

## Werk

**Titel:** Anschauliche Geometrie

**Autor:** Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

**Verlag:** Springer

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN379425343

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG\\_0048](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0048)

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

Sucht man den DESARGUESSchen Satz unmittelbar, ohne Bezugnahme auf unser Modell, im Bereich der hyperbolischen Geometrie zu beweisen, so stößt man auf ähnliche Schwierigkeiten wie in der euklidischen und projektiven Geometrie. Der Satz ist beweisbar mit Hilfe der Kongruenzaxiome. Ohne sie bedarf es zu seinem Beweise räumlicher Hilfsmittel. Es gibt nämlich auch im Raum eine hyperbolische Geometrie. Ein Modell des „hyperbolischen Raums“ erhält man, wenn man als Punkte, Geraden und Ebenen dieses Raums die Punkte, Geradenstücke und Ebenenstücke im Innern einer Kugel des gewöhnlichen Raums ansieht und den Abstand zweier Punkte analog wie im ebenen Modell definiert.

Wir hatten erwähnt, daß die Winkelsumme im Dreieck in der hyperbolischen Ebene stets kleiner ist als  $\pi$ . An unserem Modell tritt dieser Satz nicht in anschauliche Evidenz, weil die hyperbolischen Winkel von den euklidischen verschieden ausfallen. Wir werden daher im folgenden Abschnitt ein weiteres Modell der hyperbolischen Ebene aus dem bisher betrachteten Modell erzeugen, und in diesem neuen Modell werden die hyperbolischen Winkel unverzerrt wiedergegeben werden. Wir müssen zu diesem Zweck von einer einfachen elementargeometrischen Betrachtung ausgehen: der Lehre von der stereographischen Projektion und von den Kreisverwandtschaften.

### § 36. Stereographische Projektion und Kreisverwandtschaften. POINCARÉSches Modell der hyperbolischen Ebene.

Auf einer horizontalen Ebene liege eine Kugel (Abb. 239). Vom höchsten Punkt  $N$  der Kugel aus projizieren wir diese auf die Ebene. Die so

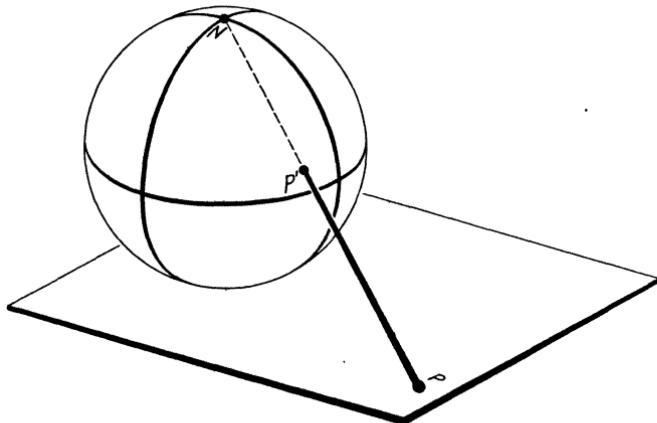


Abb. 239.

entstehende Abbildung der Kugelfläche auf die Ebene ( $P' \rightarrow P$  in Abb. 239) heißt *stereographische Projektion*. Dabei ist die ganze Ebene abgebildet auf die ganze Kugel mit Ausnahme des Punkts  $N$ . Die

Bildebene ist parallel der Tangentialebene  $n$  der Kugel in  $N$ . Ist ferner  $p'$  die Kugeltangentialebene in  $P'$  (Abb. 240), so bilden wegen der allseitigen Symmetrie der Kugel die beiden Tangentialebenen  $n$  und  $p'$  gleiche Winkel mit  $NP'$ , der Verbindungssehne ihrer Berührungspunkte, und die Schnittgerade von  $n$  und  $p'$  steht auf  $NP$  senkrecht. Da  $n$  zur Bildebene parallel ist, bildet auch diese mit dem Projektionsstrahl  $PP'$  den gleichen Winkel wie  $p'$  und schneidet  $p'$  in einer zu  $PP'$  senkrechten Geraden. Hieraus folgen mehrere anschauliche Eigenschaften der stereographischen Projektion. Ist zunächst  $r'$  eine Tangente der Kugel in  $P'$  (Abb. 241) und ist  $r$  das Bild von  $r'$ , so bilden  $r$  und  $r'$  gleiche Winkel mit  $PP'$ . Denn ich erhalte  $r$ , indem ich die Bildebene mit der durch  $r'$  und  $NP'$  gehenden Ebene schneide; wenn aber eine durch  $PP'$  gehende Ebene  $e$  (Abb. 242) in den Geraden  $r$  und  $r'$  zwei Ebenen  $\phi, \phi'$  schneidet, die mit der Geraden  $PP'$  gleiche Winkel bilden und sich in einer zu  $PP'$  senkrechten Geraden schneiden, so bilden auch  $r$  und  $r'$  mit  $PP'$  gleiche

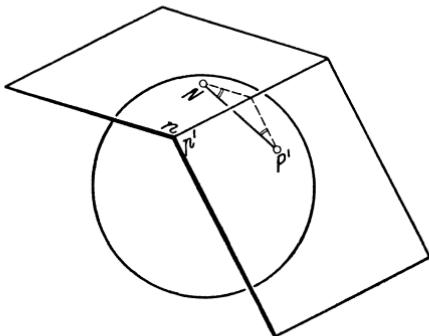


Abb. 240.

