

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0052

LOG Titel: Fünftes Kapitel. Kinematik.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

durch nichtlineare Funktionen, z. B. $w = z^2$, vermittelt wird, in ihrem Gesamtverlauf verfolgte. Die Stellen, in denen die Schichten einer RIEMANNschen Fläche analog wie das sphärische Bild eines Affensattels miteinander zusammenhängen, werden nach RIEMANN als Windungspunkte bezeichnet.

Fünftes Kapitel.

Kinematik.

Wir haben bisher hauptsächlich die im Raum *festen* Gebilde untersucht, da die Geometrie von diesen Gebilden ausgehen muß. Aber bereits in den Elementen der Geometrie spielt der Begriff der *Bewegung* eine Rolle. So haben wir zwei Figuren kongruent genannt, wenn sie durch eine Bewegung miteinander zur Deckung gebracht werden können. Ferner haben wir bewegliche Hyperboloide betrachtet (S. 15), haben Regelflächen durch eine wandernde Ebene bestimmt (S. 181) und haben Flächen verbogen und verzerrt (viertes Kapitel). In der Kinematik werden nun Bewegungen systematisch untersucht.

Wir wollen zunächst einen Teil der Kinematik behandeln, der eng mit der elementaren Metrik zusammenhängt: die Lehre von den Gelenkmechanismen. An zweiter Stelle wollen wir die stetigen Bewegungsvorgänge allgemeiner untersuchen; dabei werden wir nach differentialgeometrischen Methoden verfahren.

§ 40. Gelenkmechanismen.

Einen ebenen Gelenkmechanismus nennt man jedes ebene System von starren Stäben, die teilweise miteinander oder mit festen Punkten der Ebene drehbar verbunden sind, so daß das System in seiner Ebene noch bewegt werden kann. Der einfachste solche Mechanismus ist ein einziger starrer Stab, der in einem Endpunkt drehbar in der Ebene befestigt ist, also ein Zirkel. So wie der freie Endpunkt des Zirkels einen Kreis beschreibt, bewegen sich auch bei allen anderen ebenen Gelenkmechanismen alle Punkte der Stäbe auf algebraischen Kurven; d. h. auf Kurven, deren Koordinaten in einem cartesischen System einer algebraischen Gleichung genügen. Umgekehrt kann man zu jeder noch so komplizierten algebraischen Kurve eine geeignete Verbindung von Gelenken finden, mit deren Hilfe diese Kurve (wenigstens stückweise) konstruiert werden kann.

Für die einfachste algebraische Kurve, die gerade Linie, eine derartige Konstruktion anzugeben, ist das berühmte Problem der Geradföhrung. Ein Modell der Geradföhrung, den Inversor von PEAUCELLIER, werde hier näher betrachtet. Wir gehen aus von dem in Abb. 253

gezeichneten Mechanismus, der aus sechs Stäben besteht. Von ihnen sind a und b gleich lang, ebenso c , d , e , f . a und b sind in dem festen Punkt O drehbar befestigt. In jeder Stellung dieses Mechanismus müssen P und Q mit O in einer Geraden liegen, nämlich auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle AOB$.

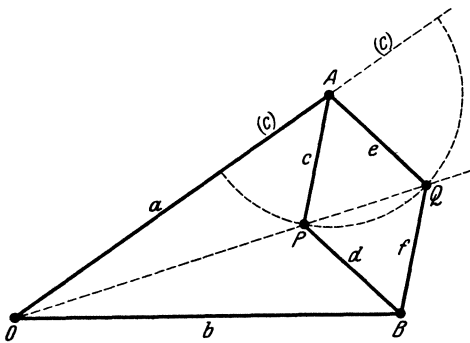


Abb. 253.

Mit Hilfe des Kreises um A mit dem Radius c erkennt man ferner auf Grund des Sehensatzes, daß in jeder Stellung des Mechanismus die Relation gilt:

$$OP \cdot OQ = (OA + c)(OA - c) = a^2 - c^2.$$

Demnach liegen P und Q invers zum Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius

$\sqrt{a^2 - c^2}$ (vgl. S. 223, 224). Offenbar kann man P an jede Stelle des konzentrischen Kreisrings um O mit den Radien $\sqrt{a^2 - c^2}$ und $a - c$ bringen. Unser Apparat konstruiert also zu jedem Punkt dieses Gebiets den inversen bezüglich des genannten Kreises; der Mechanismus wird deshalb ein Inversor genannt. Beschreibt nun P einen Kreis, der durch O geht,

