Werk

Titel: Anschauliche Geometrie
Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan
Verlag: Springer
Ort: Berlin
Jahr: 1932
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN379425343
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

LOG Id: LOG_0051
LOG Titel: § 39. Konforme Abbildung krummer Flächen. Minimalflächen. Plateausches Problem.
LOG Typ: chapter

und Ebenen in sich über. Die Gesamtheit aller Kugelverwandtschaften bildet eine zehnparametrige Schar. Eine besonders einfache Kugelverwandtschaft ist die räumliche Inversion. Sie ist ähnlich definiert wie die Inversion in der Ebene; nachdem ein fester Punkt M und eine feste positive Zahl r willkürlich vorgegeben sind, wird jedem von M verschiedenen Punkt P derjenige Punkt Q als Bild zugeordnet, der auf der von M ausgehenden Halbgraden MP liegt und die Gleichung $MP \cdot MQ = r^2$ erfüllt. Jede Kugelverwandtschaft läßt sich aus einer räumlichen Inversion und einer Ähnlichkeitstransformation zusammensetzen.

§ 39. Konforme Abbildung krummer Flächen. Minimalflächen. PLATEAUsches Problem.

Ein Beispiel für eine konforme Abbildung einer gekrümmten Fläche auf die Ebene ist die stereographische Projektion. Durch sie geht jede konforme Abbildung in der Ebene in eine konforme Abbildung auf der Kugel über. Den konformen Abbildungen der Kugel, die einen Punkt N festlassen, entsprechen bei stereographischer Projektion von N aus die konformen Abbildungen der euklidischen Ebene auf sich selbst. Wie wir erwähnten, sind das die Ähnlichkeitstransformationen und nur sie. Demnach sind alle konformen Abbildungen der Kugelfläche auf sich, die einen Punkt festlassen, Kreisverwandtschaften. Jede beliebige konforme Abbildung der Kugelfläche auf sich kann ich durch Drehung der Kugel um einen Durchmesser in eine Abbildung verwandeln, die einen Punkt festläßt. Daher muß die Gesamtheit aller konformen Abbildungen der Kugel auf sich mit der Gesamtheit der Kreisverwandtschaften auf der Kugel identisch sein, also der Transformationen, die den Kreisverwandtschaften der Ebene durch stereographische Projektion entsprechen. Die Kreisverwandtschaften der Ebene werden durch Formel (1), S. 232, dargestellt. Dabei treten vier komplexe Konstanten auf, die jedoch nur bis auf einen komplexen gemeinsamen Faktor bestimmt sind. Demnach bilden die Kreisverwandtschaften der Ebene und ebenso die der Kugel eine sechsparametrige Schar.

Man kann nun zeigen, daß jede beliebige geschlossene Fläche, die stetig auf die Kugel abgebildet werden kann, wie z. B. das Ellipsoid, auch konform auf die Kugel abbildbar ist. Hieraus folgt, daß irgend zwei solche Flächen stets auch aufeinander konform abgebildet werden können, und daß jede solche Fläche eine genau sechsparametrige Schar konformer Abbildungen auf sich selbst gestattet.

Die Flächen, die sich stetig auf das Innere eines Kreises oder auf die euklidische Ebene abbilden lassen, wie z. B. das hyperbolische Paraboloid, können sicher nicht alle konform aufeinander abgebildet werden, da ja z. B. das Kreisinnere nicht konform auf die euklidische Ebene abbildbar ist. Es gilt aber der wichtige „Entweder-Oder"-Satz, daß jede solche Fläche entweder auf das Innere eines Kreises oder auf die euklidische Ebene konform abgebildet werden kann.

Auch für andere Flächentypen, z. B. die Oberfläche eines Torus, läßt sich die Frage nach der konformen Abbildbarkeit vollständig beantworten. Da hierbei topologische Hilfsmittel benötigt werden, werden wir erst im Kapitel über Topologie darauf zurückkommen.

Ein besonders interessantes Beispiel konformer Abbildung geben uns die Minimalflächen. Wir haben diese Flächen dadurch charakterisiert (S. 167), daß in jedem ihrer Punkte beide Hauptkrümmungen entgegengesetzt gleich sind. Aus dieser Definition läßt sich leicht folgern, daß bei den Minimalflächen die sphärische Abbildung konform ist, und umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß außer den Kugeln die Minimalflächen die einzigen Flächen sind, bei denen die sphärische Abbildung konform ausfällt. Die Minimalflächen stehen deswegen in enger Beziehung zur Funktionentheorie. Man kann jede analytische komplexe Funktion zur Bestimmung einer Minimalfläche verwenden.