Winkel. Denn ich erhalte  $r$ , indem ich die Bildebene mit der durch  $r'$  und  $NP'$  gehenden Ebene schneide; wenn aber eine durch  $PP'$  gehende Ebene  $e$  (Abb. 242) in den Geraden  $r$  und  $r'$  zwei Ebenen  $\phi, \phi'$  schneidet, die mit der Geraden  $PP'$  gleiche Winkel bilden und sich in einer zu  $PP'$  senkrechten Geraden schneiden, so bilden auch  $r$  und  $r'$  mit  $PP'$  gleiche

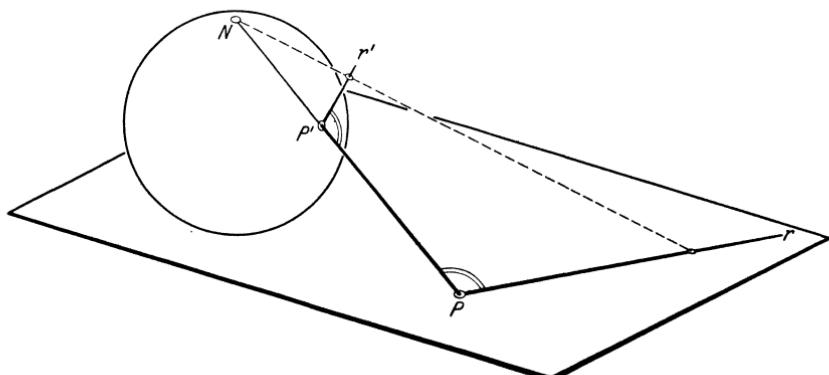


Abb. 241.

Winkel. Dieselbe Symmetriebetrachtung lehrt ferner: Ist  $s'$  eine weitere Tangente der Kugel in  $P'$  und ist  $s$  das Bild von  $s'$ , so bildet  $r$  mit  $s$  denselben Winkel wie  $r'$  mit  $s'$ . *Die Winkel auf der Kugel werden also bei stereographischer Projektion unverzerrt wiedergegeben.* Die Abbildung wird deshalb als *winkelstreu* bezeichnet.

Sei ferner  $k'$  ein beliebiger nicht durch  $N$  gehender Kreis auf der Kugel (Abb. 243). Die Tangentialebenen an die Kugel in den Punkten von  $k'$

umhüllen einen Rotationskegel, dessen Spitze  $S$  heißen möge. Da  $k'$  nicht durch  $N$  geht, ist  $NS$  keine Tangente der Kugel in  $N$ , also der Bildebene nicht parallel;  $M$  möge der Schnittpunkt der Bildebene mit  $NS$  sein.

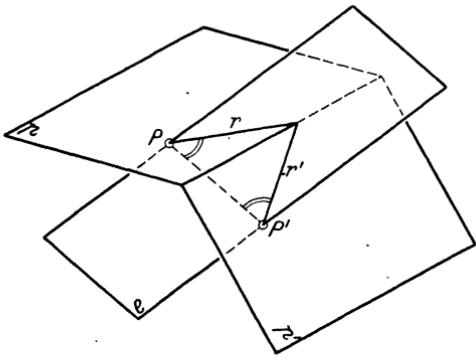


Abb. 242.

möge. Dann fällt entweder  $P''$  mit  $P'$  zusammen, oder das Dreieck  $P'P''S$  hat gleiche Winkel bei  $P'$  und  $P''$ , ist also gleichschenklig:  $SP' = SP''$ . Nun ist aber  $\frac{PM}{P'S} = \frac{PM}{P''S} = \frac{MN}{SN}$  oder:  $PM = P'S \cdot \frac{MN}{SN}$ . Da  $S$  von allen Punkten von  $k'$  gleich weit entfernt ist, so ist  $P'S$  kon-

Ich behaupte, daß die Bildkurve  $k$  von  $k'$  ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  ist. Der Beweis ist aus Abb. 243 ersichtlich. Ist  $P'$  ein beliebiger Punkt von  $k'$ ,  $P$  sein Bildpunkt, dann ist  $P'S$  eine Kugeltangente in  $P'$ , und  $PM$  ist das Bild von  $P'S$ ; demnach ist  $\angle P'P''S = \angle P'PM$ . Ich ziehe durch  $S$  die Parallele zu  $PM$ , die  $NP$  in  $P''$  treffen

