Wir betrachten nun die Flächen, die eine zwei- oder mehrparametrige Schar von Verbiegungen in sich gestatten. Daß die Schar der Verbiegungen mindestens zweiparametrig ist, ist gleichbedeutend damit, daß jeder Punkt der Fläche in jeden Nachbarpunkt übergeführt werden kann. Daher muß die GAUSSsche Krümmung dieser Flächen konstant sein. Alle Flächen positiver GAUSSscher Krümmung sind nun (wenn man sich auf hinreichend kleine Stücke beschränkt) auf die Kugel abwickelbar (S. 181). Wie diese besitzen sie also nicht nur eine zwei-, sondern sogar eine dreiparametrige Schar von Verbiegungen in sich. Das Entsprechende gilt für Flächen verschwindender GAUSSscher Krümmung, denn diese sind auf die Ebene abwickelbar. Es läßt sich analytisch zeigen, daß auch die Flächen konstanter negativer Krümmung die gleiche Mannigfaltigkeit von Verbiegungen in sich gestatten.

Alle Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung haben also mit der Ebene eine wichtige innere Eigenschaft gemein, die wir im folgenden ausführlich untersuchen werden. Man kann die ebene Geometrie so aufbauen, daß ihre grundlegenden und allgemeinsten Aussagen nicht nur in der Ebene, sondern auf allen Flächen konstanter Krümmung gelten und daß erst an einer höheren Stelle des Aufbaus zwischen der Ebene und den Flächen positiver oder negativer konstanter GAUSSscher Krümmung unterschieden wird; dann teilt sich die Geometrie in die euklidische und zwei „nichteuklidische“ Geometrien.

§ 34. Elliptische Geometrie.

Auf krummen Flächen sind die geodätischen Linien als das Analogon der Geraden in der Ebene anzusehen. Wir wollen jetzt diese Analogie genauer untersuchen. Die einfachsten Konstruktionen der ebenen Geometrie beruhen auf dem Zeichnen von Geraden und dem Abtragen von Strecken und Winkeln. Wenn wir solche Konstruktionen auf krumme Flächen übertragen wollen, besteht zunächst ein prinzipieller Unterschied: Die Ebene haben wir stets in ihrer Gesamterstreckung zugrunde gelegt, dagegen haben wir auf allgemeinen krummen Flächen stets nur kleine Stücke betrachtet, dem differentialgeometrischen Standpunkt gemäß. Demnach müssen wir uns auf solche Konstruktionen beschränken, die nicht über die Grenzen des Flächenstücks hinausführen, die also der Betrachtung eines kleinen Teilgebiets in der Ebene entsprechen.

Auf einem hinreichend kleinen Stück einer krummen Fläche lassen sich zwei dem Rand nicht zu nahe gelegene Punkte durch einen und nur einen geodätischen Bogen verbinden, so wie in jedem Teilgebiet der Ebene zwei dem Rand nicht zu nahe gelegene Punkte genau eine im Teilgebiet verlaufende geradlinige Verbindung besitzen[1].

[1] Wenn der Rand nicht überall nach innen konkav ist, kann die Verbindungsstrecke zweier dem Rand hinreichend benachbarter Punkte teilweise durch das Äußere des Gebiets gehen.

Winkel mit geodätischen Schenkeln können auf jedem Flächenstück in der gleichen Weise gezeichnet und abgetragen werden wie Winkel mit geradlinigen Schenkeln in einem Stück der Ebene.

Auch das Abtragen von geodätischen Strecken unterliegt denselben Gesetzen wie das Abtragen geradliniger Strecken in einem Stück der Ebene.

Aber schon bei einer der einfachsten Konstruktionen, die aus diesen drei Schritten besteht, hört die Analogie im allgemeinen auf; nämlich bei der Konstruktion kongruenter Dreiecke. Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn bei einer bestimmten Zuordnung der Ecken entsprechende Seiten und Winkel gleich sind. Dieser Begriff ist offenbar auf geodätische Dreiecke in einem krummen Flächenstück übertragbar. Wenn ich nun in einem Stück der Ebene von einem Dreieck $A_0B_0C_0$ ausgehe und zu einem Punkt A zwei Punkte B und C so konstruiere, daß $AB = A_0B_0$, $AC = A_0C_0$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_0A_0C_0$ ausfällt, so ist nach dem ersten Kongruenzsatz das Dreieck ABC dem Dreieck $A_0B_0C_0$ kongruent; dabei ist nur vorauszusetzen, daß der Punkt A so weit vom Rand des Gebiets entfernt liegt, daß alle Konstruktionen im Gebiet möglich sind.

