SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie
Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan
Verlag: Springer
Ort: Berlin
Jahr: 1932
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN379425343
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

LOG Id: LOG_0047
LOG Titel: § 35. Hyperbolische Geometrie; ihr Verhältnis zur euklidischen end elliptischen Geometrie.
LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

ebene hinzunehmen, wenn wir also diese Ebene als projektive Ebene auffassen.

Wir können demnach die projektive Ebene direkt als ein Modell der elliptischen Ebene ansehen, wenn wir die Gleichheit von Längen und Winkeln in diesem Modell nicht euklidisch, sondern in der angedeuteten Art durch die sphärische Trigonometrie einer Hilfskugel bestimmen. Hieraus folgt, daß in der elliptischen Geometrie alle Schnittpunktssätze der projektiven Geometrie, z. B. die von DESARGUES und PASCAL, gelten.

Wenn wir nun die längentreuen Abbildungen der elliptischen Ebene ins Auge fassen, so können wir wie im euklidischen Fall nach den diskontinuierlichen Gruppen solcher Abbildungen fragen. Jeder solchen Gruppe entspricht eine diskontinuierliche Gruppe längentreuer Abbildungen der Kugelfläche, also eines der regulären Polyeder, die wir in § 13, 14 behandelt haben. Umgekehrt führt jedes reguläre Polyeder zu einer diskontinuierlichen Deckgruppe der elliptischen Ebene, und die Zentralprojektionen regulärer Polyeder, die in Abb. 160 bis 163 und 165 bis 168 dargestellt sind, geben einige Lösungen der mit jenen Gruppen zusammenhängenden Aufgabe der „Pflasterung", die S. 72 für die euklidische Ebene formuliert ist.

Man kann nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raum die elliptische Geometrie definieren. Als Modell der Punkte, Geraden und Ebenen dieses Raums läßt sich der projektive Raum mit seinen Punkten und Geraden verwenden. Die Vergleichung der Längen und Winkel hat wieder abweichend von der euklidischen Geometrie zu erfolgen und läßt sich nur analytisch beschreiben; z. B. durch Zentralprojektion einer Hyperkugel des vierdimensionalen Raums. Die diskontinuierlichen Deckgruppen des elliptischen Raums hängen mit den regulären Zellen des vierdimensionalen Raums zusammen, und die Abb. 173 bis 176 lassen sich als „Pflasterungen" des elliptischen Raums deuten.

§ 35. Hyperbolische Geometrie; ihr Verhältnis zur euklidischen und elliptischen Geometrie.

Wir wenden uns jetzt zu den Flächen konstanter negativer Krümmung. Es gibt unter ihnen keine von so einfacher Gestalt wie die Kugelfläche. Die Rotationsflächen dieser Art können drei verschiedene Gestalten haben, die in Abb. 234 dargestellt sind. Wir sehen, daß alle diese Flächen mit singulären Rändern behaftet sind, über die hinaus sie nicht stetig fortgesetzt werden können[1]. Die Gesamtheit aller Flächen konstanter negativer Krümmung läßt sich bisher nicht explizit angeben,

[1] In Abb. 234b ist nur der untere Rand singulär, nach oben zu läuft die Fläche ins Unendliche, wobei die Breitenkreise unbegrenzt klein werden.

doch läßt es sich beweisen, daß keine dieser Flächen von Singularitäten frei sein kann.

Es gibt also keine Fläche im Raum, die im kleinen längentreu auf eine Fläche konstanter negativer Krümmung abgebildet werden kann, und auf der die Abtragung geodätischer Strecken nirgends durch Randpunkte behindert wird. Man kann aber in der Ebene Modelle solcher abstrakt definierter Flächen angeben, ebenso wie wir die projektive

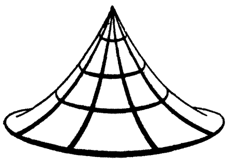

Abb. 234a.

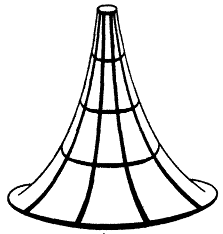

Abb. 234b.

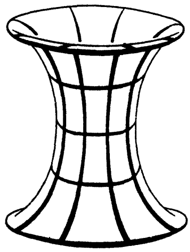

Abb. 234c.

Ebene zu einem Modell der elliptischen Ebene gemacht hatten. Wir müssen zu diesem Zweck die Längen- und Winkelmessung auf eine neue Art einführen, die von der euklidischen und auch von der elliptischen Geometrie abweicht. Man nennt die Fläche, von denen wir solche Modelle konstruieren wollen, die *hyperbolische Ebene* und ihre Geometrie die *hyperbolische Geometrie*.