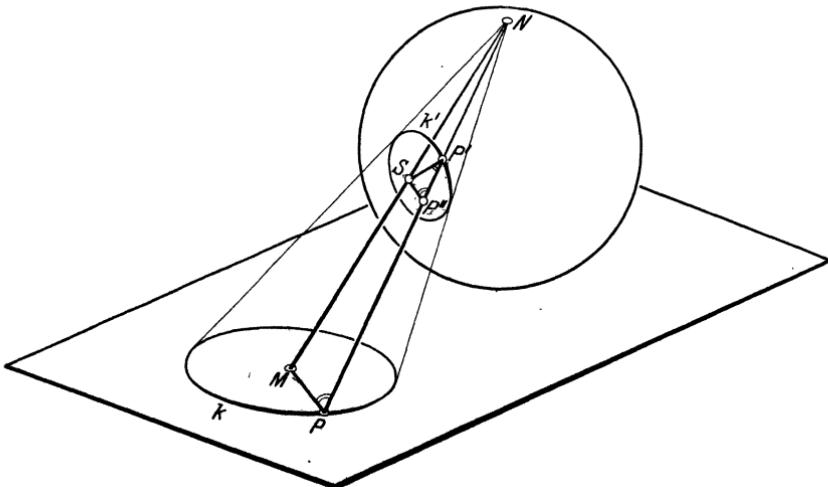


Abb. 243.

stant. Nach der letzten Formel ist daher auch  $PM$  konstant, d. h.  $k$  ist ein Kreis um  $M$ .

Die nicht durch  $N$  gehenden Kreise der Kugel werden also durch stereographische Projektion in Kreise der Ebene verwandelt, und indem man die soeben durchgeführte Betrachtung umkehrt, erkennt man, daß auch jeder Kreis der Ebene einem Kreis auf der Kugel

als Bild entspricht. Wenn ein auf der Kugel beweglicher Kreis gegen einen durch  $N$  gehenden Kreis rückt, so rückt  $NS$  gegen eine Kugeltangente in  $N$ , der Punkt  $M$  entfernt sich also ins Unendliche. Hieraus folgt, daß den durch  $N$  gehenden Kreisen der Kugel die Geraden der Bildebene entsprechen. Dies ist auch ohne Grenzübergang klar, da die Projektionsstrahlen eines durch  $N$  gehenden Kreises der Kugel in der Ebene dieses Kreises verlaufen, so daß die *Schnittgerade* dieser Ebene mit der Bildebene als die Bildkurve des Kreises erscheint. Die Gesamtheit der Kreise auf der Kugel entspricht demnach bei stereographischer Projektion der Gesamtheit der Kreise und Geraden in der Ebene. Die stereographische Projektion ist *kreistreu*.

Wir denken uns nun irgendeine Abbildung  $a'$  der Kugelfläche auf sich selbst, bei der die Kreise der Kugel sämtlich in Kreise übergehen; z. B. kann  $a'$  eine Drehung der Kugel um irgendeinen (nicht notwendig durch  $N$  gehenden) Durchmesser sein. Dann entspricht der Abbildung  $a'$  durch die stereographische Projektion eine Abbildung  $a$  der Bildebene auf sich, die die Gesamtheit der Kreise und Geraden in sich überführt. Man nennt jede solche Abbildung der Ebene eine *Kreisverwandtschaft*.

In der euklidischen Ebene sind die Kreisverwandtschaften im allgemeinen keine umkehrbar eindeutigen Abbildungen. Denn bei der stereographischen Projektion entspricht dem Punkt  $N$  der Kugel kein Punkt der Ebene. Die Abbildung  $a'$  der Kugel wird nun im allgemeinen den Punkt  $N$  nicht fest lassen, sondern wird einen anderen Punkt  $P'$ , dessen stereographisches Bild  $P$  sein möge, in  $N$  überführen. Dann hat der Punkt  $P$  bei der Kreisverwandtschaft  $a$ , die  $a'$  entspricht, keinen Bildpunkt. Wie in der projektiven Geometrie führt man zur Vereinheitlichung des Abbildungsvorgangs eine abstrakte Erweiterung der euklidischen Ebene durch. Diese Erweiterung geschieht aber in der Lehre von den Kreisverwandtschaften auf andere Weise wie in der projektiven Geometrie; man fügt nämlich zur euklidischen Ebene einen einzigen „unendlich fernen“ Punkt  $U$  hinzu, den man als das Bild von  $N$  bei stereographischer Projektion auffaßt. Nach dieser Erweiterung ist die Ebene umkehrbar eindeutig und stetig auf die ganze Kugeloberfläche bezogen, und die Kreisverwandtschaften werden umkehrbar eindeutige Abbildungen; in dem oben angeführten Beispiel wird der Punkt  $P$  durch die Kreisverwandtschaft  $a$  auf  $U$  abgebildet. Bei der zugehörigen Kugelabbildung  $a'$  gehen natürlich die Kreise durch  $P'$  in die Kreise durch  $N$  über; folglich bildet  $a$  die Kreise durch  $P$  auf die Geraden der Ebene ab. Hiernach erweist es sich als zweckmäßig, die Geraden als „Kreise durch den unendlich fernen Punkt“ aufzufassen. Parallele Geraden werden durch eine Kreisverwandtschaft entweder wieder in parallele Geraden oder in sich berührende Kreise übergeführt.

