

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG_0043

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

dabei den engsten Breitenkreis der Rotationsfläche überdecken, und die Regelgeraden gehen in die Meridiane über¹.

Die Schraubenflächen und ihre Beziehung zu den Rotationsflächen werden wir später allgemein behandeln.

§ 31. Verwindung von Raumkurven.

Die Theorie der abwickelbaren Flächen hat uns auf ein Verfahren geführt, eine Raumkurve so abzuändern, daß ihre Bogenlängen und ihre Krümmung erhalten bleiben und nur die Torsion variiert. Eine solche Formänderung hatten wir als „Verwindung“ der Raumkurve bezeichnet. Insbesondere kann man jede Raumkurve t durch Verwindung in eine ebene Kurve s überführen, und die Gestalt von s ist durch t vollständig bestimmt; denn auf s ist die Krümmung als Funktion der Bogenlänge bekannt,

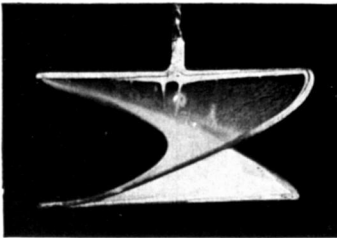


Abb. 219.

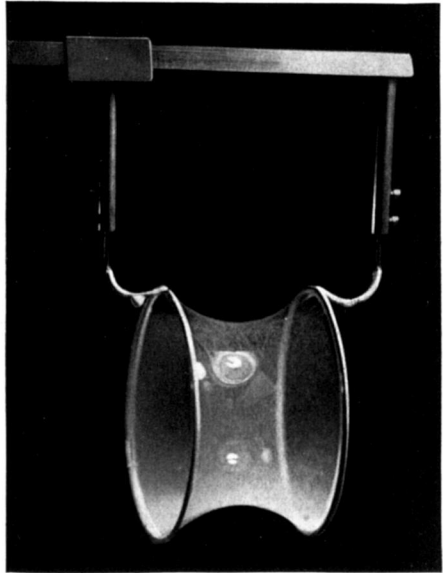


Abb. 220.

und nach § 26 ergibt sich daraus die Gestalt von s eindeutig. Zwischen s und t besteht nun eine merkwürdige Beziehung.

Die Theorie der geodätischen Krümmung — ein Begriff, auf den wir hier nicht näher eingehen — liefert eine einfache Ungleichung, die wir im folgenden brauchen (Abb. 221 a, b): Verläuft t auf einer abwickelbaren Fläche und führen wir t in eine ebene Kurve t' dadurch über, daß wir jene Fläche auf die Ebene abwickeln, so ist die Krümmung k' von t' nie größer und im allgemeinen sogar kleiner als die Krümmung k in entsprechenden Punkten von t . Bezeichnet nämlich α den Winkel, den die

¹ Man beachte, daß bei der Verbiegung keineswegs die Schraubungsachse in die Rotationsachse übergeht, sondern in einen dazu senkrechten Kreis. Deshalb ist in den Abb. 219 und 220 die Achse der Wendelfläche vertikal, die des Katenoids horizontal angenommen worden.

Schmiegungeebene von t mit der zugehörigen Tangentialebene der abwickelbaren Fläche einschließt, so gilt:

$$k' = k \cdot \cos \alpha.$$

Aus diesem Hilfssatz läßt sich nun der merkwürdige Satz ableiten: *Bei jeder Verwindung eines ebenen konvexen Kurvenbogens wachsen alle Sehnen.*

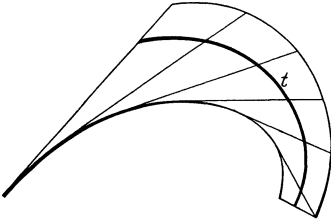


Abb. 221 a.