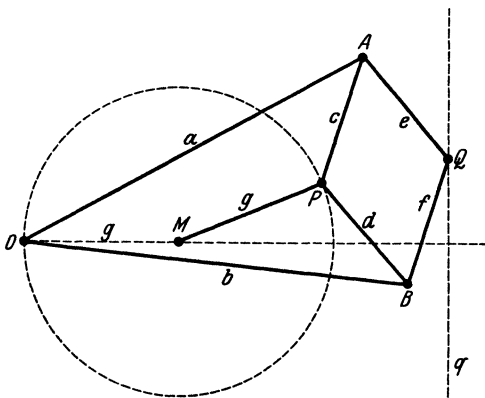


Abb. 254.

so muß Q eine Gerade durchlaufen (S. 223, 224). Wir bringen deshalb in P noch einen Stab g an (Abb. 254), dessen zweiten Endpunkt wir in einem Punkt M befestigen, der von O den Abstand g hat. Dann ist P gezwungen, auf dem Kreis um M mit dem Radius g zu bleiben. Wegen der Gleichung $OM = g$ geht dieser Kreis durch O . Daher beschreibt Q eine Gerade q , und unser Problem ist gelöst. Wie man

leicht einsieht, steht q senkrecht auf OM ; die PEAUCELLIERSCHE Geradföhrung ist daher zugleich ein Mittel, um auf eine gegebene Gerade ein Lot zu fallen.

Im Raum sind die Gelenkmechanismen in analoger Weise erklärt. Die Gelenke, in denen die Stäbe aneinander oder an festen Raumpunkten befestigt sind, müssen aber in diesem Fall nicht nur ebene Drehungen gestatten, sondern Drehungen in allen räumlichen Rich-

tungen. Für einen gewissen Spielraum läßt sich das durch Kugelgelenke praktisch erreichen. Die Stabenden eines räumlichen Gelenkmechanismus beschreiben stets algebraische Flächen. Dagegen ist bisher nicht bewiesen worden, daß jede algebraische Fläche durch einen Gelenkmechanismus konstruierbar ist. Dieser Satz ist höchst wahrscheinlich richtig.

Wir wollen wieder die einfachste dieser Konstruktionen, nämlich die ebene Führung eines Punkts, betrachten. Zu diesem Zweck gehen wir von dem beweglichen Stangenmodell des einschaligen Hyperboloids aus (S. 15 und 26). Seien g und g' zwei Geraden der einen Regelschar, h eine laufende Gerade der anderen Regelschar, die g und g' in den laufenden Punkten H und H' schneidet. Das Stangenmodell möge nun bewegt werden, aber unter Festhaltung der Stange g (vgl. Abb. 255).

Dann behält jeder Punkt H' von g' festen Abstand von dem auf g zugeordneten Punkt H . Die Punkte von g' beschreiben also bei der Bewegung des Modells Kugeln um die zugeordneten Punkte von g . Wählen wir nun die Stellung der Geraden h so, daß sie g im unendlich fernen Punkt U von g schneidet, und ist U' der Schnittpunkt von h mit g' , also der U zugeordnete Punkt, so muß U' im Endlichen liegen; denn sonst wäre $UU' = h$ eine unendlich ferne Gerade der Fläche, diese wäre also kein Hyperboloid, sondern ein hyperbolisches Paraboloid (vgl. S. 106). Bei der Bewegung des Modells beschreibt demnach U' eine Kugel mit unendlich großem Radius, d. h. eine Ebene.

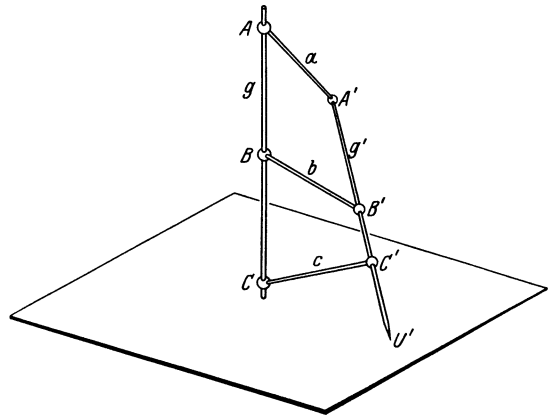


Abb. 255.