Triviale Beispiele von Kreisverwandtschaften sind die Bewegungen, Umklappungen und Ähnlichkeitstransformationen der Ebene; sie führen

schon die euklidische Ebene selbst umkehrbar eindeutig in sich über; legen wir also diesen Abbildungen die durch  $U$  erweiterte Ebene zugrunde, so können wir sagen, daß diese Abbildungen Kreisverwandtschaften sind, die  $U$  fest lassen. Man kann nun umgekehrt beweisen, daß die einzigen Kreisverwandtschaften, die  $U$  fest lassen, die soeben genannten sind. Nach diesem Satz läßt sich leicht eine vollständige Übersicht über alle Kreisverwandtschaften der Ebene geben. Sei  $P$  derjenige Punkt der Ebene, der bei einer vorgegebenen Kreisverwandtschaft  $a_0$  in  $U$  überführt wird, und sei  $P'$  das stereographische Bild des Kugelpunktes  $P'$ . Dann erteilen wir der Kugel eine solche Drehung  $a'$ , daß  $P'$  in  $N$  übergeht. Der Drehung  $a'$  entspricht eine Kreisverwandtschaft  $a$ , deren Eigenschaften mit denen von  $a'$  in einfacher anschaulicher Weise

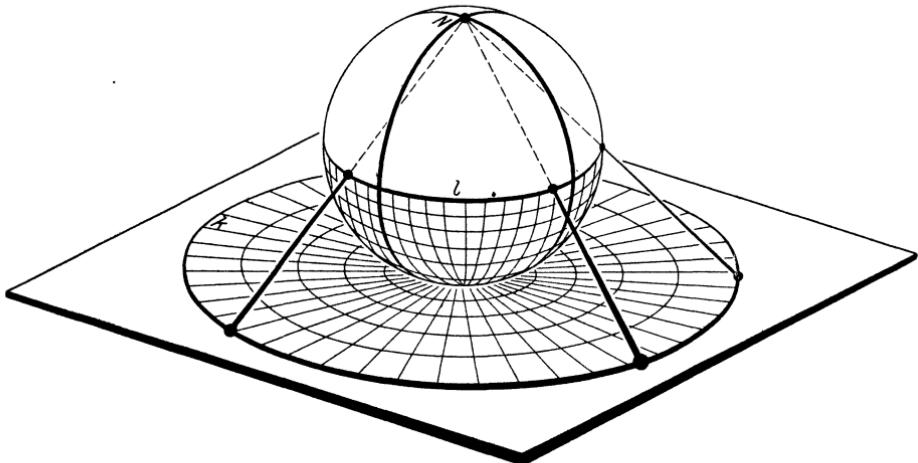


Abb. 244 a.

verknüpft sind. Nun kann sich die gegebene Kreisverwandtschaft  $a_0$ , die ebenso wie  $a$  den Punkt  $P$  in  $U$  überführt, von der Kreisverwandtschaft  $a$  nur durch eine Kreisverwandtschaft unterscheiden, die  $U$  fest läßt. Nach dem soeben angeführten Satz ist daher  $a_0$  bis auf eine Bewegung, Umklappung oder Ähnlichkeitstransformation mit  $a$  identisch.

Wir haben früher erwähnt, daß die stereographische Projektion winkeltreu ist. Die Drehung  $a'$  ist nun eine winkeltreue Abbildung der Kugel. Da  $a$  aus  $a'$  durch stereographische Projektion hervorgeht, ist  $a$  eine winkeltreue Abbildung der Ebene. Da sich  $a_0$  von  $a$  höchstens durch eine winkeltreue Abbildung unterscheidet, so folgt: *Alle Kreisverwandtschaften sind winkeltreu.*

Der Zusammenhang der Abbildungen  $a$  und  $a'$  ist in Abb. 244a, b durch Hervorhebung eines durch  $P$  gehenden Kreises  $k$  der Ebene veranschaulicht, der stereographisch einem Großkreis  $l$  der Kugel entspricht. Durch  $a'$  wird  $l$  in einen durch  $N$  gehenden Großkreis  $n$  übergeführt,

der die Gerade  $g$  zum Bilde hat. Durch  $a$  geht also  $k$  in  $g$  über. Aus den Figuren erkennt man ferner, daß das Innere und das Äußere von  $k$  in die beiden von  $g$  begrenzten Halbebenen übergeht, was aus Stetigkeitsgründen ohnehin klar ist.

Die Umklappung  $u$  der Ebene um  $g$  ist eine Kreisverwandtschaft. Demnach ist die Abbildung  $i = aua^{-1}$  eine Kreisverwandtschaft, die die Peripherie von  $k$  punktweise fest läßt und die das Innere und das Äußere dieses Kreises miteinander vertauscht. Die Abbildung  $i$  wird Inversion oder Spiegelung am Kreise  $k$  genannt. Diese Abbildung ist besonders wichtig und sei deshalb etwas genauer betrachtet.