Als Punkte der hyperbolischen Ebene wollen wir die Punkte im Innern eines Kreises in einer gewöhnlichen Ebene betrachten und als hyperbolische Geraden die Sehnen dieses Kreises (mit Ausschluß der Endpunkte).

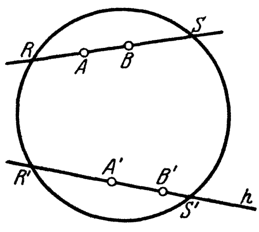

Abb. 235.

Es läßt sich nämlich für jedes Flächenstück F konstanter negativer Krümmung $-1/c^2$ eine Abbildung angeben, die F in ein Gebiet G der Ebene im Kreisinnern derartig überführt, daß die geodätischen Linien, die in F verlaufen, durchweg in die Geradenstücke in G verwandelt werden. Natürlich kann diese Abbildung nicht längentreu sein, da ja die Krümmung von G verschwindet, während die von F negativ ist. Sind A, B (Abb. 235) die Bilder zweier Punkte P, Q von F und sind R, S die Endpunkte der durch A, B gelegten Kreissehne, so gilt für den geodätischen Abstand s der Punkte P, Q die Formel

$$s = \frac{c}{2} \cdot \left| \log \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right|. \tag{1}$$

Wir wollen die rechte Seite der Gleichung (1) für alle Punktepaare AB unseres Modells der hyperbolischen Ebene als den „hyperbolischen Abstand" definieren. Ebenso führt die Abbildung $F \to G$ zu einer bestimmten Messung des „hyperbolischen Winkels", die von der euklidischen Bestimmungsweise abweicht. Um z. B. von einem Punkt A der hyperbolischen Ebene aus auf eine Gerade g das Lot h zu fällen, hat man h als Verbindungsgerade von A mit dem in Abb. 236 konstruierten Hilfspunkt P zu zeichnen. Man erkennt, daß der euklidische Winkel zwischen h und g im allgemeinen von einem Rechten verschieden ist.

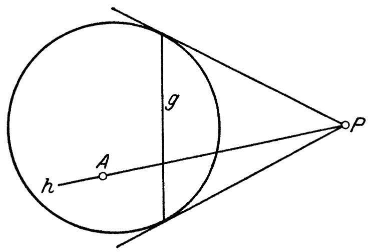

Abb. 236.

Untersuchen wir nun, welche Axiome der euklidischen Geometrie in der hyperbolischen Ebene gültig bleiben. Zunächst ist es klar, daß die Verknüpfungsaxiome gelten. Wenn wir ferner die „Zwischen"-beziehung dreier Punkte einfach aus ihrer Lage in unserem Modell übernehmen, so erkennen wir, daß auch die Anordnungsaxiome gelten. Als Strecke AB definieren wir nun die Punkte der euklidischen Verbindungsstrecke in unserem Modell. Der Streckenkongruenz legen wir die Formel (1) zugrunde. Wenn wir dann das erste Kongruenzaxiom betrachten, so könnte es zunächst scheinen, als sei die freie Streckenabtragung durch die Kreisperipherie behindert, das Axiom also ungültig. In Wahrheit gelangen wir aber bei der Abstandsdefinition (1) beim Streckenabtragen nie an die Kreisperipherie. Ist nämlich (Abb. 235) eine Strecke AB und eine vom Punkt A' ausgehende Halbgerade h im Kreisinnern gegeben, so gilt für den Punkt B' auf h, für den $AB = A'B'$ sein soll, nach (1) die Relation:

$$\frac{AR}{BR} \cdot \frac{BS}{AS} = \frac{A'R'}{B'R'} \cdot \frac{B'S'}{A'S'}$$

oder

$$\frac{B'S'}{B'R'} = \frac{A'S'}{A'R'} \cdot \frac{AR}{AS} \cdot \frac{BS}{BR}. \tag{2}$$

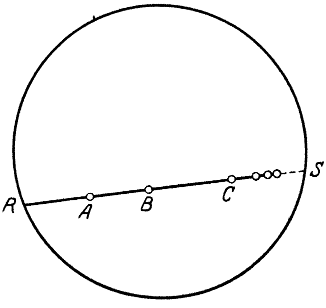

Abb. 237.

Da die drei Punkte A', A und B im Kreisinnern liegen, sind die drei Proportionen auf der rechten Seite von (2) alle negativ. Also ist auch $\frac{B'S'}{B'R'}$ negativ, d. h. B' liegt im Kreisinnern, wie behauptet war. Trägt man eine Strecke beliebig oft an sich selbst an, so kommt man der Kreisperipherie unbegrenzt näher, ohne sie zu erreichen (Abb. 237); die Kreisperipherie spielt in unserem Modell der hyperbolischen Geometrie eine analoge Rolle wie die unendlich ferne Gerade der euklidischen Geometrie.