Spannt man in einen geschlossenen Draht eine Membran aus Seifenhaut, so nimmt diese, wie früher erwähnt, die Gestalt einer Minimalfläche an. So ergibt sich das zuerst von PLATEAU gestellte Problem, zu jeder gegebenen geschlossenen Raumkurve ein Minimalflächenstück anzugeben, das von der Kurve begrenzt wird. Lange Zeit hat man sich vergeblich bemüht, auch nur die Existenz einer solchen Minimalfläche für jeden vorgegebenen Rand zu beweisen. Erst in neuester Zeit hat J. DOUGLAS[1] eine Lösung des allgemeinen PLATEAUschen Problems gegeben.

DOUGLAS ersetzt das Problem durch ein noch umfassenderes; er sucht nicht nur eine Minimalfläche M, die in die gegebene Raumkurve r eingespannt ist, sondern auch ihre konforme Abbildung auf eine ebene Kreisscheibe K. Zu diesem Zweck wird zunächst die Abbildung betrachtet, durch die hierbei die Kurve r auf die Peripherie k von K übergeht. Es zeigt sich, daß diese Abbildung durch eine Extremaleigenschaft ausgezeichnet ist. Jeder Sehne s von r entspricht durch die Abbildung ihrer Endpunkte eine Sehne s' von k. Bezeichnet man das Verhältnis s'/s als Streckung der Sehne s und bildet man vom reziproken Quadrat der Streckung den Mittelwert über alle Sehnen von r, so wird bei der gesuchten Abbildung dieser Mittelwert so klein wie möglich[2]. Man kann

[1] Trans. Amer. math. Soc. Bd. **33** (1931). Unter etwas spezielleren Voraussetzungen hat kurz vorher T. RADÓ das PLATEAUsche Problem gelöst [Math. Z. Bd. **32** (1930)].

[2] In Formeln: Sind P und Q zwei Punkte von r, die in die Punkte P' und Q' von k übergehen, sind α und β die Winkelargumente von P' und Q' und setzt man $\frac{PQ}{P'Q'} = v(\alpha, \beta)$, so hat das Doppelintegral

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} [v(\alpha, \beta)]^2 \, d\alpha \, d\beta$$

bei der gesuchten Abbildung den kleinstmöglichen Wert.

also sagen, daß die gesuchte Abbildung alle Punkte von r im Mittel möglichst weit voneinander entfernt. Es läßt sich nun zeigen, daß eine Abbildung mit dieser Extremaleigenschaft stets existiert. Mit Hilfe dieser Abbildung $r \to k$ lassen sich dann die cartesischen Koordinaten der übrigen Punkte von M als Ortsfunktionen auf K durch bekannte analytische Formeln[1] darstellen.

Setzt man r als ebene Kurve voraus, so entartet M in das ebene Gebiet G, das von r begrenzt wird. Das DOUGLASsche Verfahren liefert dann eine konforme Abbildung von G auf K, also eine Lösung des RIEMANNschen Abbildungsproblems. Diese Lösung ergibt sich offenbar gerade auf dem umgekehrten Weg wie bei dem früher beschriebenen Verfahren. Das frühere Konstruktionsverfahren ging von einem Paar innerer Punkte von G aus; indem man den hyperbolischen Abstand ihrer Bilder vergrößerte, wurde der Rand von G von selbst allmählich mit dem Rand von K zur Deckung gebracht. Das Verfahren von DOUGLAS dagegen ermittelt zunächst eine geeignete durch eine Extremaleigenschaft ausgezeichnete Abbildung des Randes von G auf den Rand von K. Die Abbildung der inneren Punkte ergibt sich dann von selbst.

Für spezielle Raumkurven r lassen sich die zugehörigen Minimalflächen auf viel einfacherem Wege bestimmen, z. B. wenn man für r ein räumliches geschlossenes geradliniges Polygon wählt. Während im allgemeinen die Minimalfläche in r einen singulären Rand besitzt, kann man es durch spezielle Wahl von r erreichen, daß die Minimalfläche sich über r hinaus regulär fortsetzen läßt. Auf diese Weise ist es NEOVIUS[2] gelungen, eine Minimalfläche zu konstruieren, die sich ohne Singularität und Selbstdurchdringung durch den ganzen Raum erstreckt und die gleiche Symmetrie besitzt wie das Diamantgerüst.