Es sei  $h$  ein Kreis, der  $k$  in einem Punkt  $R$  senkrecht durchschneidet (Abb. 245). Dann treffen sich  $h$  und  $k$  in einem weiteren Punkt  $S$  und

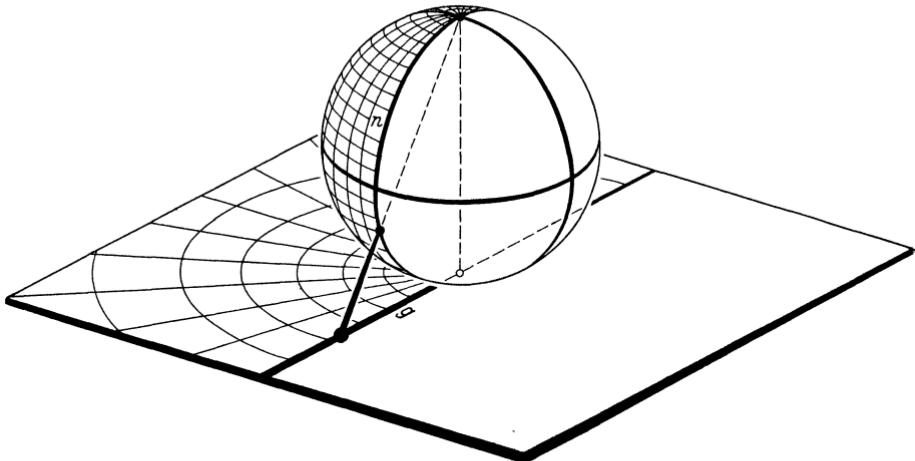


Abb. 244 b.

schneiden einander auch in  $S$  senkrecht. Die Tangenten an  $h$  in  $R$  und  $S$  sind dann Radien von  $k$  und treffen einander im Mittelpunkt  $M$  von  $k$ , der somit im Äußeren von  $h$  liegt. Durch die Inversion  $i$  muß  $h$  in einen Kreis  $h'$  übergehen, der ebenfalls durch  $R$  und  $S$  geht, denn diese Punkte bleiben fest.  $h'$  muß wegen der Winkeltreue der Inversion den Kreis  $k$  in  $R$  und  $S$  senkrecht durchschneiden. Das ist aber nur möglich, wenn  $h'$  mit  $h$  identisch ist. Somit wird durch  $i$  jeder Kreis  $h$ , der  $k$  senkrecht schneidet, in sich übergeführt. Da Inneres und Äußeres von  $k$  vertauscht werden, müssen auch die beiden Kreisbögen von  $h$  vertauscht werden, in die  $h$  durch  $k$  zerlegt wird.

Betrachten wir jetzt eine Gerade  $l$  durch  $M$ , z. B. die Gerade  $RM$ , die  $k$  zum zweitenmal in  $R'$  schneiden möge (Abb. 245). Dann muß  $l$  in einen Kreis oder eine Gerade  $l'$  übergehen, so daß  $l'$  in  $R$  und  $R'$  auf  $k$  senkrecht steht. Das ist nur möglich, wenn  $l'$  mit  $l$  identisch ist. Die Inversion führt demnach alle Durchmesser von  $k$  in sich über. Da diese

Geraden in der erweiterten Ebene außer  $M$  nur den unendlich fernen Punkt  $U$  gemein haben, so muß  $M$  mit  $U$  vertauscht werden. Die Gesamtheit der nicht durch  $M$  gehenden Geraden wird demnach mit der Gesamtheit der durch  $M$  gehenden Kreise vertauscht.

Sei nun  $P$  ein von  $R$  und  $S$  verschiedener Punkt von  $h$ . Dann kann das Bild von  $P$  bei der Inversion  $i$  nur der zweite Schnittpunkt  $Q$  der Geraden  $MP$  mit  $h$  sein, denn sowohl  $MP$  als auch  $h$  gehen in sich über. Nach dem elementaren Satz über das Produkt der Sehnenabschnitte im Kreis ist  $MP \cdot MQ = MR^2$ . Man nennt  $Q$  den zu  $P$  bezüglich  $k$  inversen Punkt, und wir haben ein Verfahren gefunden, um zu jedem Punkt  $P$  auch ohne den Hilfskreis  $h$  den inversen bezüglich  $k$  zu finden. Ist nämlich  $r$  der Radius von  $k$ , so haben wir den zu  $P$  inversen Punkt  $Q$  auf dem von  $M$  ausgehenden Halbstrahl  $MP$  so zu bestimmen, daß die Gleichung  $MP \cdot MQ = r^2$  gilt.

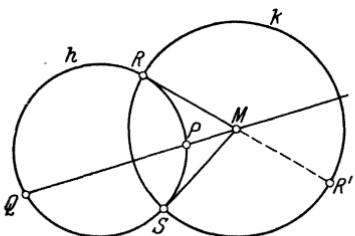


Abb. 245.

Man kann beweisen, daß jede Kreisverwandtschaft sich aus höchstens drei Inversionen zusammensetzen läßt. Wir wollen besonders die Gesamtheit der Kreisverwandtschaften betrachten, die einen festen Kreis  $k$  sowie dessen Inneres in sich überführen. Diese Abbildungen bilden ersichtlich eine Gruppe  $H$ . Ist  $n$  ein

auf  $k$  senkrechter Kreis, so gehört die Inversion an  $n$  jedenfalls zu  $H$ . Man kann zeigen, daß jede Abbildung aus  $H$  durch drei Inversionen erzeugbar ist, deren Grundkreise auf  $k$  senkrecht stehen, durch drei Inversionen also, die selbst zu  $H$  gehören.

