraden. Offenbar kann sich die Tangentialebene, wenn ihr Berührungspunkt eine Regelgerade durchläuft, nur um diese Gerade drehen, da sie sie stets enthalten muß. Wie man analytisch zeigen kann, ist nun die Stellung der Tangentialebene in einem Punkt P der Erzeugenden a vollständig bestimmt durch die Tangentialebene im Kehlpunkt A von a, durch den Abstand PA und durch den Drall der Regelfläche in a. Die Verteilung der Tangentialebenen läßt sich folgendermaßen beschreiben: Wenn P auf a von A aus nach einer Seite stetig bis ins Unendliche wandert, so wächst der Winkel, den die Tangentialebene in P mit der Tangentialebene in A bildet, stetig bis zu einem Rechten. Auf der anderen Seite von A verhalten sich die Tangentialebenen entsprechend und symmetrisch zum Kehlpunkt A. Liegen zwei Punkte P und Q der Geraden zu beiden Seiten gleich weit von A entfernt, so halbiert die Tangentialebene von A den Winkel der Tangentialebenen vom P und Q.

Hieraus folgt: Wenn zwei Regelflächen in je einer Erzeugenden gleichen Drall besitzen, so kann man sie so aufeinanderlegen, daß jene beiden Erzeugenden sich decken und daß überdies die Flächen einander längs jener Erzeugenden überall berühren. Man hat nur dafür zu sorgen, daß die Kehlpunkte und die Tangentialebenen in ihnen sich decken, und hat dann möglicherweise die eine Fläche gegen die andere noch um zwei Rechte zu drehen, so daß dabei die Kehlpunkte und ihre Tangentialebenen in Deckung bleiben. Diese Tatsache ist in der Kinematik von Bedeutung (vgl. S. 252).

Die abwickelbaren Flächen werden durch den Drall in verschiedener Weise gekennzeichnet. Offenbar sind nämlich die Zylinder identisch mit den Flächen, auf denen der Drall verschwindet; denn benachbarte Erzeugende bilden miteinander den Winkel Null. Dagegen besitzen die Kegel und die Tangentenflächen der Raumkurven unendlichen Drall; denn benachbarte Erzeugende dieser Flächen haben den Abstand Null.

Das sphärische Bild der abwickelbaren Flächen haben wir bestimmt. Auch bei den Regelflächen von endlichem Drall zeigt das sphärische Bild ein einfaches Verhalten. Die Normalen aller Punkte einer Regelgeraden sind einer festen Ebene parallel, der Normalebene der Geraden. Das sphärische Bild der Geraden ist daher jedenfalls ein Großkreisbogen. Nun dreht sich die Normale jedesmal stetig um einen rechten Winkel, wenn ihr Fußpunkt vom Kehlpunkt aus nach beiden Seiten hin auf der Geraden ins Unendliche wandert. Das sphärische Bild der Geraden ist also ein Halbkreis. Die beiden Endpunkte des Halbkreises entsprechen unendlich fernen Punkten der Geraden, das sphärische Bild des Kehlpunkts halbiert den Halbkreis.

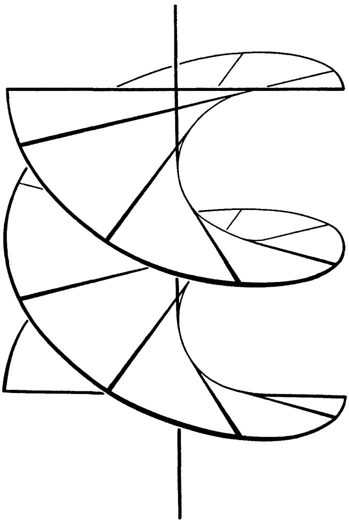

Abb. 218.

