werden, daß er sich zum Schluß um zwei Rechte gedreht hat und daß er bei der Bewegung eine Fläche von möglichst kleinem Inhalt überstreicht. Erst in neuester Zeit hat BESICOVITCH (Math. Z. **27**, 1928) bewiesen, daß dieses Problem nicht lösbar ist. Man kann durch zickzackartige Bewegung die überstrichene Fläche beliebig klein machen (vgl. S. 247).

§ 32. Elf Eigenschaften der Kugel.

Wir haben die Flächen verschwindender GAUSSscher Krümmung kennengelernt. Wir fragen jetzt nach den Flächen konstanter positiver oder negativer Krümmung. Die bei weitem einfachste und wichtigste Fläche dieser Art ist die Kugel. Eine gründliche Untersuchung der Kugel ist allein Stoff genug für ein ganzes Buch. Wir wollen hier nur elf besonders anschauliche Eigenschaften der Kugel anführen. Wir werden dabei mehrere neue Begriffe kennenlernen, die nicht nur für die Geometrie der Kugel, sondern auch für die allgemeine Flächentheorie von Bedeutung sind. Bei jeder der zu besprechenden Eigenschaften stellen wir die Frage, ob durch sie die Kugel eindeutig definiert ist oder ob noch andere Flächen dieselbe Eigenschaft besitzen.

1. Die Kugel besitzt konstanten Abstand von einem festen Punkt und konstantes Abstandsverhältnis von zwei festen Punkten.

Die erste dieser beiden Eigenschaften ist die elementare Definition der Kugel und bestimmt sie daher eindeutig. Daß die Kugel auch die zweite Eigenschaft besitzt, läßt sich analytisch sofort einsehen. Durch diese zweite Eigenschaft kann aber außer der Kugel auch die Ebene definiert werden; eine Ebene ergibt sich nämlich dann und nur dann, wenn das Abstandsverhältnis den Wert Eins hat. Man erhält dann die Symmetrieebene der beiden Punkte.

2. Die Umrisse und ebenen Schnitte der Kugel sind Kreise.

Bei der Betrachtung der Flächen zweiter Ordnung hatten wir den Satz kennengelernt, daß alle ebenen Schnitte und Umrisse dieser Flächen Kegelschnitte sind. Bei der Kugel sind alle diese Kegelschnitte Kreise. Durch diese Tatsache wird die Kugel eindeutig bestimmt. Wir sind daher berechtigt, aus dem Auftreten eines stets kreisförmigen Erdschattens bei den Mondfinsternissen auf die Kugelgestalt der Erde zu schließen.

3. Die Kugel besitzt konstante Breite und konstanten Umfang.

Als konstante Breite bezeichnet man die Eigenschaft der Kugel, daß zwei parallele Tangentialebenen stets den gleichen Abstand voneinander haben. Man kann also die Kugel zwischen zwei solchen Ebenen noch beliebig hin und her drehen. Man sollte meinen, daß durch diese Eigenschaft die Kugel eindeutig bestimmt wird. In Wahrheit gibt es aber noch zahlreiche andere konvexe geschlossene und zum Teil völlig singularitätenfreie Flächen, die ebenfalls konstante Breite besitzen, die sich also ebenfalls zwischen zwei parallelen Platten hin und her drehen lassen und die Platten dabei ständig berühren. Eine solche Fläche ist in Abb. 228 in zwei verschiedenen Stellungen dargestellt.

Man kann den Begriff der konstanten Breite auch auf Kurven übertragen; man schreibt einer ebenen konvexen geschlossenen Kurve diese Eigenschaft zu, wenn zwei parallele Tangenten stets denselben Abstand haben. Der Kreis ist eine Kurve dieser Art, aber keineswegs die einzige; von den beiden Kurvenbögen, in die eine konvexe geschlossene Kurve konstanter Breite durch die Berührungspunkte paralleler Tangenten zerlegt wird, kann man den einen beliebig vorgeben; dann läßt sich der andere stets (eindeutig) so hinzubestimmen, daß die entstehende geschlossene Kurve konstante Breite besitzt. Das läßt sich anschaulich

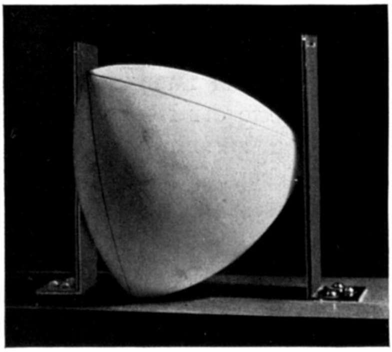

Abb. 228 a.

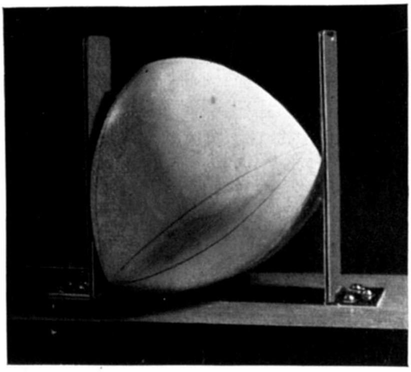

Abb. 228 b.

leicht einsehen. Durch die Tangenten des vorgegebenen Bogens bestimmen sich nämlich eindeutig die Tangenten des zweiten Bogens; man hat zu jeder der vorgegebenen Tangenten in festem Abstand und auf einer bestimmten Seite die Parallele zu ziehen. Der zweite Bogen ist dann einfach die Einhüllende dieser Geradenschar.

Die Körper konstanter Breite sind offenbar dadurch gekennzeichnet, daß alle ihre Umrisse bei senkrechter Parallelprojektion Kurven derselben konstanten Breite sind. Nun gilt der Satz, daß alle Kurven derselben konstanten Breite auch denselben Umfang besitzen. Da man als einen Umfang eines Körpers den Umfang eines seiner Umrisse bei senkrechter Parallelprojektion bezeichnet, so folgt aus dem erwähnten Satz, daß die Körper konstanter Breite auch konstanten Umfang haben. Infolge dieser Eigenschaft kann ich jede Fläche konstanter Breite in einem Papierzylinder, der fest um die Fläche herumgelegt worden ist, noch beliebig hin und her drehen, ohne daß der Papierzylinder sich lockert oder zerreißt.

MINKOWSKI hat umgekehrt gezeigt, daß alle konvexen Flächen konstanten Umfangs auch konstante Breite haben, so daß sich also diese beiden Eigenschaften einer Fläche gegenseitig bedingen[1].