Aus dieser Überlegung ergibt sich eine einfache Ebenführung. Durch drei Stangen der einen Schar ist das Hyperboloid völlig bestimmt. Wir befestigen daher an einer festen Stange g (Abb. 255) in drei Kugelgelenken A, B, C drei weitere Stangen a, b, c . Deren Enden befestigen wir durch Kugelgelenke an drei Punkte A', B', C' einer Stange g' . Damit a, b, c ein Hyperboloid und kein hyperbolisches Paraboloid erzeugen, genügt es, die Punkte so zu wählen, daß $AB : AC \neq A'B' : A'C'$. Man kann nämlich zeigen, daß auf einem hyperbolischen Paraboloid die Abstände dreier Punkte auf g sich stets verhalten wie die Abstände der auf g' zugeordneten Punkte. In unserem Mechanismus hat jeder Punkt von

g' zwei Freiheitsgrade, denn das bewegliche, durch a, b, c bestimmte Hyperboloid kann ∞^1 Formen annehmen, und jede dieser Flächen gestattet noch eine beliebige Drehung um g als Achse¹. Nach dem vorher Gesagten

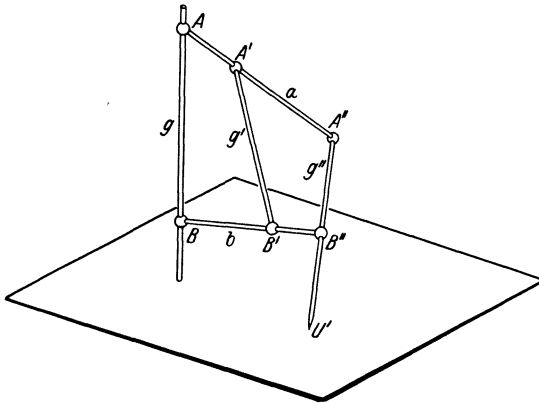


Abb. 256.

laufen die Punkte von g' auf Kugeln mit g als Durchmesser, und ein Punkt U' von g' beschreibt einen Teil einer auf g' senkrechten Ebene. Man erkennt, daß U' alle Punkte eines ebenen Kreisrings um g als Achse durchläuft. Damit ist unsere Aufgabe gelöst. Eine andere mögliche Lösung ist in Abb. 256 gezeichnet. Man erhält diesen Mechanismus aus dem vorigen, wenn man die Rollen der beiden Regelscharen des beweglichen Hyperboloids vertauscht.

§ 41. Bewegung ebener Figuren.

Über eine feste Ebene möge eine zweite bewegliche Ebene in beliebiger Weise hingeleiten. Wir wollen diesen Vorgang möglichst einfach geometrisch kennzeichnen.

Wie wir früher ausführlich erörtert haben, ist jede Bewegung einer Ebene in sich hinsichtlich ihrer Anfangs- und Endlage mit einer einzigen Drehung oder einer einzigen Parallelverschiebung identisch (S. 54). Wenn wir die Parallelverschiebungen als Drehungen um einen unendlich fernen Punkt auffassen, können wir sagen, daß ausnahmslos jede ebene Bewegung durch eine Drehung um einen bestimmten Mittelpunkt ersetzt werden kann.

Es sei nun ein bestimmter Bewegungsvorgang gegeben. Dann hat die bewegliche Ebene zu einer Zeit t eine bestimmte Lage A . Mit dieser Lage vergleichen wir die Lage A_h , die die bewegliche Ebene in einem kurz darauffolgenden Zeitpunkt $t + h$ einnimmt. Zu der Lagenänderung

¹ Man kann die Freiheitsgrade auch folgendermaßen abzählen: Wäre die Stange g' nicht vorhanden, so hätte das Tripel der Punkte $A'B'C'$ sechs Freiheitsgrade, da jeder einzelne auf einer Kugel beweglich ist und somit zwei Freiheitsgrade hat. Daß nun C' mit $A'B'$ auf einer Geraden liegen soll, bedeutet zwei Bedingungen, und daß $A'B'$ und $A'C'$ feste Länge haben, liefert je eine weitere Bedingung. Also ergeben sich $6 - 2 - 1 - 1 = 2$ Freiheitsgrade nach den in § 24 erläuterten Methoden.

$A \rightarrow A_h$ gehört ein bestimmter Drehmittelpunkt M_h . Wenn h immer kleiner gewählt wird, wenn sich also A_h immer weniger von A unterscheidet, rückt M_h gegen eine Grenzlage M . Der Punkt M heißt das Momentanzentrum der Bewegung im Zeitpunkt t . Die Bewegungsrichtung jedes andern Punktes P der bewegten Ebene steht in diesem Augenblick auf PM senkrecht.