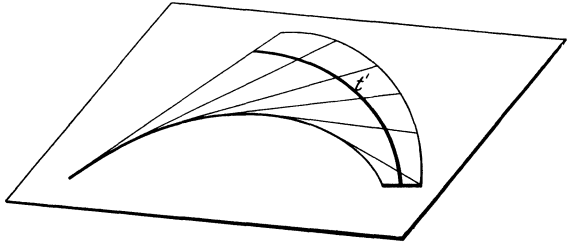


Abb. 221 b.

Zum Beweis betrachten wir den ebenen konvexen Bogen s mit den Endpunkten A, B (Abb. 222 a). Durch Verwindung von s entstehe der Raumkurvenbogen t mit den Endpunkten C, D . Wir haben zu zeigen,

daß die geradlinige Strecke CD länger ist als die Strecke AB . Wir legen nun durch den Bogen t einen Kegel mit der Spitze C (Abb. 222 b). Wir wickeln diesen Kegel auf die Ebene von s ab. Dann entsteht aus t eine ebene Kurve t' mit den Endpunkten E, F (Abb. 222 c). Die Strecken EF und CD sind gleich, denn CD ist eine Mantellinie unseres Kegels, bleibt daher bei der Abwicklung geradlinig und wird längentreu auf die Gerade EF abgebildet. Wir haben also jetzt nur noch zu zeigen, daß EF

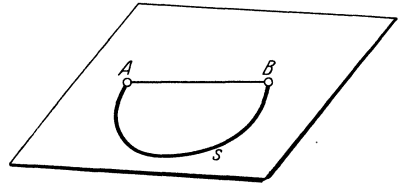


Abb. 222 a.



Abb. 222 b,

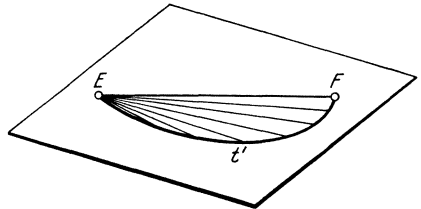


Abb. 222 c.

länger ist als AB . Nun haben die Kurvenbögen s und t' gleiche Länge, und nach unserem Hilfssatz ist die Krümmung von t' stets kleiner als die Krümmung im entsprechenden Punkt von t , also auch von s . Wir können demnach s in die Gestalt t' überführen, indem wir den Punkt A festhalten und bei gleichbleibender Bogenlänge die Krümmung von s

überall abschwächen. Aus der Konvexität von s ergibt sich anschaulich, daß bei unserer Deformation der Punkt B immer weiter von A wegrückt. Das läßt sich auch leicht analytisch bestätigen. Damit ist die Ungleichung $EF > AB$, also auch unsere Behauptung bewiesen.

Der Einfachheit halber wollen wir das Ergebnis auf diejenigen Kurven anwenden, die durch Verwindung aus einem Kreisbogen entstehen; also auf die Raumkurven konstanter Krümmung. Wir können dann durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Figur immer erreichen, daß diese Krümmung den Wert Eins hat. Daher wollen wir uns von vornherein auf diesen Fall beschränken. Wir betrachten alle Raumkurven der Krümmung Eins, die zwei feste Punkte A und B miteinander verbinden. Damit unter diesen Kurven auch Kreisbögen vorkommen, wollen wir annehmen, daß die Entfernung AB kleiner ist als Zwei. Dann läßt sich in der Tat durch A, B ein Kreis vom Radius Eins legen.

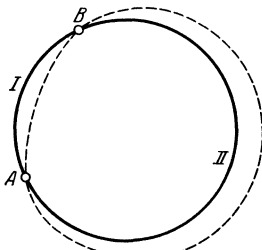


Abb. 223.

Die beiden Punkte zerlegen die Peripherie in einen kürzeren Bogen I und einen längeren Bogen II (Abb. 223). Es besteht nun folgende zunächst paradox klingende Tatsache: Der kürzere Bogen I ist länger als alle benachbarten Kurvenbögen unserer Schar, der längere Bogen II dagegen ist kürzer als die benachbarten.