4. Die Kugel besteht aus lauter Nabelpunkten.

Wir haben diese Eigenschaft schon früher erwähnt und gleichzeitig darauf hingewiesen, daß außer der Kugel nur noch die Ebene diese Eigenschaft besitzt (S. 165). Daß alle Punkte der Kugel Nabelpunkte sind, folgt unter anderem daraus, daß alle ebenen Schnitte der Kugel Kreise sind. Verschiebt man eine Ebene, die die Kugel schneidet, parallel zu sich selbst so lange, bis sie die Kugel in einem Punkt P berührt, so erkennt man, daß die DUPINsche Indikatrix von P ein Kreis ist (vgl. S. 170). P ist also Nabelpunkt.

5. Die Kugel besitzt keine Brennfläche.

Wir haben früher gesehen (S. 163 ff.), daß die Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte eines Flächenpunkts im allgemeinen ein Stück der Normalen dieses Punkts durchlaufen. Die Endpunkte dieses Stücks sind die Krümmungsmittelpunkte, die zu den Hauptkrümmungen gehören. Man nennt diese beiden Punkte die Brennpunkte der Normalen. Die beiden Brennpunkte fallen dann und nur dann zusammen, wenn wir von einem Nabelpunkt ausgehen. Ins Unendliche fällt ein Brennpunkt dann und nur dann, wenn der Flächenpunkt verschwindende GAUSSsche Krümmung hat.

Durchläuft die Normale alle Punkte eines Flächenstücks, so überstreichen die beiden Brennpunkte im allgemeinen zwei Flächen, die man zusammen als die Brennfläche des ursprünglichen Flächenstücks bezeichnet. Bei der Kugel besteht nun die Brennfläche allein aus dem Kugelmittelpunkt, da alle Brennpunkte in diesen Punkt fallen. Die Kugel ist die einzige Fläche, für die ein Teil der Brennfläche in einen Punkt ausartet. Wir fragen nun nach denjenigen Flächen, für die die beiden Teile der Brennfläche in Kurven ausarten. Es ergibt sich, daß die einzigen Flächen dieser Art die nach ihrem Entdecker benannten DUPINschen *Zykliden* sind (vgl. Abb. 229). Man kann diese Flächen als die Einhüllenden aller Kugeln definieren, die drei feste Kugeln berühren. Die Zykliden sind ferner die einzigen Flächen, deren sämtliche Krümmungslinien Kreise sind. Auf den fünf in Abb. 229 photographierten Gipsmodellen sind einige Krümmungslinien markiert. Übrigens wird die Zyklide von jeder einhüllenden Kugel in einer Krümmungslinie berührt, und alle Krümmungslinien der Zykliden entstehen auf diese Art. Ein Beispiel einer Zyklide ist der uns schon bekannte Torus. Seine Brenn-

[1] Verlangt man, daß alle Umrisse eines Körpers konstanten Flächeninhalt anstatt konstanten Umfang besitzen, so kommt man zu einer anderen Flächenklasse, den sog. „Flächen konstanter Helligkeit". Die Kugel ist eine solche Fläche, jedoch keineswegs die einzige. (Vgl. W. BLASCHKE: Kreis und Kugel. S. 151. Leipzig 1916.)

fläche besteht aus der Rotationsachse und dem Kreis, der vom Mittelpunkt des erzeugenden Kreises bei der Rotation beschrieben wird. Ferner sind die Rotationskegel und Rotationszylinder Zykliden; der eine Teil der Brennfläche ist die Rotationsachse, der andere liegt im unendlichen.

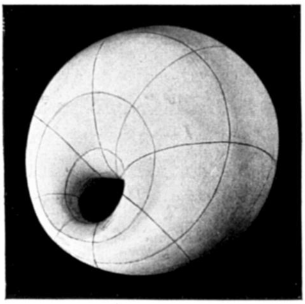

Abb. 229 a.

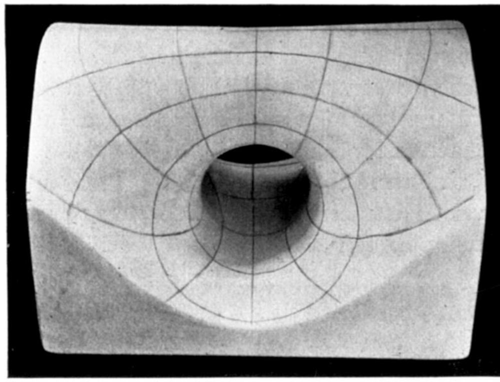

Abb. 229 b.

Bei den übrigen Zykliden besteht die Brennfläche aus zwei Kegelschnitten, im allgemeinen einer Ellipse und einer Hyperbel, die so zueinander liegen wie die Fokalkurven einer Fläche zweiter Ordnung[1].

Verlangt man nur, daß das eine Stück der Brennfläche in eine Kurve ausartet, so ist die zugehörige Flächenklasse schon viel umfassender

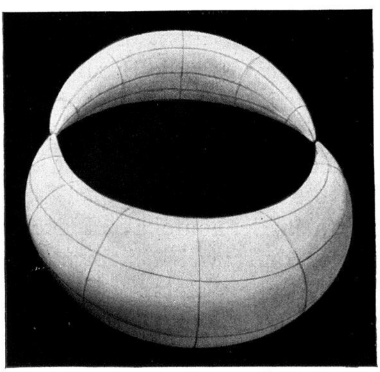

Abb. 229 c.

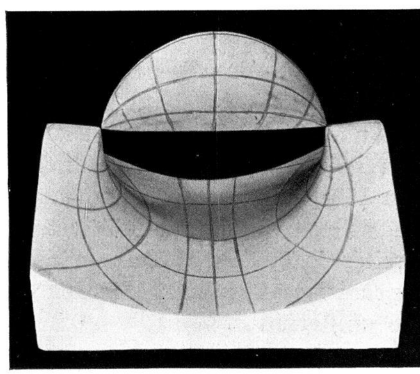

Abb. 229 d.

[1] Die in Abb. 229a, b dargestellten Flächen gehen aus dem Torus durch Inversion im Raum hervor (vgl. S. 236). Das Inversionszentrum liegt bei Abb. 229b auf dem Torus, bei Abb. 229a nicht. Die Flächen von Abb. 229c, d erhält man durch räumliche Inversion aus einem Rotationskegel; 229d entspricht dem Fall des auf der Fläche liegenden Inversionszentrums. Abb. 229e, S. 194 stellt eine Fläche dar, die durch Inversion aus einem Kreiszylinder hervorgeht; Inversionszentrum nicht auf der Fläche.