Nunmehr wollen wir diese Betrachtungen mit dem Modell der hyperbolischen Geometrie in Zusammenhang bringen, das wir im vorigen Paragraphen konstruiert haben. Die hyperbolische Ebene sei dargestellt durch das Innere eines Kreises  $m$  in einer horizontalen Ebene. Im Mittelpunkt von  $m$  legen wir auf die Ebene eine Kugel, die mit  $m$  gleich großen Radius hat (Abb. 246). Wir projizieren nun  $m$  und das Innere von  $m$  durch vertikale Parallelprojektion auf die untere Halbkugel, die von dem zu  $m$  kongruenten Großkreis  $l$  begrenzt wird. Dadurch wird zunächst diese Halbkugel zu einem weiteren Modell der hyperbolischen Ebene. Jede Sehne  $g$  von  $m$  geht in einen auf  $l$  senkrechten Halbkreis  $v$  der Kugel über, diese Halbkreise sind also jetzt als die Bilder der hyperbolischen Geraden anzusehen. Nunmehr projizieren wir stereographisch die Halbkugel auf die Ebene zurück, wobei eine Kreisscheibe  $k$  bedeckt wird. Das Innere von  $k$  ist damit zu einem neuen Modell der hyperbolischen Ebene geworden. In diesem Modell sind die Halbkreise  $v$  wegen der Winkeltreue und Kreistreue der stereographischen Projektion in Kreisbögen  $n$  übergegangen, die auf dem Kreise  $k$  senkrecht stehen.

Zu diesen Kreisbögen sind hier und im folgenden die Durchmesser von  $k$  als Grenzfälle hinzuzurechnen.

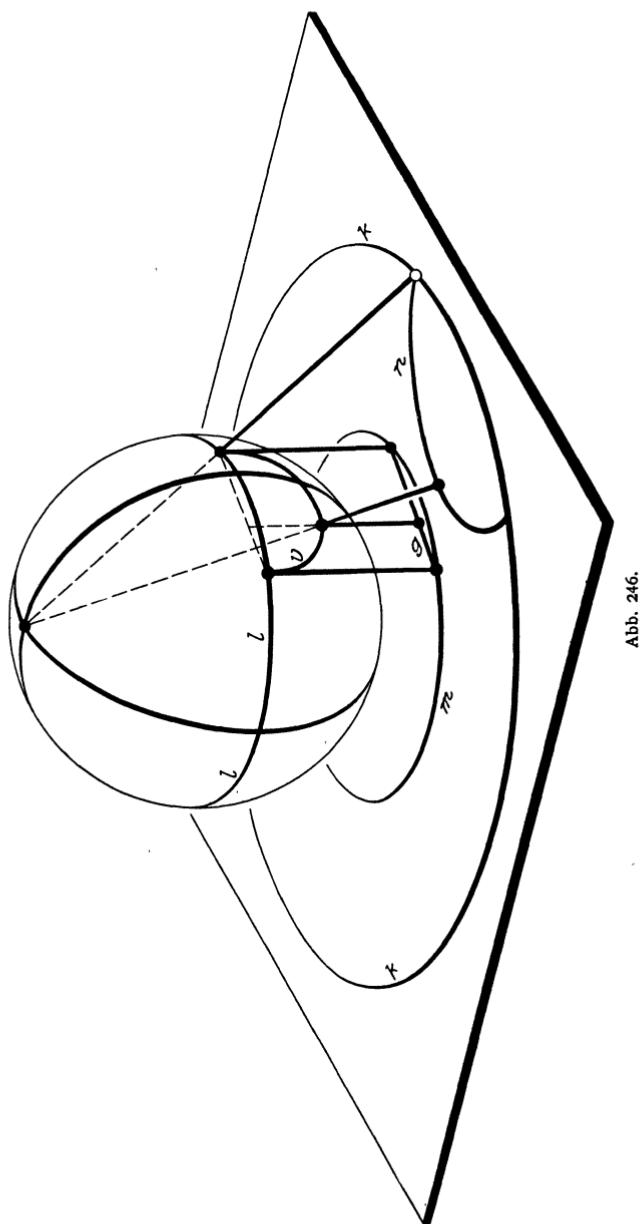


Abb. 246.