Wenn wir das Momentanzentrum für alle Zeitpunkte der Bewegung bestimmen, so ergibt sich in der festen Ebene als geometrischer Ort der Momentanzentren eine Kurve, die die Polhodie der Bewegung genannt wird. Nun können wir aber bei derselben Bewegung auch die vorher bewegliche Ebene als fest und die vorher feste Ebene als beweglich ansehen; so wird der Vorgang einem Beobachter erscheinen, der mit der zuerst beweglich gedachten Ebene mitgeführt wird. Also ergibt sich auch in dieser Ebene eine bestimmte Kurve als Ort der Momentanzentra; sie wird als Herpolhodie bezeichnet. Beide Kurven sind überall stetig; sie können auch durchs Unendliche laufen, müssen aber dort im Sinne der projektiven Geometrie geschlossen sein, d. h. sie müssen bei Zentralprojektion auf eine andere Ebene in Kurven übergehen, die an den entsprechenden Stellen des Horizonts stetig sind.

Die genauere Untersuchung ergibt nun, daß durch die Gestalt der Polhodie und der Herpolhodie die Bewegung völlig bestimmt ist, wenn noch zwei Punkte beider Kurven gegeben werden, die in irgendeinem Moment der Bewegung aufeinanderfallen. Wir erhalten nämlich den Bewegungsvorgang wieder, wenn wir beide Kurven so aneinanderlegen, daß sie sich in den angegebenen Punkten berühren, und wenn wir hierauf die Herpolhodie unter Mitführung ihrer Ebene auf der Polhodie abrollen lassen, ohne daß sie gleitet. Dabei berühren die Kurven einander stets im jeweiligen Momentanzentrum der Bewegung. Da die Kurven aufeinander abrollen, ohne zu gleiten, so folgt, daß zwei Punkte der Polhodie und die zwei zugehörigen Punkte der Herpolhodie stets gleich lange Bögen auf beiden Kurven begrenzen.

Wir haben damit für die stetigen Bewegungsvorgänge eine ähnlich einfache Kennzeichnung gewonnen wie früher für die einzelnen Bewegungen; jeder stetige Bewegungsvorgang entsteht durch Abrollung einer Kurve auf einer andern. Dabei muß zugelassen werden, daß beide Kurven in Punkte ausarten (Drehung).

Als Beispiel betrachten wir in der festen Ebene eine beliebige Kurve k und in der beweglichen Ebene eine Gerade g und verlangen, daß bei der Bewegung ein Punkt P von g die Kurve k durchläuft und daß g dabei stets auf k senkrecht steht (Abb. 257). Aus der Definition des Krümmungsmittelpunkts folgt unmittelbar, daß das Momentanzentrum M hier stets der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt von k sein muß. Die Polhodie ist also die Evolute m von k , und die Herpolhodie in der beweglichen Ebene ist die Gerade g selbst, da M stets auf g liegt. Die Bewegung entsteht also durch Abrollen von g auf m .

Dabei beschreibt der auf g feste Punkt P die Kurve k , deren Evolute m ist. Der Abstand zweier Punkte von g ist stets gleich dem Bogen zwischen den zugehörigen Punkten von m . Hieraus folgt die früher (S. 158) angegebene Fadenkonstruktion jeder Kurve aus ihrer Evolute.

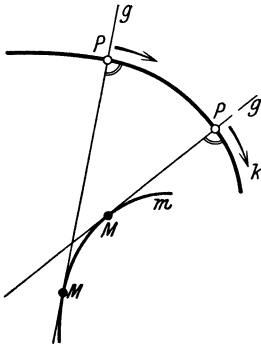


Abb. 257.

Besonders wichtig sind die Kurven, die die Punkte der beweglichen Ebene beschreiben, wenn Polhodie und Herpolhodie Kreise sind. Man erhält verschiedene Typen dieser Kurven, je nachdem der bewegliche Kreis den festen von innen oder von außen berührt. Im ersten Fall werden die Kurven Hypotrochoiden, im zweiten Epitrochoiden genannt. Liegt der die Kurve erzeugende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises, so heißt die Kurve eine Hypo- oder Epizykloide. Die Gestalt der Trochoiden und Zykloiden hängt ferner davon ab, wie sich der Radius des

festen Kreises zum Radius des rollenden verhält.