Alle Rotationsflächen haben diese Eigenschaft; der eine Teil ihrer Brennfläche wird stets von der Achse gebildet. Die allgemeinsten Flächen dieser Art sind die *Kanalflächen*. Es sind die Einhüllenden einer Kugelschar von variablem Radius, deren Mittelpunkte auf einer Kurve liegen. Diese Kurve ist dann stets der eine Teil der Brennfläche. Wenn man diese Kurve als Gerade wählt, erhält man die Rotationsflächen, die also eine spezielle Art von Kanalflächen sind. Ebenso wie bei den Rotationsflächen besteht auch bei den übrigen Kanalflächen die eine Schar der Krümmungslinien aus Kreisen; es sind die Grenzlagen der Schnittkreise benachbarter Kugeln.

Bei den übrigen krummen Flächen besteht die Brennfläche aus zwei Flächenstücken. Es läßt sich zeigen, daß jede Normale in ihren Brennpunkten diese beiden Flächenstücke nicht schneidet, sondern berührt. Wenn man also die beiden Teile der Brennfläche einer Fläche kennt, so sind die Normalen charakterisiert als die gemeinsamen Tangenten jener beiden Teile. Es entsteht nun die Frage, wie weit man diese Verhältnisse umkehren kann. Wir gehen von zwei beliebigen Flächenstücken aus und betrachten die Schar S aller Geraden, die alle beide Flächenstücke berühren. Dann fragt es sich, ob es eine Fläche gibt, deren Normalen aus der Schar S bestehen, ob also die gegebenen beiden Flächenstücke die Brennfläche eine andere Fläche sind. Hierfür ist eine einzige Bedingung notwendig und hinreichend: In den beiden Punkten, in denen jede Gerade von S die beiden Flächen berührt, müssen die Tangentialebenen der beiden Flächen stets aufeinander senkrecht stehen. Ein Beispiel von Flächenpaaren dieser Art liefert uns das System der konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Man kann nämlich zeigen, daß zwei beliebige ungleichartige konfokale Flächen zweiter Ordnung stets unsere Bedingung erfüllen.

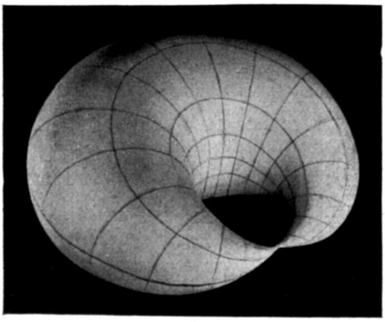

Abb. 229e.

6. Alle geodätischen Linien der Kugel sind geschlossene Kurven.

Die geodätischen Linien einer Fläche sind die Verallgemeinerung der Geraden in der Ebene. Wie die Geraden besitzen sie mehrere wichtige Eigenschaften, durch die sie vor allen anderen Flächenkurven ausgezeichnet sind; man kann sie deshalb auf verschiedene Arten definieren. Wir erwähnen die drei Definitionen als *kürzeste*, als *frontale* und als *geradeste*.

Die erste Eigenschaft besagt, daß jeder nichtzulange Teilbogen einer geodätischen Linie die kürzeste auf der Fläche mögliche Verbindung seiner Endpunkte ist. Hieraus folgt, daß die geodätischen Linien einer Fläche bei Verbiegungen nicht aufhören, geodätisch zu sein. Daher sind die geodätischen Linien grundlegend für die inneren Eigenschaften der Flächen (vgl. S. 172), und man kann durch Zeichnen geodätischer Linien und Messung ihrer Längen alle inneren Eigenschaften einer Fläche (z. B. die GAUSSsche Krümmung) bestimmen; das entspricht der Tatsache, daß man die Geometrie der Ebene vollständig durch das Ziehen von Geraden und das Messen von Strecken kennzeichnen kann. Ebenso wie durch zwei Punkte einer Ebene eine und nur eine Gerade geht, läßt sich durch zwei nicht zu weit entfernte Punkte einer Fläche stets ein und nur ein geodätischer Bogen legen. Man erhält ihn offenbar, wenn man zwischen den beiden Punkten auf der Fläche einen Faden straff zieht[1].

Die zweite Eigenschaft der geodätischen Linien, „frontal" zu sein, gehört ebenfalls der inneren Geometrie der Fläche an. Man definiert die geodätischen Linien durch die Forderung, einen unendlich kleinen Kurvenbogen AB auf der Fläche immer „geradeaus" zu schieben. Wir verlangen dabei, daß die Bahnen von A und B stets gleich lang sind und daß diese Bahnen beide stets auf AB senkrecht sind. Die Bahn, die dann der Mittelpunkt von AB beschreibt, wird mit beliebiger Genauigkeit geodätisch, wenn man den Bogen AB hinreichend klein wählt. Aus dieser Definition wird es plausibel, daß durch jeden Punkt in jeder Richtung genau eine geodätische Linie läuft. Ferner kann ich nach dieser Definition eine Annäherung an die geodätischen Linien dadurch erzeugen, daß ich auf der Fläche einen möglichst kleinen zweirädrigen Karren rollen lasse, dessen Räder starr mit ihrer gemeinsamen Achse verbunden sind, also gleiche Umlaufsgeschwindigkeit besitzen. Da wir mit einem Automobil nicht nur die geodätischen Kurven der Erde befahren wollen und zur Schonung des Gummis und aus anderen Gründen jedes Gleiten der Räder gern vermeiden, so müssen wir dafür sorgen, daß die beiden Hinterräder des Automobils verschiedener Umlaufsgeschwindigkeit fähig sind.

Die dritte Definition der geodätischen Linien als der „Geradesten" geht nicht von der inneren Geometrie der Fläche, sondern von ihrer Lagerung im Raum aus. Ein geodätischer Bogen besitzt nämlich in jedem seiner Punkte die kleinste Krümmung unter allen Flächenkurven, die mit dem geodätischen Bogen diesen Punkt und seine Tangente gemein haben. Durch diese Eigenschaft ist jede geodätische Linie in ihrem Gesamtverlauf bestimmt, wenn man einen ihrer Punkte und die zugehörige Richtung vorgibt. Man erhält diese Linie, indem man im vorgegebenen Punkt und in der vorgegebenen Richtung eine elastische gerade Stricknadel einspannt und in die Fläche hineinbiegt, so daß sie sich nur noch

[1] Auf der Außenseite eines konvexen Flächenstücks legt sich der Faden von selbst an die Fläche an; in anderen Fällen muß man anderweitig dafür sorgen, daß der Faden die Fläche nicht verläßt.

längs der Fläche bewegen kann. Da die Nadel jeder Verkrümmung ihren elastischen Widerstand entgegensetzt, wird sie die Gestalt einer geodätischen Linie annehmen.