Wir wollen dieses neue Modell, das von POINCARÉ stammt, genauer betrachten. Aus unserer Ableitung folgt, daß die Gesamtheit der auf

$k$  senkrechten Kreisbögen umkehrbar eindeutig der Gesamtheit der Sehnen eines anderen Kreises  $m$  zugeordnet werden kann. Demnach können wir zwei Punkte  $A$  und  $B$  im Innern von  $k$  stets durch genau einen solchen Bogen verbinden. Sind  $R$  und  $S$  seine beiden Schnittpunkte mit  $k$  (Abb. 247), so läßt sich der hyperbolische Abstand von  $A$  und  $B$  aus der Formel (1) S. 214 ableiten. Sind nämlich  $A'B'R'S'$  diejenigen Punkte des ursprünglichen Modells, aus denen  $ABRS$  durch die von uns beschriebene Konstruktion hervorgegangen sind, so läßt sich durch projektiv-geometrische Sätze die Relation beweisen:

$$\frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} = \sqrt{\frac{A'R' \cdot B'S'}{B'R' \cdot A'S'}}.$$

Hieraus ergibt sich für den hyperbolischen Abstand  $s$  von  $A$  und  $B$  in unserem neuen Modell die Formel:

$$(2) \quad s = c \left| \log \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right|.$$

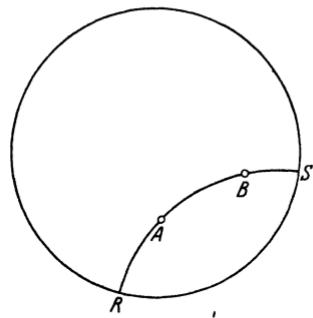


Abb. 247.

Nun muß jeder Bewegung der hyperbolischen Ebene in sich eine Abbildung  $\alpha$  des Innern von  $k$  auf sich entsprechen, die die Gesamtheit der auf  $k$  senkrechten Kreisbögen in sich überführt. Es ist plausibel und leicht streng zu schließen, daß diese Abbildung eine Kreisverwandtschaft ist, also der früher betrachteten Gruppe  $H$  angehört. Darüber hinaus läßt sich zeigen, daß die Gruppe  $H$  sogar mit der

Gruppe aller hyperbolischen Bewegungen identisch ist<sup>1</sup>. Nun sind die Abbildungen  $H$  als Kreisverwandtschaften winkeltreu und lassen gleichzeitig als hyperbolische Bewegungen die hyperbolischen Winkel unverändert. Hieraus folgt, daß die euklidischen Winkel im POINCARÉSchen Modell den hyperbolischen Winkel proportional mit einem festen Proportionalitätsfaktor sein müssen, und da der Vollwinkel  $2\pi$  der hyperbolischen Ebene natürlich ungeändert wiedergegeben wird, so muß der Proportionalitätsfaktor Eins betragen. *Das POINCARÉSche Modell ist winkeltreu.*

Man kann analytisch eine Abbildungsformel aufstellen, die direkt ein vorgegebenes Stück einer Fläche konstanter negativer Krümmung winkeltreu auf ein Stück der Ebene im Innern von  $k$  derart abbildet, daß die geodätischen Linien in die auf  $k$  senkrechten Kreisbögen übergehen.

<sup>1</sup> Als Bewegungen gelten hier auch solche längentreuen Abbildungen der hyperbolischen Ebene, die sich nicht stetig erzeugen lassen. Eine einfache derartige Bewegung wird durch jede in  $H$  vorkommende Inversion dargestellt: eine „Umkippung“ der hyperbolischen Ebene um eine Gerade. Nach S. 224 ist jede hyperbolische Bewegung durch höchstens drei Umklappungen erzeugbar.

Wir wollen jetzt den Beweis des S. 217 ausgesprochenen Satzes nachholen, daß die Winkelsumme im Dreieck in der hyperbolischen Geometrie stets kleiner ist als  $\pi$ . Wir gehen von einem beliebigen Dreieck  $ABC$  aus und legen das POINCARÉSche Modell zugrunde (Abb. 248). Nach den Kongruenzaxiomen, die ja in der hyperbolischen Geometrie gelten, können wir ein zu  $ABC$  kongruentes Dreieck  $A'B'M$  zeichnen, bei dem der  $C$  entsprechende Punkt  $M$  der Mittelpunkt von  $k$  ist. Nun haben wir S. 223 gesehen, daß jeder durch  $M$  gehende auf  $k$  senkrechte Kreis notwendig in einen Durchmesser von  $k$  entarten muß, während die nicht durch  $M$  gehenden auf  $k$  senkrechten Kreise den Punkt  $M$  im Äußern lassen. In unserem Modell werden demnach die hyperbolischen Geraden  $A'M$  und  $B'M$  durch euklidische Geraden dargestellt, die hyperbolische Gerade  $A'B'$  dagegen durch einen Kreisbogen, der  $M$  im Äußern läßt. Die *euklidischen* Winkel bei  $A'$  und  $B'$  fallen daher in dem von zwei Geraden und einem Kreisbogen begrenzten Dreieck  $A'B'M$  kleiner aus als im geradlinigen Dreieck  $A'B'M$ , und demnach bleibt auch die Winkelsumme unter  $\pi$ . Wegen der Winkeltreue des Modells gilt dasselbe für die Summe der hyperbolischen Winkel des hyperbolischen Dreiecks  $A'B'M$  und des dazu kongruenten Dreiecks  $ABC$ .

