Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0049

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

§ 37. Methoden der Abbildung. Längentreue, inhaltstreue, geodätische, stetige und konforme Abbildung.

Wir haben öfters und auf verschiedene Arten Flächen aufeinander abgebildet, z. B. durch Zentralprojektion oder durch parallele Normalen. Wir wollen jetzt zusammenfassend die wichtigsten Arten von Abbildungen einander gegenüberstellen.

Das getreueste Bild einer Fläche gibt die *längentreue* Abbildung. Dabei ist die geodätische Entfernung zweier Punkte stets der geodätischen Entfernung ihrer Bildpunkte gleich, alle Winkel bleiben erhalten, und geodätische Linien gehen in geodätische Linien über. Wie schon erwähnt, lassen sich zwei beliebige Flächenstücke gewöhnlich nicht längentreu aufeinander abbilden. In entsprechenden Punkten müssen nämlich die GAUSSschen Krümmungen der Flächen übereinstimmen. Daher kann man auf ein Stück der Ebene nur solche Flächenstücke längentreu abbilden, deren GAUSSsche Krümmung überall verschwindet, also z. B. kein Stück einer Kugel. Jede Landkarte weist infolgedessen Verzerrungen auf.

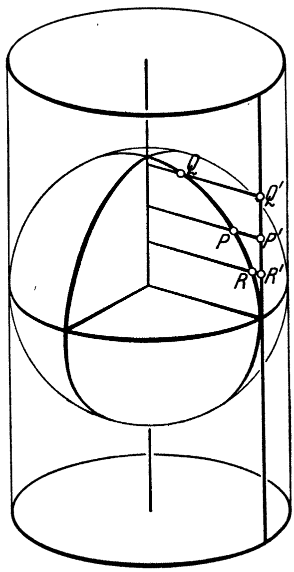

Abb. 250.

Weniger genau, dafür aber öfter anwendbar ist die *inhaltstreue* Abbildung. Sie wird durch die Forderung charakterisiert, daß jede geschlossene Kurve ein Flächenstück desselben Inhalts umschließt wie ihre Bildkurve. Es ist plausibel und leicht zu beweisen, daß diese Forderung für beliebige geschlossene Kurven erfüllt ist, wenn sie nur für alle „unendlich kleinen" geschlossenen Kurven gilt. Daher läßt sich die inhaltstreue Abbildung leicht differentialgeometrisch charakterisieren.

Die inhaltstreue Abbildung wird in der Geographie viel benutzt. Es gibt ein einfaches Verfahren, um Teile der Kugel inhaltstreu auf Teile der Ebene abzubilden. Man legt um die Kugel einen Kreiszylinder vom gleichen Radius (Abb. 250). Man projiziert die Kugelpunkte nach außen längs der Zylindernormalen auf den Zylinder. Schneidet man den Zylinder längs einer Erzeugenden auf und wickelt ihn auf die Ebene ab, so erhält man, wie die Rechnung zeigt, ein inhaltstreues Bild der Kugel in der Ebene. Das Bild wird offenbar um so stärker verzerrt, je weiter man sich von dem Berührungskreise des Zylinders mit der Kugel entfernt.

Ebenfalls wichtig in der Geographie, vor allem für Schiffskarten, ist die *geodätische* Abbildung. Bei ihr wird verlangt, daß die geodätischen Linien der einen Fläche in die der anderen übergehen. Die längentreuen

Abbildungen sind also spezielle geodätische Abbildungen. Eine andere solche Abbildung haben wir beim Studium der elliptischen Geometrie betrachtet; projizieren wir die Kugel von ihrem Mittelpunkt aus auf eine Ebene, so gehen die Großkreise der Kugel in die Geraden der Ebene über; die Abbildung ist also geodätisch. Damit ist gleichzeitig eine geodätische Abbildung aller Flächen konstanter positiver GAUSSscher Krümmung auf die Ebene gegeben. Denn alle diese Flächen lassen sich längentreu auf Kugeln abbilden. Auch für alle Flächen konstanter negativer GAUSSscher Krümmung gibt es eine geodätische Abbildung auf die Ebene. Sie wird durch das in § 35 geschilderte Modell der hyperbolischen Ebene geleistet.

Es läßt sich zeigen, daß es außer den Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung keine Fläche gibt, die auf die Ebene geodätisch abgebildet werden kann. Das allgemeine Problem, wann zwei krumme Flächenstücke *aufeinander* geodätisch abgebildet werden können, führt auf schwierige Rechnungen. Die Verallgemeinerung dieses Problems von den Flächen auf drei- oder mehrdimensionale Räume spielt eine gewisse Rolle in der neueren Physik; nach der allgemeinen Relativitätstheorie hat man nämlich die Bahnkurven materieller Punkte als geodätische Linien eines vierdimensionalen Kontinuums aufzufassen.