Man kann die geradesten Linien auch durch die geometrische Forderung kennzeichnen, daß die Schmiegungsebene der Kurve stets durch die Flächennormale des Kurvenpunkts gehen soll. Man sieht anschaulich leicht ein, daß dann zwei infinitesimal benachbarte Kurventangenten den kleinsten auf der Fläche möglichen Winkel miteinander bilden. Das kommt aber auf die Bedingung der kleinsten Krümmung hinaus. Die Kennzeichnung durch die Schmiegungsebenen hat den geodätischen Linien ihren Namen gegeben. Mit Hilfe dieses Kriteriums werden von den Landmessern (Geodäten) die kürzesten Linien auf der Erdoberfläche abgesteckt.

Die geodätischen Linien der Kugel sind die größten Kreise. Denn deren Ebenen durchsetzen die Kugel senkrecht, und von jedem Punkt läuft in jeder Richtung ein Großkreis aus. Demnach sind alle geodätischen Linien der Kugel geschlossene Kurven. Durch diese Eigenschaft sind aber die Kugeln keineswegs gekennzeichnet; es gibt noch zahlreiche andere konvexe geschlossene Flächen, deren geodätische Linien ebenfalls sämtlich geschlossen sind[1].

Es liegt nahe, auch bei allen übrigen Flächen nach geschlossenen geodätischen Linien zu suchen. Besonders einfach verhalten sich die Rotationsflächen. Auf ihnen sind die Meridiane sämtlich geodätisch, weil ihre Ebene durch die Achse geht und daher die Fläche senkrecht durchsetzt (früher hatten wir bewiesen, daß die Meridiane auch Krümmungslinien der Fläche sind). Demnach besitzen alle geschlossenen Rotationsflächen eine einparametrige Schar geschlossener geodätischer Linien. Auf anderen Flächen laufen nur vereinzelte Linien dieser Art. So läßt sich zeigen, daß auf dem dreiachsigen Ellipsoid die einzigen geschlossenen geodätischen Linien die drei Ellipsen sind, in denen die Fläche von den drei Symmetrieebenen geschnitten wird.

Umgekehrt gilt der lange vermutete, aber erst kürzlich von LUSTERNIK und SCHNIRELMANN bewiesene Satz, daß auf jeder konvexen geschlossenen Fläche mindestens drei geschlossene geodätische Linien verlaufen.

Die geodätischen Linien sind von großer Bedeutung für die Physik. Ein Massenpunkt, auf den keine Kräfte wirken, der aber gezwungen ist, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben, bewegt sich immer auf einer geodätischen Linie der Fläche. Jede der von uns genannten Definitionen der geodätischen Linie führt zu einen Ansatz für die Gesetze der Punktmechanik; so entspricht die Definition der geodätischen Linie als der Kürzesten dem „JAKOBIschen Prinzip" der Mechanik, als Geradeste treten sie auf in dem GAUSS-HERTZschen „Prinzip des

[1] Als geschlossen bezeichnen wir eine geodätische Linie hier und im folgenden, wenn sie ohne Knick in sich zurückläuft, ohne sich vorher selbst zu durchschneiden.

kleinsten Zwanges", die Stellung der Schmiegungsebene kommt zum Ausdruck in den LAGRANGEschen Gleichungen erster Art.

Die geodätischen Linien stehen in einer eigenartigen Beziehung zur Theorie der Brennflächen und Krümmungslinien. Wir haben früher erwähnt, daß die Brennflächen von den Normalen der Ausgangsfläche berührt werden. Somit ist jedem Punkt der Brennfläche eine Richtung auf dieser Fläche zugeordnet; nämlich die Richtung derjenigen Normalen der Ausgangsfläche, die die Brennfläche gerade in diesem Punkt berührt. Wie im Falle der Krümmungs- und Asymptotenlinien läßt sich nun auf der Brennfläche dieses Richtungsfeld integrieren, d. h. man kann eine Schar von Kurven angeben, die in jedem Punkt die zugeordnete Richtung haben. Es zeigt sich, daß die so entstehende Kurvenschar aus geodätischen Linien besteht. Die Tangentenflächen dieser geodätischen Linien, die natürlich von Normalen der Ausgangsfläche erzeugt werden, treffen die Ausgangsfläche gerade in deren Krümmungslinien. Und zwar liefert jeder der beiden Teile der Brennfläche eine der beiden Scharen der Krümmungslinien.

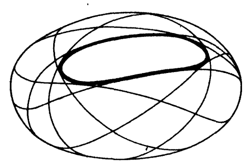

Abb. 230.

Wir haben früher erwähnt, daß zwei konfokale ungleichartige Flächen zweiter Ordnung sich stets als Brennfläche einer Fläche auffassen lassen. Diese Tatsache liefert uns ein Verfahren zur Auffindung aller geodätischen Linien des dreiachsigen Ellipsoids. Wir wählen zu dem gegebenen Ellipsoid E irgendein mit E konfokales Hyperboloid H. Diejenigen Geraden, die sowohl E als auch H berühren, bestimmen auf E ein Richtungsfeld, dessen Integralkurven nach dem eben erwähnten Satz alle geodätisch sind. Man hat auf diese Weise aber noch keineswegs alle geodätischen Linien von E erhalten, da ja durch jeden Punkt der Fläche in allen Richtungen geodätische Linien laufen, während wir diese Linien nur für ganz bestimmte Richtungen gefunden haben. Man kann die Schar der von uns vorläufig bestimmten geodätischen Linien von E leicht kennzeichnen: es läßt sich zeigen, daß es alle und nur diejenigen geodätischen Linien von E sind, die die Schnittkurve von E und H berühren (Abb. 230). Sie überdecken das Ellipsoid in ähnlicher Weise wie die Ebene von den Tangenten einer Ellipse überdeckt wird. Die Schnittkurve von E und H (die übrigens eine Krümmungslinie von E ist, wie wir früher erwähnten) trennt das Ellipsoid in verschiedene Teile. Der eine Teil bleibt unbedeckt, während durch jeden Punkt des anderen Teils zwei Kurven der Schar hindurchgehen.

