Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0045

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

Ein einzelner Punkt der erzeugenden Kurve beschreibt (von den Grenzfällen abgesehen) eine Schraubenlinie. Durch die einparametrige Bewegungsschar der Schraubenfläche wird also jeder Punkt in einen beliebigen Punkt der zugehörigen Schraubenlinie übergeführt; in den Grenzfällen geht die Schraubenlinie in die Erzeugenden des Zylinders bzw. in die Breitenkreise der Rotationsfläche über.

§ 33. Verbiegungen von Flächen in sich.

Wir verallgemeinern jetzt die Frage, auf die uns die 11. Eigenschaft der Kugel geführt hat. Wir wollen die Flächen betrachten, die, anstatt Bewegungen, beliebige Verbiegungen in sich gestatten. Ein vollkommen biegsames, aber undehnbares Stück Messingblech, das auf ein Modell einer solchen Fläche an irgendeiner Stelle glatt aufgelegt werden kann, muß sich in passender Weise über das Modell hinschieben lassen; es darf dabei seine Form ändern, aber nicht zerreißen, und nicht aufhören, glatt auf der Fläche aufzuliegen.

Während die Beweglichkeit einer Fläche in sich von der Lage der Fläche im Raum abhängt, ist die Verbiegbarkeit der Fläche in sich eine innere Eigenschaft der Fläche, die weder zerstört noch gewonnen werden kann, wenn man die Fläche verbiegt.

Da die Bewegungen einen Sonderfall der Verbiegungen darstellen, müssen unter den Flächen, die wir jetzt suchen, jedenfalls alle die vorkommen, die wir im vorigen Abschnitt aufgezählt haben. Es zeigt sich nun, daß jene Flächen und ihre Biegungsflächen schon die allgemeinsten sind, die Scharen von Verbiegungen in sich gestatten; man erhält also durch die Verallgemeinerung der Fragestellung keine wesentlich neue Flächenklasse. Aber die vorher aufgestellten Typen erhalten jetzt eine andere Bedeutung. So sind offenbar die Zylinder nicht als wesentlich verschieden von der Ebene anzusehen, da ja die Ebene sich in jeden Zylinder verbiegen läßt. Ebenso verliert auch der zweite Grenzfall der Schraubenflächen, der Fall der Rotationsflächen, seinen Sondercharakter. Man kann nämlich ein Stück einer beliebigen Schraubenfläche stets in ein Stück einer Rotationsfläche verbiegen. Es genügt zu diesem Zweck, einer der auf der Schraubenfläche verlaufenden Schraubenlinien durch die Verbiegung die Gestalt eines Kreises zu geben, der natürlich unendlich oft umlaufen werden muß, da ja die Schraubenlinie unendlich lang ist. Dann nehmen die übrigen Schraubenlinien von selbst ebenfalls Kreisgestalt an, und alle diese Kreise haben dieselbe Achse, so daß die entstandene Fläche in der Tat eine Rotationsfläche ist, deren Breitenkreise aus den Schraubenlinien der Ausgangsfläche hervorgegangen sind. Ein Beispiel der Behauptung ist die auf S. 185, 186 beschriebene Abwicklung der Wendelfläche auf das Katenoid.

Wenn man von der analytischen Beweisführung absieht, läßt sich leicht anschaulich plausibel machen, warum die Flächen, die eine einparametrige Schar von Verbiegungen in sich gestatten, sich stets in die Gestalt von Schrauben- oder Rotationsflächen bringen lassen und warum dabei die Schraubenlinien und die Breitenkreise einander entsprechen.

Durch jeden Punkt eines solchen Flächenstücks muß nämlich eine Kurve laufen, die die Gesamtheit aller Bildpunkte dieses Punkts darstellt, wenn man die sämtlichen Verbiegungen unserer Schar ausführt. Das Flächenstück wird also einfach und lückenlos von einer bestimmten Kurvenschar überdeckt, die bei den betrachteten Verbiegungen in sich übergeht. Greift man zwei beliebige Kurven dieser Schar heraus, so müssen alle Punkte der einen Kurve den gleichen geodätischen Abstand von der anderen Kurve haben, da ja dieser Abstand durch die Verbiegung nicht geändert wird. Hieraus ergibt sich, daß jede geodätische Linie, die auf einer Kurve der Schar senkrecht steht, auch alle übrigen Scharkurven senkrecht schneidet; denn der kürzeste Abstand eines Flächenpunkts von einer Flächenkurve wird längs der Fläche durch die geodätische Linie gegeben, die durch den Punkt geht und auf der Kurve senkrecht steht. Auf den von uns betrachteten Flächen existiert also stets ein orthogonales Kurvennetz, dessen eine Schar die zuerst beschriebene ist, während die zweite aus geodätischen Linien besteht. Längs jeder Kurve der ersten Schar muß überdies die GAUSSsche Krümmung konstant sein, da ja diese bei Verbiegung ungeändert bleibt und jeder Punkt einer Scharkurve durch die von uns betrachteten Verbiegungen in jeden anderen Punkt derselben Scharkurve übergehen kann. Um die Werteverteilung der GAUSSschen Krümmung auf unserer Fläche zu beschreiben, genügt es also, diese Krümmung längs einer geodätischen Linie der zweiten Schar als Funktion der Bogenlänge anzugeben.