Nehmen wir zunächst an, der rollende Kreis k sei halb so groß wie der feste Kreis K und berühre ihn von innen. Wir wollen in diesem Fall die Bahnkurve eines Punkts P von k , also eine Hypozykloide, bestimmen¹. Wir beginnen mit dem Zeitpunkt, in dem k gerade in P den festen Kreis K berührt (Abb. 258). Wir betrachten ferner eine andere Lage k_1

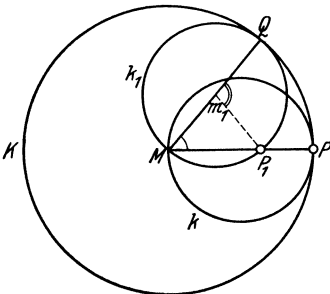


Abb. 258.

des rollenden Kreises. Dabei sei P nach P_1 gelangt. M und m_1 seien die Mittelpunkte der Kreise K und k_1 , und Q sei ihr Berührungspunkt. Da die Kreise aufeinander rollen, ohne zu gleiten, so ist der Bogen QP_1 von k_1 ebenso lang wie der Bogen QP von K . Da ferner k halb so groß ist wie K , so folgt: $\sphericalangle Qm_1P_1 = 2 \sphericalangle QMP$. Aus demselben Grund muß aber M auf der Peripherie von k_1 liegen, nach dem bekannten Satz über Peripherie- und Zentri-

winkel ist daher $\sphericalangle QMP_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle Qm_1P_1 = \sphericalangle QMP$. Demnach fällt die Gerade MP_1 mit MP zusammen, d. h. P_1 läuft bei der Bewegung auf der Geraden MP . Wir haben damit die überraschende Tatsache bewiesen, daß in unserem Fall die Hypozykloiden Durchmesser des festen Kreises sind. Gleichzeitig ergibt sich eine neue Methode der Geradföhrung.

¹ Es ist gleichgültig, welchen Peripheriepunkt wir herausgreifen. Denn wegen der Symmetrie der Figur unterscheiden sich die Zykloiden verschiedener Peripheriepunkte von k nur durch eine Drehung um den Mittelpunkt von K .

Um auch die zugehörigen Hypotrochoiden zu bestimmen, beschreiben wir die Bewegung mit Hilfe des eben gewonnenen Ergebnisses in anderer Weise. Sind nämlich S und T irgend zwei diametrale Peripheriepunkte von k , so entspricht dem Kreisbogen ST von k bei der Abrollung ein Viertelkreis von K . S und T bewegen sich daher auf zwei senkrechten Durchmesser s und t von K (Abb. 259). Man kann nun leicht berechnen: Wenn man eine Strecke ST so bewegt, daß ihre Endpunkte auf zwei sich senkrecht schneidenden Geraden s und t laufen, dann beschreibt der Mittelpunkt der Strecke einen Kreis, und jeder andere Punkt P der Strecke beschreibt eine Ellipse, deren Achsen auf die Geraden s und t fallen; die Achsenlängen sind gleich den beiden Abschnitten, die P auf der Strecke ST bestimmt. Daraus folgt, daß die Hypotrochoiden unserer Rollbewegung sämtlich Ellipsen sind. Denn jeder mit k fest verbundene Punkt liegt auf einem Durchmesser von k , also auf einer Geraden, von der zwei Punkte längs senkrechter Geraden gleiten.

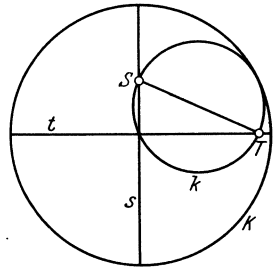


Abb. 259.

Wir betrachten nun den Fall, daß k von außen auf K abrollt. Die Epizykloiden haben dann die Form der Kurve e in Abb. 260. Man kann zeigen, daß wie bei dieser Kurve so auch bei allen anderen Epi- und Hypozykloiden stets Spitzen vorkommen. In ihnen trifft die Zyклоide den festen Kreis stets senkrecht. Die Spitzen entsprechen derjenigen Lage der Kreise, in der der erzeugende Punkt der Zyклоide gerade Berührungspunkt der Kreise ist. Da in unserem Fall k halb so groß ist wie K , so müssen genau zwei Spitzen auftreten.