Um nun alle geodätischen Linien von E zu erhalten, braucht man nur H alle ein- und zweischaligen Hyperboloide des durch E bestimmten konfokalen Systems durchlaufen zu lassen. Die Fokalhyperbel ist dabei als Grenzfall eines Hyperboloids anzusehen. Als Tangenten dieser ausgearteten Fläche hat man alle Geraden zu betrachten, die die Fokalhyperbel treffen. Die Fokalhyperbel schneidet E in den vier Nabelpunkten. Durch Grenzübergang aus dem Früheren erkennt man, daß die Schar der geodätischen Linien von E, die zur Fokalhyperbel gehört, aus allen und nur den geodätischen Linien besteht, die durch einen Nabelpunkt von E gehen[1]. Es ergibt sich ferner, daß jede durch einen Nabelpunkt gezogene geodätische Linie auch den diametral gegenüberliegenden Nabelpunkt von E durchläuft.

Auf der Kugel gehen die durch einen festen Punkt P gezogenen geodätischen Linien alle auch durch einen zweiten festen Punkt: den Diametralpunkt von P. Die geodätischen Linien durch einen Nabelpunkt des Ellipsoids zeigen ein analoges Verhalten. Dagegen läßt sich beweisen, daß die geodätischen Linien durch irgendeinen anderen festen Punkt des Ellipsoids nicht alle noch einen weiteren Punkt gemeinsam haben.

Es liegt nun die Frage nahe, ob die Kugel die einzige Fläche ist, bei der alle geodätischen Linien, die von einem beliebigen festen Punkt auslaufen, sich in einem zweiten festen Punkt wieder treffen. Diese Frage ist bis jetzt nicht beantwortet.

7. Die Kugel hat unter allen Körpern gleichen Volumens die kleinste Oberfläche und unter allen Körpern gleicher Oberfläche das größte Volumen.

Die Kugel ist durch beide Eigenschaften (deren jede eine Folge der anderen ist) eindeutig bestimmt. Der Nachweis dieser Tatsache führt auf ein Problem der Variationsrechnung und ist außerordentlich mühsam durchzuführen. Ein einfacher experimenteller Beweis wird aber durch jede frei schwebende Seifenblase gegeben. Wie wir schon anläßlich der Minimalflächen erwähnten, besitzt die Haut der Seifenblase infolge ihrer Oberflächenspannung das Bestreben, ihre Oberfläche auf ein möglichst kleines Maß zusammenzuziehen. Da sich andererseits in der Seifenblase ein bestimmtes unveränderliches Volumen Luft befindet, muß die Seifenblase ein Minimum der Oberfläche bei gegebenem Volumen annehmen. Die Beobachtung zeigt nun, daß derartige Seifenblasen stets Kugelgestalt besitzen, sofern sie nicht durch anhängende Tropfen wesentlich dem Einfluß der Schwere unterworfen sind.

8. Unter allen konvexen Körpern gleicher Oberfläche besitzt die Kugel das Minimum der totalen mittleren Krümmung.

Als mittlere Krümmung H eines Flächenpunkts bezeichnet man das arithmetische Mittel seiner Hauptkrümmungen:

$$H = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)\,.$$

Dabei sind die beiden Hauptkrümmungen mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen zu rechnen, je nachdem die Fläche im betrachteten

---

[1] Hiermit steht die auf S. 167 beschriebene Fadenkonstruktion in engem Zusammenhang.

Punkt konvexe oder sattelförmige Krümmung aufweist. Im Gegensatz zur GAUSSschen Krümmung bleibt die mittlere Krümmung bei Verbiegungen gewöhnlich nicht erhalten. Sie kennzeichnet daher in erster Linie die Lage der Fläche im Raum.

Ein Beispiel für die Bedeutung dieses Krümmungsbegriffs haben wir bereits in den Minimalflächen kennengelernt. Sie waren dadurch definiert, daß ihre Hauptkrümmungen in jedem Punkt entgegengesetzt gleich sind. Das besagt aber, daß ihre mittlere Krümmung überall verschwindet.

Um nun die *totale* mittlere Krümmung zu gewinnen, denke ich mir die betrachtete Fläche überall mit Masse von der Dichtigkeit der jeweiligen mittleren Krümmung belegt. Die Gesamtmasse, die auf diese Weise der ganzen Fläche zugeteilt ist, nennt man die totale mittlere Krümmung dieser Fläche.

Die Bestimmung der geschlossenen Flächen, deren totale mittlere Krümmung bei gegebener Oberfläche ein Minimum wird, führt wie die vorige Eigenschaft der Kugel auf ein Variationsproblem, und zwar ergibt sich auch hier, daß die Kugel die einzige Fläche ist, welche diese Eigenschaft besitzt.

Die beiden letztgenannten Eigenschaften der Kugel erhält man in der allgemeinen Theorie der konvexen Körper aus gewissen Ungleichungen, deren Prinzip hier wenigstens angedeutet sei. Eine Kugel vom Radius r besitzt die Oberfläche $O = 4\pi r^2$ und das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Um gleiche Dimensionen zu erhalten, müssen wir die dritte Potenz der Oberfläche mit der zweiten Potenz des Volumens vergleichen. Dies liefert die Relation

$$O^3 = 36\pi V^2,$$

die unabhängig vom Radius für jede Kugel gilt. Da die Kugel von allen Flächen derselben Oberfläche das größte Volumen besitzt, muß für alle übrigen Flächen gelten:

$$O^3 \geqq 36\pi V^2.$$

Bezeichnet man nun mit M die totale mittlere Krümmung einer Fläche, so lassen sich für alle konvexen Körper folgende beiden wichtigen Relationen beweisen:

$$1.\quad O^2 - 3VM \geqq 0,$$

$$2.\quad M^2 - 4\pi O \geqq 0.$$

In der zweiten Formel steht das Gleichheitszeichen allein für die Kugel. Das besagt aber gerade, daß unter allen konvexen Körpern gegebener Oberfläche die Kugel und nur sie den kleinsten Wert von M liefert. Indem man aus beiden Formeln M eliminiert, erhält man die soeben aufgestellte Beziehung zwischen Oberfläche und Volumen und erkennt, daß das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt. Dabei sind aber zum Vergleich nur konvexe Körper zugelassen, während in Wahrheit die Ungleichung zwischen Volumen und Oberfläche auch für nicht überall konvexe Körper gilt.