Wenn ich aber die analoge Konstruktion in einem krummen Flächenstück vornehme, so wird der geodätische Bogen BC im allgemeinen eine andere Länge haben als B_0C_0. Von der Kongruenz der beiden Dreiecke ABC und $A_0B_0C_0$ ist also keine Rede.

In einem Fall ist jedoch der erste Kongruenzsatz auf geodätische Konstruktionen übertragbar; wenn nämlich das Flächenstück konstante Gausssche Krümmung hat. Dann können wir das Flächenstück so in sich verbiegen, daß A_0 auf A fällt und daß die geodätischen Schenkel des Winkels $B_0A_0C_0$ auf die entsprechenden Schenkel des Winkels BAC fallen[1]. Wegen der Längen- und Winkeltreue der Verbiegung fällt also B_0 auf B und C_0 auf C; die Dreiecke $A_0B_0C_0$ und ABC müssen demnach kongruent sein.

Die axiomatische Analyse der ebenen geometrischen Konstruktionen lehrt nun, daß alle Sätze über Kongruenz von Figuren logisch auf den ersten Kongruenzsatz zurückführbar sind. Auf Flächen konstanter Krümmung besteht deshalb hinsichtlich der zu Beginn genannten Konstruktionen vollständige Analogie zur Geometrie in einem Stück der Ebene.

Wir haben den ersten Kongruenzsatz dadurch auf Flächen konstanter Krümmung übertragen, daß wir an deren dreiparametrige

[1] Durch *stetige* Transformation ist das nicht immer möglich; auch nicht in der Ebene, wo bekanntlich auch *Spiegelungen* als Deckbewegungen mitgerechnet werden müssen. Auch auf den Flächen konstanter nichtverschwindender Krümmung existieren längentreue Abbildungen, die den Spiegelungen entsprechen. Vgl. S. 226, Fußonte.

Biegungsgruppe anknüpften. Man kann den Zusammenhang aber logisch umkehren. Wenn auf einer Fläche der erste Kongruenzsatz für geodätische Dreiecke gilt, so folgt, daß die Fläche eine dreiparametrige Schar längentreuer Abbildungen auf sich gestatten und daher von konstanter GAUSSscher Krümmung sein muß. Zunächst folgt nämlich aus der oben beschriebenen Dreieckskonstruktion, daß man zu einem hinreichend kleinen geodätischen Dreieck stets ∞^3 kongruente Dreiecke zeichnen kann. Nun kann man aber die Fläche unter Zugrundelegung eines Dreiecks durch Abtragung von Strecken und Winkeln und wiederholte Anwendung des ersten Kongruenzsatzes vollständig vermessen nach den gleichen Prinzipien, die in der Praxis der Erdvermessung verwandt werden. Jeder kongruenten Abtragung des Grunddreiecks entspricht daher eine längentreue Abbildung des Flächenstücks.

Damit ist gezeigt, daß die Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung die einzigen sind, auf denen der erste Kongruenzsatz für geodätische Dreiecke allgemein gilt.

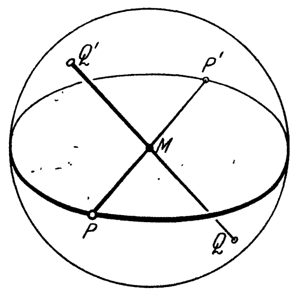

Abb. 231.

Um die Analogie dieser Flächen mit der Ebene weiter zu verfolgen, wollen wir jetzt die Beschränkung auf kleine Teilgebiete aufzuheben suchen. Wir beginnen mit Flächen, deren (konstante) GAUSSsche Krümmung positiv ist. Es liegt nahe, von einer Kugelfläche auszugehen. Dadurch aber, daß wir diese Fläche als Ganzes betrachten, wird die Analogie zur Ebene in einem entscheidenden Punkte zerstört. Die geodätischen Linien der Kugel sind die Großkreise; durch zwei Diametralpunkte auf der Kugel gehen nun unendlich viele Großkreise, während in der Ebene zwei Punkte eine einzige Verbindungsgerade haben. Während ferner in der Ebene zwei Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben, schneiden sich zwei Großkreise der Kugel stets in zwei (diametralen) Punkten. Eine andere Fläche konstanter positiver Krümmung als die Kugelfläche können wir aber schon deshalb nicht als Analogon der Ebene ansehen, weil alle jene Flächen singuläre Punkte oder Ränder haben (vgl. S. 201).