Es liegt nahe, unter den hyperbolischen Bewegungen nach diskontinuierlichen Gruppen zu suchen. In der elliptischen Geometrie reduzierte sich dieses Problem auf die Betrachtung regulärer Polyeder, und es gab nur wenige Gruppen dieser Art. In der euklidischen Geometrie war die Aufstellung schon schwieriger. In der hyperbolischen Geometrie ist nun die Anzahl der diskontinuierlichen Gruppen noch bei weitem größer als in der euklidischen Geometrie. Alle diese Gruppen werden im POINCARÉSchen Modell durch Gruppen von Kreisverwandtschaften realisiert, die als Untergruppen in  $H$  enthalten sind.

In der Funktionentheorie spielen diese Gruppen eine Rolle. Besonders wichtig unter ihnen sind die „Schiebungsgruppen“. Als „Schiebung“ bezeichnet man jede hyperbolische Bewegung, die sich stetig aus der Identität erzeugen läßt und die keinen Punkt fest läßt. In der ebenen elliptischen Geometrie gibt es kein Analogon dazu, da jede ebene elliptische Bewegung einen Fixpunkt besitzt. In der euklidischen Geometrie entsprechen den Schreibungen die Translationen. Für die Zusammensetzung von Schreibungen besteht aber kein so einfaches Gesetz wie für die Zusammensetzung von Translationen, da in der hyperbolischen Geometrie die Eindeutigkeit des Parallelismus wegfällt.

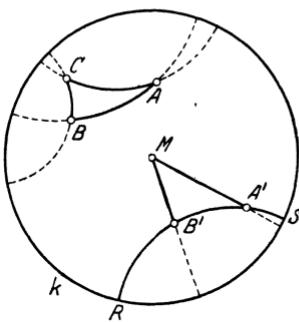


Abb. 248.

Wir wollen uns auf diejenigen diskontinuierlichen Gruppen von Schiebungen beschränken, die einen geschlossenen Fundamentalbereich haben. Ihnen entsprechen die euklidischen Translationsgruppen mit einem Parallelogramm als Fundamentalbereich. Bei einer hyperbolischen Schiebungsgruppe mit geschlossenem Fundamentalbereich ist dieser niemals ein Viereck. Dagegen kann außer 4 jede andere durch 4 teilbare Zahl als Eckenzahl des Fundamentalbereichs auftreten. In Abb. 249 ist für den Fall achteckiger Fundamentalbereiche die Pflasterung der hyperbolischen Ebene mit solchen Fundamentalbereichen im POINCARÉSchen Modell veranschaulicht. Die vollständige Pflasterung läßt sich natürlich nicht zeichnen, da die Kreisbogenachtecke sich gegen

den Kreisrand zu immer mehr zusammendrängen. Wie im Fundamentalparallelogramm der euklidischen Translationsgruppen sind auch hier die Seiten des Fundamentalbereichs paarweise gleich lang und äquivalent. In Abb. 249 ist diese Paarung an einem der Fundamentalbereiche angedeutet. Entsprechende Ecken verschiedener Fundamentalbereiche sind durch gleiche Ziffern gekennzeichnet. Man erkennt, daß um einen beliebig herausgegriffenen

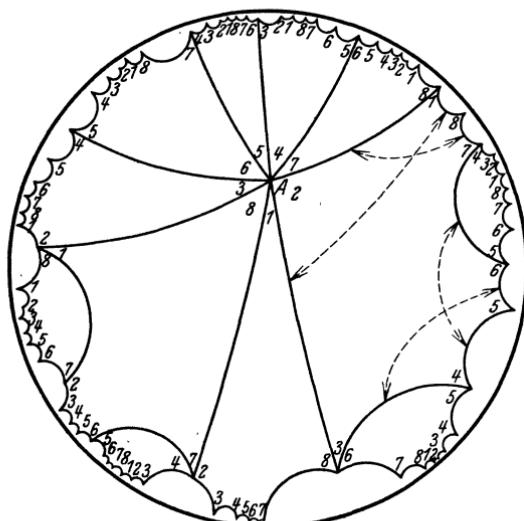


Abb. 249.

Eckpunkt  $A$  herum jede Ziffer genau einmal auftritt. Hieraus folgt, daß die Winkelsumme im Fundamentalbereich  $2\pi$  betragen muß. Auch in jeder anderen Schiebungsgruppe weisen die Fundamentalbereiche die analoge Anordnung auf, die Winkelsumme im Fundamentalbereich muß daher stets  $2\pi$  betragen. Ferner müssen die Seiten in einer bestimmten, hier nicht näher zu beschreibenden Zuordnung paarweise gleich sein. Im übrigen kann der Fundamentalbereich beliebig vorgegeben werden. Daß die Winkelsumme  $2\pi$  betragen muß, bildet den Grund dafür, warum keine viereckigen Fundamentalbereiche vorkommen können. Denn die Winkelsumme in einem hyperbolischen Viereck ist stets kleiner als  $2\pi$ , wie man leicht durch Zerlegung des Vierecks in zwei Dreiecke erkennt.

Noch weit größer ist die Mannigfaltigkeit der Schiebungsgruppen mit offenem Fundamentalbereich. Eine solche Gruppe kommt in der Theorie der elliptischen Modulfunktion zur Anwendung.