9. Die Kugel besitzt konstante mittlere Krümmung.

Daß die Kugel konstante mittlere Krümmung hat, folgt daraus, daß alle Normalschnitte denselben Krümmungsradius, nämlich den Kugelradius, besitzen. Die Kugel ist aber keineswegs die einzige Fläche dieser Art. Denn auf allen Minimalflächen ist die mittlere Krümmung Null, also ebenfalls konstant. Wie die Kugel und die Minimalflächen lassen sich auch alle übrigen Flächen konstanter mittlerer Krümmung durch Seifenblasen verwirklichen. Ich lege durch eine beliebige geschlossene Raumkurve eine feste Fläche und spanne außerdem eine Seifenblase über die Raumkurve. Um das auszuführen, gebe ich z. B. dem Rand eines Pfeifenkopfs die Gestalt der gegebenen Raumkurve, erzeuge mit dieser Pfeife eine Seifenblase und verschließe des Pfeifenrohr luftdicht. Dann wird von der Seifenhaut und der inneren Wandung der Pfeife eine feste Luftmenge eingeschlossen, und die Seifenhaut wird unter dem Einfluß der Oberflächenspannung diejenige Form annehmen, bei der die Oberfläche unter den gegebenen Verhältnissen ein Minimum ist. Die Variationsrechnung ergibt nun, daß jede solche Fläche konstante mittlere Krümmung besitzen muß. Der konstante Wert dieser Krümmung hängt davon ab, wie groß der durch mehr oder weniger starkes Einblasen regulierte Druck der eingeschlossenen Gasmenge ist. Ist dieser Druck überhaupt nicht größer als der äußere Luftdruck, so kommen wir auf den Fall der Minimalflächen zurück.

Wir haben also in unseren Seifenblasen eine große Anzahl der gesuchten Flächen vor uns. Alle diese Flächen haben aber die Eigenschaft, in der Raumkurve unvermittelt aufzuhören, d. h. einen Rand zu besitzen. Es entsteht daher die Frage, ob es außer der Kugel noch andere Flächen konstanter mittlerer Krümmung gibt, die keinen Rand haben und die auch im übrigen frei von Singularitäten sind. Es zeigt sich, daß diese Frage zu verneinen ist, daß also die Kugel durch unsere Zusatzforderungen eindeutig bestimmt wird. Man kann sich diese Tatsache an den Seifenblasen plausibel machen. Wir wissen bereits, daß die frei schwebende Seifenblase stets Kugelgestalt hat. Wenn wir nun Seifenblasen derselben Größe, aber mit immer kleineren Randkurven herstellen, so ist zu erwarten und wird durch das Experiment bestätigt, daß die Gestalt der Randkurve auf die Gestalt der Seifenblase immer weniger Einfluß hat und daß sich als Grenzfall stets die Gestalt der unberandeten Seifenblase, also die Kugel ergibt[1].

[1] Wenn man eine in einen Pfeifenkopf eingespannte Seifenhaut aufbläst, so könnte man meinen, daß dabei die mittlere Krümmung der Seifenblase beständig anwächst. Das ist ein Irrtum. Zunächst nimmt die mittlere Krümmung von dem zur Minimalfläche gehörenden Wert Null ausgehend in der Tat zu. Wenn man

10. Die Kugel besitzt konstante positive GAUSS*sche Krümmung.*

Über die Kennzeichnung der Kugel durch diese Eigenschaft gilt dasselbe wie bei der mittleren Krümmung. Die Konstanz der GAUSSschen Krümmung allein charakterisiert die Kugel sicher nicht. Denn alle Flächen, die ich aus einem Stück der Kugeloberfläche durch Verbiegung erhalte, besitzen ebenfalls konstante GAUSSsche Krümmung, da ja diese bei Verbiegungen nicht geändert wird. Wir nehmen nun wieder die Forderung hinzu, daß die Fläche weder einen Rand noch sonstige Singularitäten besitzen soll, und fragen, ob es außer der Kugel noch weitere Flächen dieser Art gibt. Es zeigt sich, daß diese Frage zu verneinen ist; daraus folgt unter anderen, daß die Kugel als Ganzes sich nicht verbiegen läßt. Man kann zunächst beweisen, daß eine singularitätenfreie unberandete Fläche konstanter positiver GAUSSscher Krümmung sich nicht wie die Ebene ins Unendliche erstrecken kann, sondern notwendig eine geschlossene Fläche wie die Kugel ist. Eine leichte Rechnung lehrt ferner, daß es außer den Kugeln und Ebenen keine Flächen gibt, für die beide Hauptkrümmungen überall konstante Werte haben. Demnach können wir uns auf den Fall beschränken, daß auf einer geschlossenen Fläche beide Hauptkrümmungen variieren, wobei natürlich ihr Produkt stets den vorgegebenen konstanten Wert der GAUSSschen Krümmung hat. Auf einer solchen Fläche müßte in mindestens einem regulären Punkt eine der Hauptkrümmungen ein Maximum annehmen. Nun läßt sich aber analytisch beweisen, daß ein solcher Punkt auf einem Flächenstück konstanter positiver Krümmung nicht vorkommen kann. Mit anderen Worten: Auf einem berandeten, nichtkugelförmigen Flächenstück konstanter positiver Krümmung gehören die Maxima der Hauptkrümmungen stets zu Punkten des Randes. Da nun die Kugeloberfläche keinen Rand besitzt, so folgt, daß die Kugel als Ganzes nicht verbogen werden kann, und daß es überhaupt außer den Kugeln keine unberandeten singularitätenfreien Flächen konstanter positiver GAUSSscher Krümmung gibt.

---

aber sehr stark aufbläst (und dabei von der Möglichkeit absieht, daß die Seifenblase zerplatzt), so wird die Seifenblase, wie sich aus der im Text ausgeführten Betrachtung ergibt, ungefähr die Gestalt einer sich stets vergrößernden Kugel annehmen; die mittlere Krümmung, die gleich dem reziproken Wert des Kugelradius ist, nimmt also unbegrenzt gegen Null ab. Zu hinreichend kleinen Werten c der mittleren Krümmung und zu einer bestimmten Randkurve gibt es demnach mindestens zwei durch die Kurve berandete Flächen der konstanten mittleren Krümmung c. Diese Erscheinung steht in bemerkenswertem Gegensatz zu vielen anderen Variationsproblemen, bei denen es stets nur eine einzige Extremalfläche gibt, die durch eine gegebene geschlossene Kurve berandet wird. Sieht man übrigens vom Vorzeichen der mittleren Krümmung ab, so erhält man durch dieselbe Randkurve noch zwei weitere Flächen derselben konstanten mittleren Krümmung; man kann diese Flächen durch Seifenblasen realisieren, indem man die ursprüngliche Minimalfläche von der anderen Seite her aufbläst.