Unsere Betrachtung lehrt, daß das erste Kongruenzaxiom in der hyperbolischen Ebene gilt. Offenbar gelten auch die Kongruenzaxiome 2. bis 4.

Das fünfte Kongruenzaxiom ist, wie in § 34 ausgeführt, gleichbedeutend mit der Existenz einer hinreichend umfassenden Gruppe von Abbildungen, die das Kreisinnere derart in sich überführen, daß die Geraden in Geraden übergehen und die hyperbolischen Abstände und Winkel erhalten bleiben. Man zeigt nun in der projektiven Geometrie der Ebene, daß es eine solche Gruppe in der Tat gibt. (Die Abbildungen gehören zu den projektiven Transformationen der Ebene und lassen sich durch wiederholte Anwendung der Zentralprojektion anschaulich erzeugen.) Somit gelten in der hyperbolischen Geometrie sämtliche Kongruenzaxiome. Man sieht leicht ein, daß auch die Stetigkeitsaxiome erfüllt sind.

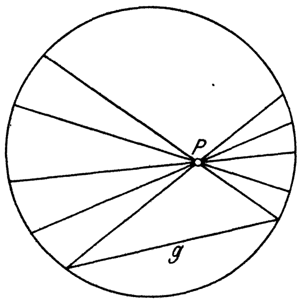

Abb. 238.

Nur ein einziges Axiom der euklidischen Geometrie gilt in der hyperbolischen Ebene nicht: das Parallelenaxiom. Man erkennt dies aus Abb. 238. Durch einen Punkt gibt es zu jeder nicht durch P gehenden Geraden g stets ein ganzes Büschel von Geraden, die g nicht schneiden. Während also in der elliptischen Geometrie außer dem Parallelenaxiom auch die euklidischen Anordnungsaxiome ungültig sind, unterscheidet sich die hyperbolische Geometrie von der euklidischen ausschließlich dadurch, daß das Parallelenaxiom nicht gilt.

Aus diesem Grund kommt unserem Modell eine große prinzipielle Bedeutung zu. Man hat sich während des ganzen Mittelalters und bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts vergeblich bemüht, das Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen Euklids zu beweisen. Mit der Entdeckung eines Modells der hyperbolischen Geometrie war die prinzipielle Unmöglichkeit eines solchen Beweises dargetan. Denn unser Modell erfüllt alle geometrischen Axiome mit Ausnahme des Parallelenaxioms. Würde dieses aus den übrigen logisch folgen, so müßte es auch in unserem Modell gelten, was nicht zutrifft.

Die hyperbolische und die elliptische Geometrie werden als die beiden *nichteuklidischen* Geometrien bezeichnet. Wenn wir von der Wertverteilung der Gaussschen Krümmung ausgehen, erweist sich die euklidische Geometrie als ein Übergangsfall zwischen der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie. Das gilt auch in anderer Hinsicht. So haben wir die hyperbolische Ebene erhalten, indem wir aus der euklidischen Ebene die Punkte im Äußeren eines Kreises entfernten, während wir, um die vollständige elliptische Ebene zu erhalten, zur euklidischen Ebene noch die Punkte der unendlich fernen Geraden hinzunehmen mußten. Ferner gibt es zu einer Geraden durch einen außerhalb gelegenen Punkt in der elliptischen Geometrie keine, in der euklidischen Geometrie eine und in der hyperbolischen Geometrie unendlich viele Parallelen. Besonders charakteristisch für die drei Geometrien ist die Winkelsumme im Dreieck. Während sie in der euklidischen Geometrie π beträgt, ist sie in der elliptischen Geometrie stets größer als π, wie aus bekannten Sätzen der sphärischen Trigonometrie folgt. In der hyperbolischen Ebene ist nun diese Summe stets kleiner als π. Wir werden später einen anschaulichen Beweis dafür erbringen.

Der Satz der euklidischen Geometrie, daß die Winkelsumme jedes Dreiecks π beträgt, kann hiernach nicht ohne Benutzung des Parallelenaxioms bewiesen werden; sonst müßte er auch in der hyperbolischen Ebene gelten. Wenn andererseits irgendein Satz in der euklidischen und auch in der hyperbolischen Geometrie gilt, so ist zu seinem Beweise das euklidische Parallelenaxiom sicher nicht erforderlich. Ein solcher Satz ist es z. B., daß jeder Außenwinkel eines Dreiecks größer ist als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel. Man kann nun aus der Betrachtung sphärischer Dreiecke leicht erkennen, daß in der elliptischen Geometrie dieser Satz nicht gilt. Hieraus folgt, daß zu seinem Beweise die euklidischen Anordnungsaxiome gebraucht werden.