Die allgemeinste Abbildung, die überhaupt der Anschauung zugänglich ist, ist die *stetige* Abbildung. Bei ihr wird nur verlangt, daß sie umkehrbar eindeutig ist und daß benachbarte Punkte benachbart bleiben. Eine stetige Abbildung kann also jede Figur beliebig verzerren, nur dürfen zusammenhängende Teile nicht auseinandergerissen und getrennte Teile nicht zusammengeheftet werden. Trotz dieser großen Allgemeinheit vermag die stetige Abbildung nicht zwei beliebige Flächenstücke ineinander überzuführen. Ein Beispiel zweier Flächenstücke, die sich nicht stetig aufeinander abbilden lassen, sind die Kreisfläche und das ebene Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen (Abb. 251). Nicht einmal die Ränder dieser beiden Flächenstücke lassen sich stetig aufeinander abbilden, da die Kreisscheibe von einer zusammenhängenden Kurve berandet wird, während der Rand des Ringgebiets aus zwei getrennten Stücken besteht.

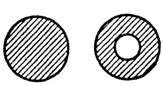

Abb. 251.

Die Frage, wann zwei Flächen stetig aufeinander abgebildet werden können, gehört in den Problemkreis der Topologie, den wir im letzten Kapitel behandeln. Offenbar umfaßt diese Abbildungsart alle übrigen; eine geometrische Abbildung wird immer nur, soweit sie stetig ist, brauchbare Ergebnisse liefern. So hatten wir nach Abb. 250 Kugelstücke inhaltstreu auf die Ebene abgebildet. Die ganze Kugeloberfläche geht offenbar in ein Rechtecksgebiet über. Man erkennt, daß die Abbildung auf dem Rand des Rechtecks ihre anschauliche Bedeutung verliert, weil sie dort aufhört, stetig zu sein. In der neueren Topologie werden allerdings noch allgemeinere Abbildungen betrachtet, die nicht umkehrbar eindeutig, sondern nur in einer Richtung eindeutig und stetig sind, z. B. Abbildungen eines Flächenstücks auf ein Kurvenstück.

Eingehender als alle bisher genannten Abbildungsarten ist die *winkeltreue* oder *konforme* Abbildung untersucht worden. Sie wird durch die Forderung gekennzeichnet, daß die Winkel, unter denen sich zwei Kurven schneiden, unverzerrt wiedergegeben werden. Abgesehen von den längentreuen Abbildungen sind die stereographische Projektion und die Kreisverwandtschaften die einfachsten Beispiele solcher Abbildungen. Eine winkeltreue Abbildung von Flächen negativer GAUSSscher Krümmung auf die Ebene gibt uns das POINCARÉsche Modell der hyperbolischen Geometrie.

Die winkeltreue Abbildung hat mit der längentreuen etwas Gemeinsames. Es läßt sich nämlich analytisch zeigen, daß sehr kleine Figuren bei winkeltreuer Abbildung fast unverzerrt bleiben; d. h. außer den Winkeln bleiben zwar nicht die Längen, wohl aber die Längenverhältnisse annähernd erhalten, um so genauer, je kleiner die betrachtete Figur ist. Die Bezeichnung *konform* weist auf diese Eigenschaft hin. Im kleinen kommt demnach die konforme Abbildung der längentreuen am nächsten unter den hier beschriebenen Abbildungsarten. Denn aus unseren Beispielen ist ersichtlich, daß bei inhaltstreuen oder geodätischen Abbildungen auch beliebig kleine Figuren beliebig stark verzerrt werden können.

Während nun die längentreue Abbildung nur in sehr beschränktem Maße anwendbar ist, besitzt die konforme Abbildung eine große Anpassungsfähigkeit, und gerade durch die Frage nach ihrer Anwendbarkeit ist die konforme Abbildung in den Mittelpunkt fruchtbarer geometrischer Untersuchungen gerückt. Die einfachste Frage dieser Art, wann nämlich zwei *ebene* Flächenstücke konform aufeinander abgebildet werden können, führt auf eine anschauliche Deutung der komplexen Zahlen und wird in der *geometrischen Funktionentheorie* behandelt.

§ 38. Geometrische Funktionentheorie. RIEMANNscher Abbildungssatz. Konforme Abbildung im Raum.

Wir legen ein cartesisches Koordinatensystem in der Ebene zugrunde und ordnen jedem beliebigen Punkt P mit den Koordinaten x, y die komplexe Zahl $z = x + iy$ zu. Hierdurch ist eine eindeutige Beziehung zwischen den komplexen Zahlen und den Punkten der Ebene hergestellt. Es ist zweckmäßig, diese Beziehung dadurch zu vervollständigen, daß man der Ebene wie in der Lehre von den Kreisverwandtschaften einen unendlich fernen Punkt P_∞ zuschreibt, den man der „Zahl" ∞ zuordnet. Man nennt diese anschauliche Realisierung der komplexen Zahlen die *Zahlenebene*.