Da es andererseits offenbar verbiegbare Kugelstücke gibt, so erhebt sich die Frage, ein wie großes Loch man in die Kugel schneiden muß, damit der Rest verbiegbar wird. Es wäre denkbar, daß so ein Loch eine gewisse Mindestgröße haben müßte, z. B. die einer Halbkugel. Es läßt sich aber beweisen, daß das Gegenteil zutrifft; die Kugel wird schon verbiegbar, wenn man ein beliebig kleines Loch hineinschneidet, es genügt sogar, die Kugel längs eines Großkreises ein beliebig kleines Stück lang aufzuschneiden. Dagegen ist es noch nicht bekannt, ob die Kugel auch dann schon verbiegbar wird, wenn man einen oder mehrere isoliert liegende Punkte fortläßt.

Daß eine Kugel verbiegbar wird, wenn ich ein beliebig kleines Loch hineinschneide, können wir in einen eigentümlichen Zusammenhang mit dem Verhalten der Seifenblasen bringen. Man kann nämlich analytisch leicht beweisen: Wenn ich von einem Flächenstück F der konstanten mittleren Krümmung c ausgehe und wenn ich auf allen Normalen von F die Strecke $1/2c$ nach einer bestimmten Seite hin abtrage, so besitzt die neue Fläche G, die von den Endpunkten aller dieser Strecken durchlaufen wird, zwar nicht konstante mittlere Krümmung, wohl aber die konstante GAUSSsche Krümmung $4c^2$. Man nennt G die Parallelfläche von F im Abstand $1/2c$. Ist bei diesem Verfahren F ein Kugelstück, so ist G das Stück einer mit F konzentrischen Kugel, und auch umgekehrt kann G nur dann ein Kugelstück sein, wenn auch F es ist. Man kann nämlich zeigen, daß die Normalen von F auch G in entsprechenden Punkten senkrecht durchschneiden. — Die Seite von F, nach der hin ich die Strecke auf der Normalen abtragen muß, ist nicht willkürlich; man kann die Vorschrift leicht präzisieren, wenn man sich F als Seifenblase über einem geschlossenen Pfeifenkopf denkt; man hat dann ins Innere des eingeschlossenen Luftraums zu gehen.

Nunmehr denke ich mir auf einer Kugel vom Radius $1/c$, also der mittleren Krümmung c eine kleine geschlossene Kurve R gezeichnet und diese Kurve stetig so deformiert, daß die deformierten Kurven nicht mehr auf Kugeln liegen. Es ist plausibel, daß ich bei nicht zu starker Deformation Seifenblasen der konstanten mittleren Krümmung c durch alle diese Kurven legen kann. Spanne ich nämlich durch die ursprüngliche Kurve R eine Seifenhaut, so kann ich sie, wenn ich sie gerade im richtigen Maße aufblase, sicher zu einer Fläche der mittleren Krümmung c machen; denn die Kugel, auf der R liegt, ist eine solche Fläche, und wenn ich von der richtigen Seite her aufblase, erhalte ich in einem bestimmten Stadium das größere von R begrenzte Kugelstück. Aus Stetigkeitsgründen folgt, daß ich bei geeigneter Luftzufuhr während der Deformation von R erreichen kann, daß die Seifenblase, die zuerst die Gestalt eines Kugelstücks hatte, bei der Deformation von R sich stetig mitändert und dabei den Wert der mittleren Krümmung beibehält; dagegen können die deformierten

Seifenblasen nicht mehr Kugelgestalt haben, weil die deformierten Randkurven gemäß unserer Konstruktion auf keiner Kugel liegen. Nunmehr konstruieren wir zu allen diesen Seifenblasen die inneren Parallelflächen im Abstand $1/2c$. Dann durchlaufen wir eine stetige Schar von Flächen, die nach dem früheren Satz sämtlich die konstante GAUSSsche Krümmung $4c^2$ haben. Die erste dieser Flächen ist eine Kugel vom Radius $1/2c$, in die ein kleines Loch geschnitten ist, das von einer zu R ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurve begrenzt wird. Alle übrigen Flächen sind in die erste stetig verbiegbar; sie können aber nicht Kugelgestalt haben, da nach dem früher erwähnten sonst auch die Seifenblasen Kugelgestalt haben müßten. Eine mit einem beliebig kleinen Loch versehene Kugel ist also in der Tat verbiegbar.

Die Verbiegbarkeit berandeter und unberandeter Flächen ist in viel allgemeineren Fällen untersucht worden. Unverbiegbar sind alle geschlossenen konvexen Flächen, z. B. die Ellipsoide. Ebenso sind unverbiegbar alle konvexen Flächen mit Rändern, falls die Fläche längs jeder Randkurve eine und dieselbe Tangentialebene besitzt; ein Beispiel einer solchen Fläche (mit zwei Rändern) ist der konvexe Teil der Torusfläche (vgl. Abb. 210, S. 177).

Schneidet man in eine geschlossene konvexe Fläche ein beliebig kleines Loch, so wird die Fläche verbiegbar. Es ist noch ungeklärt, ob es genügt, die Fläche aufzuschlitzen oder gar nur einzelne Punkte zu entfernen.

11. Die Kugel wird durch eine dreiparametrige Schar von Bewegungen in sich übergeführt.

Die Gesamtheit aller Bewegungen, die die Kugel mit sich selbst zur Deckung bringen, sind offenbar die Drehungen um den Kugelmittelpunkt. Diese Gesamtheit hängt nun in der Tat von drei Parametern ab. Denn zwei Parameter sind nötig, um die Stellung der (durch den Mittelpunkt gehenden, sonst beliebigen) Rotationsachse festzulegen, und einen dritten Parameter braucht man zur Bestimmung des Drehungswinkels. Man kann diese Abzählung auch nach einem anderen Gesichtspunkt durchführen. Offenbar läßt sich ein beliebiger Punkt der Kugel durch eine Bewegung der Schar in jeden anderen Kugelpunkt überführen und darüber hinaus eine durch den ersten Punkt laufende Richtung auf der Kugel in eine beliebige Richtung durch den Bildpunkt. Damit ist dann eine Abbildung aus unserer Schar eindeutig festgelegt. Diese Bestimmung erfordert aber gerade drei Parameter, denn der willkürlich gewählte Bildpunkt des ersten Punktes hängt von zwei Parametern ab, und die durch ihn laufenden Richtungen auf der Kugel bilden eine weitere einparametrige Schar.

Die zuletzt erwähnte Abzählung läßt sich nun nicht nur für die Kugel, sondern auch für die Ebene durchführen; also besitzt auch die Ebene eine dreiparametrige Schar von Bewegungen in sich. Weitere

Flächen dieser Art gibt es aber nicht, so daß die Eigenschaft die Kugeln und die Ebene kennzeichnet.