Nun kann man aber leicht Rotationsflächen konstruieren, für die die GAUSSsche Krümmung eine vorgeschriebene Funktion der Bogenlänge eines Meridians ist. Da die Meridiane der Rotationsflächen geodätische Linien sind, die die Breitenkreise senkrecht schneiden, so ist es plausibel und wird durch die Rechnung bestätigt, daß unser vorgegebenes Flächenstück sich in alle jene Rotationsflächen verbiegen läßt; das von uns konstruierte Orthogonalnetz des Flächenstücks wird dabei in das Netz der Meridiane und Breitenkreise verwandelt.

Auf den Schraubenflächen haben offenbar die Schraubenlinien die entsprechende Eigenschaft wie die Breitenkreise der Rotationsflächen. Es sind wiederum die Bahnkurven der längentreuen Abbildungen der Fläche in sich. Wenn also überhaupt eine Schraubenfläche in eine Rotationsfläche verbogen werden kann, so müssen notwendig die Schraubenlinien und die Breitenkreise einander entsprechen.

Die Rechnung ergibt, daß aus jeder Schraubenfläche eine zweiparametrige Schar weiterer Schraubenflächen und eine einparametrige Schar von Rotationsflächen durch Verbiegung erhalten werden können.

Wir betrachten nun die Flächen, die eine zwei- oder mehrparametrige Schar von Verbiegungen in sich gestatten. Daß die Schar der Verbiegungen mindestens zweiparametrig ist, ist gleichbedeutend damit, daß jeder Punkt der Fläche in jeden Nachbarpunkt übergeführt werden kann. Daher muß die GAUSSsche Krümmung dieser Flächen konstant sein. Alle Flächen positiver GAUSSscher Krümmung sind nun (wenn man sich auf hinreichend kleine Stücke beschränkt) auf die Kugel abwickelbar (S. 181). Wie diese besitzen sie also nicht nur eine zwei-, sondern sogar eine dreiparametrige Schar von Verbiegungen in sich. Das Entsprechende gilt für Flächen verschwindender GAUSSscher Krümmung, denn diese sind auf die Ebene abwickelbar. Es läßt sich analytisch zeigen, daß auch die Flächen konstanter negativer Krümmung die gleiche Mannigfaltigkeit von Verbiegungen in sich gestatten.

Alle Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung haben also mit der Ebene eine wichtige innere Eigenschaft gemein, die wir im folgenden ausführlich untersuchen werden. Man kann die ebene Geometrie so aufbauen, daß ihre grundlegenden und allgemeinsten Aussagen nicht nur in der Ebene, sondern auf allen Flächen konstanter Krümmung gelten und daß erst an einer höheren Stelle des Aufbaus zwischen der Ebene und den Flächen positiver oder negativer konstanter GAUSSscher Krümmung unterschieden wird; dann teilt sich die Geometrie in die euklidische und zwei „nichteuklidische" Geometrien.

§ 34. Elliptische Geometrie.

Auf krummen Flächen sind die geodätischen Linien als das Analogon der Geraden in der Ebene anzusehen. Wir wollen jetzt diese Analogie genauer untersuchen. Die einfachsten Konstruktionen der ebenen Geometrie beruhen auf dem Zeichnen von Geraden und dem Abtragen von Strecken und Winkeln. Wenn wir solche Konstruktionen auf krumme Flächen übertragen wollen, besteht zunächst ein prinzipieller Unterschied: Die Ebene haben wir stets in ihrer Gesamterstreckung zugrunde gelegt, dagegen haben wir auf allgemeinen krummen Flächen stets nur kleine Stücke betrachtet, dem differentialgeometrischen Standpunkt gemäß. Demnach müssen wir uns auf solche Konstruktionen beschränken, die nicht über die Grenzen des Flächenstücks hinausführen, die also der Betrachtung eines kleinen Teilgebiets in der Ebene entsprechen.

Auf einem hinreichend kleinen Stück einer krummen Fläche lassen sich zwei dem Rand nicht zu nahe gelegene Punkte durch einen und nur einen geodätischen Bogen verbinden, so wie in jedem Teilgebiet der Ebene zwei dem Rand nicht zu nahe gelegene Punkte genau eine im Teilgebiet verlaufende geradlinige Verbindung besitzen[1].

[1] Wenn der Rand nicht überall nach innen konkav ist, kann die Verbindungsstrecke zweier dem Rand hinreichend benachbarter Punkte teilweise durch das Äußere des Gebiets gehen.