Dabei sind allein die Bögen auszunehmen, die aus I und II durch Rotation um AB entstehen; diese haben natürlich gleiche Länge wie I bzw. II . Es ist also von den Bögen die Rede, die aus I bzw. aus II durch Verwindung entstehen.

Wir beweisen gleich allgemein: Wenn ein nichtebener Bogen t konstanter Krümmung Eins die Punkte A und B verbindet und nicht länger ist als II , so ist er kürzer als I .

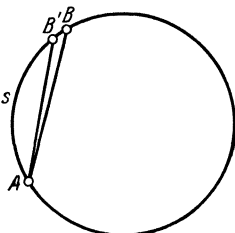


Abb. 224.

Wir führen t durch Verwindung in einen ebenen Kreisbogen s über, den wir so auf den durch AB gezeichneten Kreis legen, daß der eine Endpunkt von s in den Punkt A fällt (Abb. 224). Der andere Endpunkt von s ist dann ein Punkt B' der Kreisperipherie. Nach dem früher bewiesenen Satz ist nun die Sehne AB' kürzer als die Sehne AB . Die Länge des Bogens t muß gleich der Länge eines der Bögen sein, in die AB' den Kreis zerlegt.

Von diesen beiden Bögen ist der eine länger als II , kommt also nach Voraussetzung nicht in Frage; also ist t so lang wie der andere Kreisbogen, also kürzer als I .

Wir haben damit bewiesen, daß kein Bogen der Krümmung Eins existiert, der A mit B verbindet, und dessen Länge zwischen den Längen

von I und II liegt. Wir fragen nun, ob es für die Längen solcher Bögen noch weitere Einschränkungen gibt.

Zunächst ist leicht einzusehen, daß der Bogen beliebig lang sein kann. Denn unter den Kurven konstanter Krümmung sind (vgl. S. 161) insbesondere die Schraubenlinien enthalten. Die Ganghöhe dieser Schraubenlinien können wir so klein annehmen, wie wir wollen. Also können wir auf einer solchen Schraubenlinie auch die Zahl der Umläufe zwischen zwei Punkten der Entfernung AB beliebig groß machen. Bei hinreichend kleiner Ganghöhe hat aber jeder Umlauf ungefähr die Länge des Einheitskreises. Die Bogenlänge zwischen A und B kann also in der Tat unbegrenzt groß sein (Abb. 225).

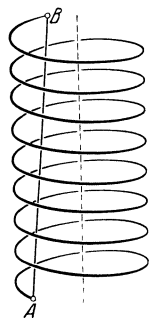


Abb. 225.

Unbegrenzt klein kann dagegen ein solcher Bogen nicht sein; seine Länge muß ja die geradlinige Entfernung AB übersteigen. An diese untere Grenze kann man aber beliebig nahe herankommen. Wenn man nämlich auf einer Schraubenlinie der Krümmung Eins die Ganghöhe sehr groß wählt, so wird die Tangente der Schraube fast parallel der Achse, und die Entfernung der Schraubenlinie von der Achse wird beliebig klein. Ein Bogen einer solchen Schraubenlinie unterscheidet sich daher beliebig wenig von seiner Sehne (Abb. 226), und das beweist unsere Behauptung.



Abb. 226.

Wir haben also gefunden, daß das Problem, zwei feste Punkte durch einen möglichst kurzen Kurvenbogen der Krümmung Eins zu verbinden, keine Lösung besitzt. Durch eine scheinbar ähnliche Minimalbedingung hatten wir früher die Minimalflächen charakterisiert, ebenso hat RIEMANN wichtige Sätze der Funktionentheorie auf Minimalbedingungen zurückgeführt. Wir sehen hier, daß die scheinbar selbstverständliche Annahme, daß für jedes Minimalproblem eine Lösung existiert, in jedem Fall der Nachprüfung bedarf und keineswegs immer zutrifft. Diese Existenzbeweise gehören bisher zu den mühsamsten Aufgaben der Analysis (vgl. § 38, 39).