Das sphärische Bild dieser Fläche kann ebenfalls keinen Rand besitzen. Auch läßt sich zeigen, daß auf Minimalflächen keine parabolischen Kurven verlaufen, in denen das sphärische Bild umgeklappt sein könnte. Andererseits kann das sphärische Bild der NEOVIUSschen Fläche nicht glatt die ganze Kugel überdecken, da sonst jene Fläche stetig auf die Kugel abbildbar wäre. Der Widerspruch löst sich dadurch, daß auf der NEOVIUSschen Fläche Affensättel auftreten. In ihnen wird ein einmaliger Umlauf auf der Fläche in einen mehrmaligen Umlauf auf dem sphärischen Bild verwandelt (vgl. S. 179). Das sphärische Bild der NEOVIUSschen Minimalfläche überzieht nun die Kugel in unendlich vielen Schichten, die untereinander in den Bildern der Affensättel zusammenhängen. Auch bei vielen anderen Minimalflächen zeigt das sphärische Bild einen analogen Verlauf. RIEMANN wurde auf derart über der Kugel oder der Ebene ausgebreitete Flächen geführt, indem er die konforme Abbildung, die

[1] POISSONsche Integrale über r.

[2] E. R. NEOVIUS: Bestimmung zweier speziellen periodischen Minimalflächen. Akad. Abhandlung, Helsingfors 1883.

durch nichtlineare Funktionen, z. B. $w = z^2$, vermittelt wird, in ihrem Gesamtverlauf verfolgte. Die Stellen, in denen die Schichten einer RIEMANNschen Fläche analog wie das sphärische Bild eines Affensattels miteinander zusammenhängen, werden nach RIEMANN als Windungspunkte bezeichnet.

Fünftes Kapitel.

Kinematik.

Wir haben bisher hauptsächlich die im Raum *festen* Gebilde untersucht, da die Geometrie von diesen Gebilden ausgehen muß. Aber bereits in den Elementen der Geometrie spielt der Begriff der *Bewegung* eine Rolle. So haben wir zwei Figuren kongruent genannt, wenn sie durch eine Bewegung miteinander zur Deckung gebracht werden können. Ferner haben wir bewegliche Hyperboloide betrachtet (S. 15), haben Regelflächen durch eine wandernde Ebene bestimmt (S. 181) und haben Flächen verbogen und verzerrt (viertes Kapitel). In der Kinematik werden nun Bewegungen systematisch untersucht.

Wir wollen zunächst einen Teil der Kinematik behandeln, der eng mit der elementaren Metrik zusammenhängt: die Lehre von den Gelenkmechanismen. An zweiter Stelle wollen wir die stetigen Bewegungsvorgänge allgemeiner untersuchen; dabei werden wir nach differentialgeometrischen Methoden verfahren.

§ 40. Gelenkmechanismen.

Einen ebenen Gelenkmechanismus nennt man jedes ebene System von starren Stäben, die teilweise miteinander oder mit festen Punkten der Ebene drehbar verbunden sind, so daß das System in seiner Ebene noch bewegt werden kann. Der einfachste solche Mechanismus ist ein einziger starrer Stab, der in einem Endpunkt drehbar in der Ebene befestigt ist, also ein Zirkel. So wie der freie Endpunkt des Zirkels einen Kreis beschreibt, bewegen sich auch bei allen anderen ebenen Gelenkmechanismen alle Punkte der Stäbe auf algebraischen Kurven; d. h. auf Kurven, deren Koordinaten in einem cartesischen System einer algebraischen Gleichung genügen. Umgekehrt kann man zu jeder noch so komplizierten algebraischen Kurve eine geeignete Verbindung von Gelenken finden, mit deren Hilfe diese Kurve (wenigstens stückweise) konstruiert werden kann.

Für die einfachste algebraische Kurve, die gerade Linie, eine derartige Konstruktion anzugeben, ist das berühmte Problem der Geradführung. Ein Modell der Geradführung, den Inversor von PEAUCELLIER, werde hier näher betrachtet. Wir gehen aus von dem in Abb. 253