Zum Schluß wollen wir noch eine besonders einfache Regelfläche von konstantem Drall konstruieren (Abb. 218). Es liegt dann nahe, als Striktionslinie wieder eine Gerade zu wählen, die auf allen Erzeugenden der Fläche senkrecht steht. Ist d der (konstante) Drall der Fläche und sind a und b zwei Erzeugende, die miteinander den Winkel α bilden und die Striktionsgerade in A und B treffen, so gilt stets die Gleichung:

$$\alpha = AB \cdot d\,.$$

Die Fläche geht daher in sich über, wenn man um die Striktionsgerade als Achse eine Schraubung von der Ganghöhe d ausführt. Man nennt die Fläche wegen dieser Eigenschaft eine Schraubenfläche. Die allgemeinste Schraubenfläche erhält man, wenn man eine beliebige Raumkurve durch eine gleichmäßige Schraubung um eine feste Achse alle möglichen Lagen annehmen läßt. Unsere spezielle Regel-Schraubenfläche ergibt sich also, wenn man als erzeugende Kurve eine Gerade wählt, die die Achse senkrecht schneidet. Diese Fläche wird Wendelfläche genannt.

Die analytische Betrachtung ergibt nun, daß die Wendelfläche eine Minimalfläche ist (vgl. Abb. 219). Wir haben schon früher (S. 169) ein Beispiel einer Minimalfläche angegeben, das Katenoid. Diese beiden Flächen stehen miteinander in einer engen Beziehung. Man kann nämlich die Wendelfläche durch Verbiegung in das Katenoid überführen. Dabei hat man die Schraubenfläche unendlich oft um die Rotationsfläche herumzulegen, in derselben Weise, wie man die Ebene auf einen Kreiszylinder aufwickeln kann. Die Striktionsgerade muß dabei den engsten Breitenkreis der Rotationsfläche überdecken, und die Regelgeraden gehen in die Meridiane über[1].

Die Schraubenflächen und ihre Beziehung zu den Rotationsflächen werden wir später allgemein behandeln.

§ 31. Verwindung von Raumkurven.

Die Theorie der abwickelbaren Flächen hat uns auf ein Verfahren geführt, eine Raumkurve so abzuändern, daß ihre Bogenlängen und ihre Krümmung erhalten bleiben und nur die Torsion variiert. Eine solche Formänderung hatten wir als „Verwindung" der Raumkurve bezeichnet. Insbesondere kann man jede Raumkurve t durch Verwindung in eine ebene Kurve s überführen, und die Gestalt von s ist durch t vollständig bestimmt; denn auf s ist die Krümmung als Funktion der Bogenlänge bekannt,

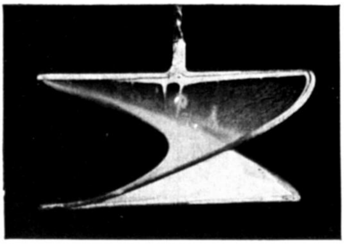

Abb. 219.

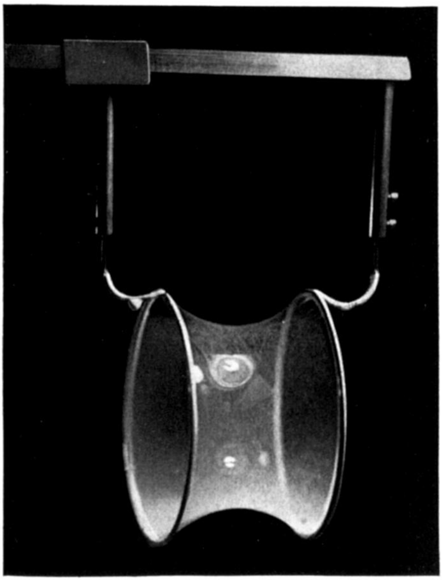

Abb. 220.

und nach § 26 ergibt sich daraus die Gestalt von s eindeutig. Zwischen s und t besteht nun eine merkwürdige Beziehung.

Die Theorie der geodätischen Krümmung — ein Begriff, auf den wir hier nicht näher eingehen — liefert eine einfache Ungleichung, die wir im folgenden brauchen (Abb. 221 a, b): Verläuft t auf einer abwickelbaren Fläche und führen wir t in eine ebene Kurve t' dadurch über, daß wir jene Fläche auf die Ebene abwickeln, so ist die Krümmung k' von t' nie größer und im allgemeinen sogar kleiner als die Krümmung k in entsprechenden Punkten von t. Bezeichnet nämlich α den Winkel, den die

[1] Man beachte, daß bei der Verbiegung keineswegs die Schraubungsachse in die Rotationsachse übergeht, sondern in einen dazu senkrechten Kreis. Deshalb ist in den Abb. 219 und 220 die Achse der Wendelfläche vertikal, die des Katenoids horizontal angenommen worden.