Es gibt ein ganz einfaches Beispiel für ein Minimalproblem ohne Lösung: Es seien zwei Punkte A und B durch einen möglichst kurzen Kurvenbogen derart zu verbinden, daß der Bogen in A auf der Geraden AB senkrecht steht. Auch in diesem Beispiel kann man die geradlinige Entfernung AB beliebig annähern, aber nie erreichen, weil die gerade Strecke AB unserer Bedingung nicht genügt (Abb. 227).

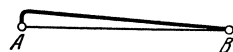


Abb. 227.

Endlich sei ein Minimalproblem erwähnt, bei dem die Existenz der Lösung lange umstritten war. In einer Ebene soll ein Stab AB so bewegt

werden, daß er sich zum Schluß um zwei Rechte gedreht hat und daß er bei der Bewegung eine Fläche von möglichst kleinem Inhalt überstreicht. Erst in neuester Zeit hat BESICOVITCH (Math. Z. **27**, 1928) bewiesen, daß dieses Problem nicht lösbar ist. Man kann durch zickzackartige Bewegung die überstrichene Fläche beliebig klein machen (vgl. S. 247).

§ 32. Elf Eigenschaften der Kugel.

Wir haben die Flächen verschwindender GAUSSscher Krümmung kennengelernt. Wir fragen jetzt nach den Flächen konstanter positiver oder negativer Krümmung. Die bei weitem einfachste und wichtigste Fläche dieser Art ist die Kugel. Eine gründliche Untersuchung der Kugel ist allein Stoff genug für ein ganzes Buch. Wir wollen hier nur elf besonders anschauliche Eigenschaften der Kugel anführen. Wir werden dabei mehrere neue Begriffe kennenlernen, die nicht nur für die Geometrie der Kugel, sondern auch für die allgemeine Flächentheorie von Bedeutung sind. Bei jeder der zu besprechenden Eigenschaften stellen wir die Frage, ob durch sie die Kugel eindeutig definiert ist oder ob noch andere Flächen dieselbe Eigenschaft besitzen.

1. Die Kugel besitzt konstanten Abstand von einem festen Punkt und konstantes Abstandsverhältnis von zwei festen Punkten.

Die erste dieser beiden Eigenschaften ist die elementare Definition der Kugel und bestimmt sie daher eindeutig. Daß die Kugel auch die zweite Eigenschaft besitzt, läßt sich analytisch sofort einsehen. Durch diese zweite Eigenschaft kann aber außer der Kugel auch die Ebene definiert werden; eine Ebene ergibt sich nämlich dann und nur dann, wenn das Abstandsverhältnis den Wert Eins hat. Man erhält dann die Symmetrieebene der beiden Punkte.

2. Die Umriss- und ebenen Schnitte der Kugel sind Kreise.

Bei der Betrachtung der Flächen zweiter Ordnung hatten wir den Satz kennengelernt, daß alle ebenen Schnitte und Umriss- dieser Flächen Kegelschnitte sind. Bei der Kugel sind alle diese Kegelschnitte Kreise. Durch diese Tatsache wird die Kugel eindeutig bestimmt. Wir sind daher berechtigt, aus dem Auftreten eines stets kreisförmigen Erdschattens bei den Mondfinsternissen auf die Kugelgestalt der Erde zu schließen.

3. Die Kugel besitzt konstante Breite und konstanten Umfang.

Als konstante Breite bezeichnet man die Eigenschaft der Kugel, daß zwei parallele Tangentialebenen stets den gleichen Abstand voneinander haben. Man kann also die Kugel zwischen zwei solchen Ebenen noch beliebig hin und her drehen. Man sollte meinen, daß durch diese Eigenschaft die Kugel eindeutig bestimmt wird. In Wahrheit gibt es aber noch zahlreiche andere konvexe geschlossene und zum Teil völlig singularitätenfreie Flächen, die ebenfalls konstante Breite besitzen, die