Durch eine einfache Abstraktion können wir aber die störende Eigenschaft der Kugelfläche beseitigen. Wir beschränken uns nämlich auf die Fläche einer Halbkugel und sehen jedes Paar von Diametralpunkten des berandenden Großkreises als je einen einzigen Punkt an. Wenn ferner eine sphärische Figur über den Randkreis herausragt, so wollen wir die ins Äußere fallenden Punkte durch ihre Diametralpunkte ersetzen; diese fallen dann auf die betrachtete Halbkugel (Abb. 231).

Auf diese Weise erhalten wir ein Punktgebilde, das alle Eigenschaften hat, auf die wir ausgingen. Erstens ist jedes hinreichend kleine Teilstück längentreu auf ein Stück der Kugelfläche bezogen. Zweitens wird das Abtragen von Strecken und das geodätische Verbinden zweier Punkte durch keinen Rand gestört. Drittens besitzen zwei verschiedene Punkte stets eine einzige geodätische Verbindung, und zwei geodätische Bögen haben niemals mehr als einen Schnittpunkt; beides folgt daraus, daß die Paare von Diametralpunkten, die unser Gebilde enthält, sämtlich als je ein Punkt angesehen wurden.

Das Analogon der ebenen Geometrie, das auf diesem Flächenmodell herrscht, nennt man *elliptische Geometrie*, die Fläche selbst wird als Modell der *elliptischen Ebene* bezeichnet. Ein zweites Modell der elliptischen Ebene erhält man offenbar, wenn man von der vollständigen Kugeloberfläche ausgeht und jedes Diametralpunktepaar als einen einzigen Punkt ansieht.

Wir untersuchen nun die elliptische Geometrie, wobei wir die Großkreise kurz als Geraden und die Großkreisbögen als Strecken bezeichnen. Dann springen zwei Unterschiede der elliptischen Geometrie von der gewöhnlichen euklidischen Geometrie ins Auge. Erstens sind die elliptischen Geraden geschlossene Kurven, während sich die euklidischen Geraden ins Unendliche erstrecken. Zweitens haben zwei elliptische Geraden stets einen Schnittpunkt, während es zu jeder euklidischen Geraden Parallelen, also nichtschneidende Geraden gibt.

Vollständig läßt sich die Beziehung der elliptischen zur euklidischen Geometrie nur überblicken, wenn man von den Axiomen der euklidischen ebenen Geometrie ausgeht und bei jedem Axiom nachsieht, ob es auch in der elliptischen Geometrie erfüllt ist oder ob es durch ein abgeändertes Axiom ersetzt werden muß. Wir haben schon früher die Axiome der Verknüpfung (S. 103) und der Stetigkeit (S. 115) erwähnt. Im ganzen läßt sich die euklidische ebene Geometrie auf fünf Axiomgruppen aufbauen, denen der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz, der Parallelen und der Stetigkeit. Jeder Axiomgruppe liegen gewisse Begriffe zugrunde, denen der Verknüpfung z. B. die Begriffe: Punkt, Gerade und Incidenz. Weitere Begriffe werden durch gewisse Axiome ihrerseits erst ermöglicht, z. B. der Begriff der Strecke oder der Halbgeraden durch die Axiome der Anordnung. Der Begriff der Strecke wiederum bildet die Grundlage der Kongruenzaxiome, so daß also die Kongruenzaxiome zu ihrer Formulierung gewisse Anordnungsaxiome voraussetzen. Wir wollen jetzt die Axiome der euklidischen ebenen Geometrie anführen[1].

I. Axiome der Verknüpfung.

1. Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade. 2. Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte. 3. Es gibt mindestens drei Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen.

---

[1] Vgl. Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930.

II. Axiome der Anordnung.

1. Unter drei Punkten einer Geraden liegt genau einer zwischen beiden anderen. 2. Zu zwei Punkten A und B gibt es mindestens einen solchen Punkt C, daß B zwischen A und C liegt. 3. Wenn eine Gerade eine Seite eines Dreiecks schneidet (d. h. einen Punkt enthält, der zwischen zwei Ecken liegt), so geht sie entweder durch den gegenüberliegenden Eckpunkt, oder sie schneidet noch eine Seite.