Wir fragen nun nach allen weiteren Flächen, die überhaupt eine Schar von Bewegungen in sich gestatten; diese Schar muß dann notwendig zwei- oder einparametrig sein. Die einzigen Flächen, die eine genau zweiparametrige Bewegungsschar gestatten, sind die Kreiszylinder. Eine beliebige Drehung um seine Achse und eine beliebige Translation längs der Achse führen den Kreiszylinder in sich über. Das ist eine zweiparametrige Schar von Bewegungen, und weitere Bewegungen, die den Kreiszylinder in sich überführen, gibt es nicht. Man kann durch eine dieser Bewegungen jeden Punkt des Kreiszylinders in jeden anderen überführen. Dagegen kann man die Richtungen nicht mehr willkürlich abbilden, da die erzeugenden Geraden des Zylinders durch unsere Bewegungen stets ineinander übergeführt werden.

Für Flächen mit genau einparametriger Bewegungsschar bilden die Rotationsflächen naheliegende Beispiele; diese Flächen gehen durch alle Drehungen um die Rotationsachse und (abgesehen von den Kugeln, der Ebene und den Kreiszylindern) nur durch diese Bewegungen in sich über. Jeder Punkt kann also in einen beliebigen Punkt seines Breitenkreises übergeführt werden, und dadurch ist die Abbildung dann festgelegt.

Mit den Rotationsflächen ist aber die Gesamtheit aller Flächen mit einparametriger Bewegungsschar keineswegs erschöpft. Die Flächenklasse, die durch diese Eigenschaft charakterisiert wird, besteht vielmehr aus den Schraubenflächen; diese Flächenklasse umfaßt die Rotationsflächen einerseits und die Zylinder andererseits als Grenzfälle. Wie schon S. 185 angegeben, kann man jede Schraubenfläche folgendermaßen erzeugen: Man geht von einer beliebigen Raumkurve aus, dreht sie mit beliebiger konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine beliebige feste Gerade und unterwirft sie außerdem einer Translation von konstanter Geschwindigkeit längs dieser Geraden. Aus der Definition geht hervor, daß die Schraubenflächen eine einparametrige Schar von Bewegungen in sich besitzen; nämlich dieselbe Schar von Bewegungen, die die Fläche aus der Raumkurve erzeugen. Die schon erwähnten Grenzfälle erhält man, wenn man entweder die Winkelgeschwindigkeit oder die Translationsgeschwindigkeit gleich Null setzt. Im ersten Fall wird die Schraubung zu einer Translation, und die Raumkurve beschreibt einen Zylinder; im zweiten Fall ergibt sich eine Drehung, und die Raumkurve erzeugt eine Rotationsfläche[1].

[1] Daß es außer den Schraubenflächen keine weiteren Flächen mit einparametriger Bewegungsschar gibt, folgt daraus, daß die Bewegungen einer Fläche in sich eine Gruppe bilden. Die Schraubungen um feste Achsen mit fester Ganghöhe bilden aber, wenn die Rotationen um die Achse und die Translationen längs der Achse wieder als Grenzfälle mitgerechnet werden, die allgemeinsten einparametrigen Bewegungsgruppen des Raums.

Ein einzelner Punkt der erzeugenden Kurve beschreibt (von den Grenzfällen abgesehen) eine Schraubenlinie. Durch die einparametrige Bewegungsschar der Schraubenfläche wird also jeder Punkt in einen beliebigen Punkt der zugehörigen Schraubenlinie übergeführt; in den Grenzfällen geht die Schraubenlinie in die Erzeugenden des Zylinders bzw. in die Breitenkreise der Rotationsfläche über.

§ 33. Verbiegungen von Flächen in sich.

Wir verallgemeinern jetzt die Frage, auf die uns die 11. Eigenschaft der Kugel geführt hat. Wir wollen die Flächen betrachten, die, anstatt Bewegungen, beliebige Verbiegungen in sich gestatten. Ein vollkommen biegsames, aber undehnbares Stück Messingblech, das auf ein Modell einer solchen Fläche an irgendeiner Stelle glatt aufgelegt werden kann, muß sich in passender Weise über das Modell hinschieben lassen; es darf dabei seine Form ändern, aber nicht zerreißen, und nicht aufhören, glatt auf der Fläche aufzuliegen.

Während die Beweglichkeit einer Fläche in sich von der Lage der Fläche im Raum abhängt, ist die Verbiegbarkeit der Fläche in sich eine innere Eigenschaft der Fläche, die weder zerstört noch gewonnen werden kann, wenn man die Fläche verbiegt.

Da die Bewegungen einen Sonderfall der Verbiegungen darstellen, müssen unter den Flächen, die wir jetzt suchen, jedenfalls alle die vorkommen, die wir im vorigen Abschnitt aufgezählt haben. Es zeigt sich nun, daß jene Flächen und ihre Biegungsflächen schon die allgemeinsten sind, die Scharen von Verbiegungen in sich gestatten; man erhält also durch die Verallgemeinerung der Fragestellung keine wesentlich neue Flächenklasse. Aber die vorher aufgestellten Typen erhalten jetzt eine andere Bedeutung. So sind offenbar die Zylinder nicht als wesentlich verschieden von der Ebene anzusehen, da ja die Ebene sich in jeden Zylinder verbiegen läßt. Ebenso verliert auch der zweite Grenzfall der Schraubenflächen, der Fall der Rotationsflächen, seinen Sondercharakter. Man kann nämlich ein Stück einer beliebigen Schraubenfläche stets in ein Stück einer Rotationsfläche verbiegen. Es genügt zu diesem Zweck, einer der auf der Schraubenfläche verlaufenden Schraubenlinien durch die Verbiegung die Gestalt eines Kreises zu geben, der natürlich unendlich oft umlaufen werden muß, da ja die Schraubenlinie unendlich lang ist. Dann nehmen die übrigen Schraubenlinien von selbst ebenfalls Kreisgestalt an, und alle diese Kreise haben dieselbe Achse, so daß die entstandene Fläche in der Tat eine Rotationsfläche ist, deren Breitenkreise aus den Schraubenlinien der Ausgangsfläche hervorgegangen sind. Ein Beispiel der Behauptung ist die auf S. 185, 186 beschriebene Abwicklung der Wendelfläche auf das Katenoid.

Wenn man von der analytischen Beweisführung absieht, läßt sich leicht anschaulich plausibel machen, warum die Flächen, die eine