Ein Beispiel für einen Satz, der in allen drei Geometrien gilt, ist der Satz, daß die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck einander gleich sind. Zum Beweise dieses Satzes sind weder die euklidischen Anordnungsaxiome noch irgendeine Annahme über Parallelismus erforderlich.

Es wurde bemerkt, daß die projektiven Schnittpunktsätze, z. B. der von DESARGUES, in der elliptischen Ebene gelten. In der euklidischen Ebene gilt dieser Satz wie jeder andere Schnittpunktsatz nur dann, wenn wir die unendlich fernen Punkte hinzunehmen. In der hyperbolischen Ebene können die Schnittpunktsätze nur dann einheitlich formuliert werden, wenn wir zwei Arten uneigentlicher Punkte hinzunehmen: solche, die in unserem Modell den Peripheriepunkten, und solche, die den Punkten des Kreisäußeren entsprechen. Offenbar können wir z. B. zu einer in der Ebene gegebenen DESARGUESschen Konfiguration den Kreis, der unser Modell der hyperbolischen Ebene bestimmt, so legen, daß er neun Konfigurationspunkte im Innern und den zehnten auf der Peripherie oder im Äußern enthält. Wegen der Regularität der Konfiguration können wir diesen Punkt als den DESARGUESschen Punkt auffassen; dann können wir unsere Figur als zwei hyperbolische Dreiecke deuten, deren entsprechende Seiten einander paarweise auf Punkten einer hyperbolischen Geraden schneiden. Nach dem DESARGUESschen Satz müssen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, während diese Geraden doch im Innern des Kreises keinen Punkt gemein haben.

Sucht man den DESARGUESschen Satz unmittelbar, ohne Bezugnahme auf unser Modell, im Bereich der hyperbolischen Geometrie zu beweisen, so stößt man auf ähnliche Schwierigkeiten wie in der euklidischen und projektiven Geometrie. Der Satz ist beweisbar mit Hilfe der Kongruenzaxiome. Ohne sie bedarf es zu seinem Beweise räumlicher Hilfsmittel. Es gibt nämlich auch im Raum eine hyperbolische Geometrie. Ein Modell des „hyperbolischen Raums" erhält man, wenn man als Punkte, Geraden und Ebenen dieses Raums die Punkte, Geradenstücke und Ebenenstücke im Innern einer Kugel des gewöhnlichen Raums ansieht und den Abstand zweier Punkte analog wie im ebenen Modell definiert.

Wir hatten erwähnt, daß die Winkelsumme im Dreieck in der hyperbolischen Ebene stets kleiner ist als π. An unserem Modell tritt dieser Satz nicht in anschauliche Evidenz, weil die hyperbolischen Winkel von den euklidischen verschieden ausfallen. Wir werden daher im folgenden Abschnitt ein weiteres Modell der hyperbolischen Ebene aus dem bisher betrachteten Modell erzeugen, und in diesem neuen Modell werden die hyperbolischen Winkel unverzerrt wiedergegeben werden. Wir müssen zu diesem Zweck von einer einfachen elementargeometrischen Betrachtung ausgehen: der Lehre von der stereographischen Projektion und von den Kreisverwandtschaften.

§ 36. Stereographische Projektion und Kreisverwandtschaften. POINCARÉsches Modell der hyperbolischen Ebene.

Auf einer horizontalen Ebene liege eine Kugel (Abb. 239). Vom höchsten Punkt N der Kugel aus projizieren wir diese auf die Ebene. Die so

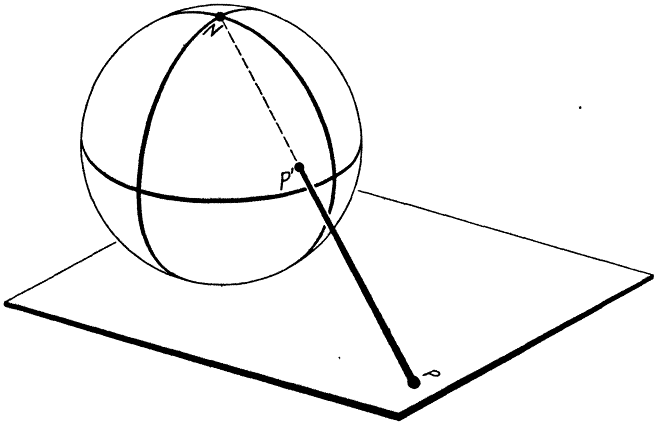

Abb. 239.

entstehende Abbildung der Kugelfläche auf die Ebene ($P' \to P$ in Abb. 239) heißt *stereographische Projektion*. Dabei ist die ganze Ebene abgebildet auf die ganze Kugel mit Ausnahme des Punkts N. Die