Die Anordnungsaxiome gestatten, die in den folgenden Axiomen auftretenden Begriffe „Strecke", „Winkel", „Seite einer Geraden von einem Punkte aus", „Halbgerade", „Seite einer Ebene von einer Halbgeraden aus" zu definieren.

III. Axiome der Kongruenz.

1. Eine Strecke läßt sich auf einer Geraden von einem Punkt der Geraden aus stets nach beiden Seiten abtragen; die entstehende Strecke heißt der ersten kongruent. 2. Sind zwei Strecken einer dritten kongruent, so sind sie auch einander kongruent. 3. Wenn auf zwei kongruenten Strecken je ein Punkt derart liegt, daß eine der entstehenden Teilstrecken der einen Strecke einer der Teilstrecken der anderen kongruent ist, so ist auch die zweite Teilstrecke der einen kongruent der zweiten Teilstrecke der anderen. 4. Ein Winkel läßt sich an einen Halbstrahl nach jeder Seite der Ebene hin in eindeutiger Weise abtragen; der entstehende Winkel heißt dem ersten kongruent. 5. (Erster Kongruenzsatz.) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

IV. Parallelenaxiom.

Zu einer Geraden a gibt es durch jeden Punkt, der nicht auf a liegt, genau eine Gerade, die a nicht schneidet.

V. Axiome der Stetigkeit.

Diese Axiome werden sehr verschieden formuliert. Sie besagen in jedem Fall etwa:

1. (*Archimedisches Axiom,* vgl. S. 115.) *Jede Strecke läßt sich durch jede andere messen. 2.* (*Cantorsches Axiom.*) *In jeder unendlichen Folge ineinandergeschalteter Strecken gibt es stets einen allen diesen Strecken gemeinsamen Punkt.*

In der elliptischen Geometrie sind die Verknüpfungsaxiome offenbar erfüllt. Dagegen sind die Anordnungsaxiome nicht erfüllt; denn da die Geraden geschlossene Kurven sind wie Kreise, läßt sich nicht sagen, von drei Punkten einer Geraden liege genau einer zwischen den beiden anderen. Statt der *Zwischen*beziehung dreier Punkte läßt sich aber in der elliptischen Geometrie eine *Trennungs*beziehung vierer Punkte einführen, für die dann ganz entsprechende Anordnungsaxiome gelten, deren erstes hier angeführt sei: *Vier Punkte einer Geraden zerfallen stets* *auf genau eine Weise in zwei einander trennende Paare.* (Z. B. zerfallen in Abb. 232 die Punkte A, B, C, D in die einander trennenden Paare AC und BD.)

Wie die euklidischen so führen auch die elliptischen Anordnungsaxiome zur Definition der Strecke und der anderen Begriffe, die in den Kongruenzaxiomen verwandt werden. Man muß aber davon ausgehen, daß zwei Punkte AB stets zwei Strecken und nicht bloß eine bestimmen, ebenso wie jeder Kreis durch zwei seiner Punkte in zwei Bögen zerfällt. Erst durch Hinzunahme eines dritten Punktes C der Geraden AB läßt sich eine Unterscheidung der beiden Strecken AB herbeiführen; die eine Strecke besteht aus allen Punkten, die durch AB von C getrennt werden, die andere aus den übrigen Punkten der Geraden AB. Ferner muß man überstumpfe Winkel als Innenwinkel eines Dreiecks ausschließen, weil sonst durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel nicht ein einziges Dreieck, sondern zwei inkongruente Dreiecke bestimmt werden (Abb. 233), was dem ersten Kongruenzsatz widerspricht. Es zeigt sich, daß bei diesen Einschränkungen in jedem hinreichend kleinen Teilgebiet der elliptischen Ebene die Analogie zu einem Teilgebiet der euklidischen Ebene, von der wir ausgegangen waren, erhalten bleibt, und daß die euklidischen Kongruenzaxiome in der elliptischen Ebene ihre Geltung behalten. Das gleiche gilt von den Stetigkeitsaxiomen.

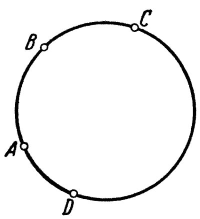

Abb. 232.

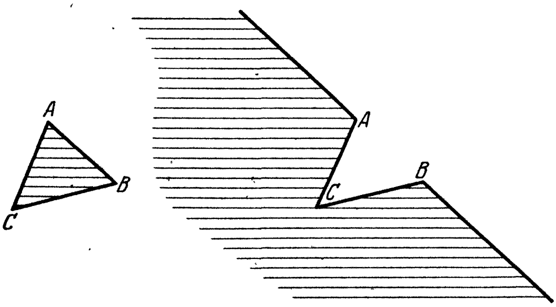

Abb. 233.

Dagegen gilt das Parallelenaxiom nicht, sondern ist durch das schon S. 103 aufgestellte Verknüpfungsaxiom der projektiven Ebene zu ersetzen: Zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

Auch hinsichtlich der Anordnung verhält sich die elliptische Ebene wie die projektive. Um das anschaulich in Evidenz zu setzen, wählen wir als Modell der elliptischen Ebene die vollständige Kugeloberfläche, auf der alle Diametralpunktepaare identifiziert sind; projizieren wir die Kugel von ihrem Mittelpunkt aus auf eine Ebene, so entspricht jeder Punkt der Ebene einem Diametralpunktepaar der Kugel, also einem Punkt der elliptischen Ebene. Jedem Großkreis, also jeder elliptischen Geraden, entspricht eine Gerade der Bildebene. Die Beziehung wird umkehrbar eindeutig, wenn wir die unendlich ferne Gerade der Bildebene hinzunehmen, wenn wir also diese Ebene als projektive Ebene auffassen.

Wir können demnach die projektive Ebene direkt als ein Modell der elliptischen Ebene ansehen, wenn wir die Gleichheit von Längen und Winkeln in diesem Modell nicht euklidisch, sondern in der angedeuteten Art durch die sphärische Trigonometrie einer Hilfskugel bestimmen. Hieraus folgt, daß in der elliptischen Geometrie alle Schnittpunktssätze der projektiven Geometrie, z. B. die von DESARGUES und PASCAL, gelten.

Wenn wir nun die längentreuen Abbildungen der elliptischen Ebene ins Auge fassen, so können wir wie im euklidischen Fall nach den diskontinuierlichen Gruppen solcher Abbildungen fragen. Jeder solchen Gruppe entspricht eine diskontinuierliche Gruppe längentreuer Abbildungen der Kugelfläche, also eines der regulären Polyeder, die wir in § 13, 14 behandelt haben. Umgekehrt führt jedes reguläre Polyeder zu einer diskontinuierlichen Deckgruppe der elliptischen Ebene, und die Zentralprojektionen regulärer Polyeder, die in Abb. 160 bis 163 und 165 bis 168 dargestellt sind, geben einige Lösungen der mit jenen Gruppen zusammenhängenden Aufgabe der „Pflasterung", die S. 72 für die euklidische Ebene formuliert ist.

Man kann nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raum die elliptische Geometrie definieren. Als Modell der Punkte, Geraden und Ebenen dieses Raums läßt sich der projektive Raum mit seinen Punkten und Geraden verwenden. Die Vergleichung der Längen und Winkel hat wieder abweichend von der euklidischen Geometrie zu erfolgen und läßt sich nur analytisch beschreiben; z. B. durch Zentralprojektion einer Hyperkugel des vierdimensionalen Raums. Die diskontinuierlichen Deckgruppen des elliptischen Raums hängen mit den regulären Zellen des vierdimensionalen Raums zusammen, und die Abb. 173 bis 176 lassen sich als „Pflasterungen" des elliptischen Raums deuten.

§ 35. Hyperbolische Geometrie; ihr Verhältnis zur euklidischen und elliptischen Geometrie.

Wir wenden uns jetzt zu den Flächen konstanter negativer Krümmung. Es gibt unter ihnen keine von so einfacher Gestalt wie die Kugelfläche. Die Rotationsflächen dieser Art können drei verschiedene Gestalten haben, die in Abb. 234 dargestellt sind. Wir sehen, daß alle diese Flächen mit singulären Rändern behaftet sind, über die hinaus sie nicht stetig fortgesetzt werden können[1]. Die Gesamtheit aller Flächen konstanter negativer Krümmung läßt sich bisher nicht explizit angeben,

[1] In Abb. 234b ist nur der untere Rand singulär, nach oben zu läuft die Fläche ins Unendliche, wobei die Breitenkreise unbegrenzt klein werden.