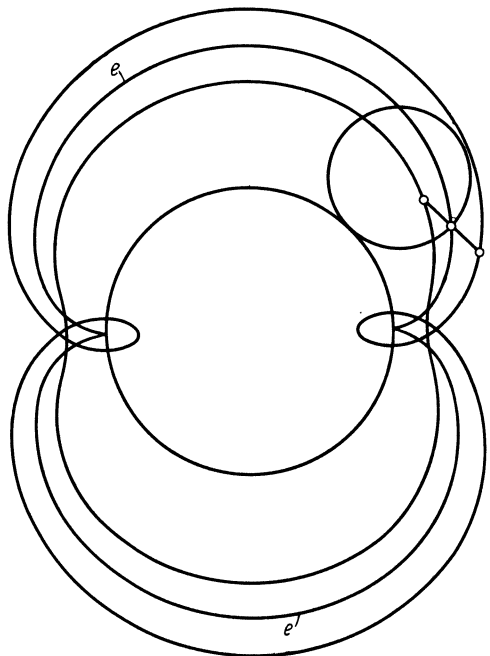


Abb. 260.

Unsere Kurve hat eine merkwürdige Tangenteneigenschaft. Sie wird durch Abb. 261 erläutert. Die Rollbewegung beginne, wenn der

Unsere Kurve hat eine merkwürdige Tangenteneigenschaft. Sie wird durch Abb. 261 erläutert. Die Rollbewegung beginne, wenn der

erzeugende Punkt P von k Berührungspunkt mit K ist, also die eine Spitze der Zyklode durchläuft. Es ist eine andere Lage k_1 von k gezeichnet. P ist längs eines Zyklidenbogens nach P_1 gewandert. Wir verbinden die Mittelpunkte M und m_1 von K und k_1 . Die Gerade Mm_1

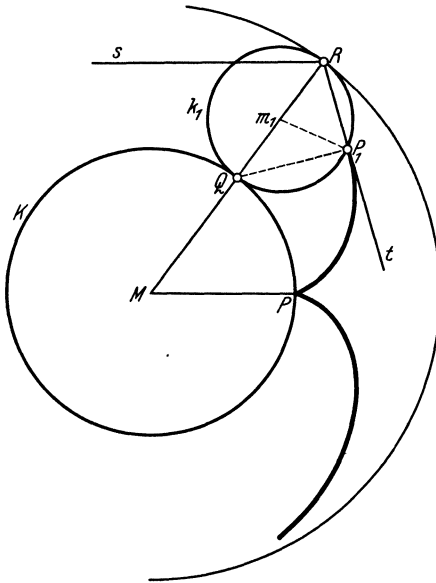


Abb. 261.

geht durch den Berührungspunkt Q von K und k_1 und trifft k_1 zum zweitenmal in R . t sei die Tangente der Zyklode in P_1 . Da Q das Momentanzentrum der Bewegung in der betrachteten Lage von k ist, steht die Bewegungsrichtung von P_1 , also auch die Gerade t , senkrecht auf QP_1 . Daher fällt t mit P_1R zusammen, denn $\sphericalangle QP_1R$ ist als Peripheriewinkel über dem Halbkreis ein Rechter. Eine ähnliche Tangenteneigenschaft haben alle Epi- und Hypozykloiden. Aus der Gleichheit des Bogens PQ von K und des Bogens P_1Q von k_1 folgt aber in unserem Fall, wo k halb so groß ist wie K :

$$\sphericalangle PMQ = \frac{1}{2} \sphericalangle P_1m_1Q = \sphericalangle P_1RQ.$$

Ziehen wir durch R die Parallele s zu MP , so bilden demnach s und t gleiche Winkel mit MR . Das läßt sich nun als ein Satz der geometrischen Optik formulieren: Spiegelt man ein Bündel paralleler Lichtstrahlen (s) an einem Kreis um M mit dem Radius MR , so umhüllen

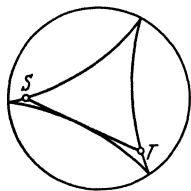


Abb. 262.

die reflektierten Strahlen (t) eine zweispitzige Epizykloide, deren Basiskreis den Mittelpunkt M und den Radius $\frac{1}{2}MR$ hat. Die Spitzen der Zyklode liegen von M aus in der Richtung (s). Die Kurve wird wegen dieser optischen Eigenschaft auch als Brennlinie des Kreises bezeichnet. Man kann sie täglich in Tassen und Kannen beobachten.

Zwei zugehörige Epitrochoiden sind in Abb. 260 gezeichnet. Alle Epitrochoiden sind singularitätenfrei, wenn der erzeugende Punkt im Innern des rollenden Kreises liegt, dagegen haben sie Schleifen und Doppelpunkte, wenn der erzeugende Punkt außerhalb gewählt ist. Die Zykloiden bilden den Übergang zwischen den beiden Arten von Trochoiden.

Der nächst einfache Fall ergibt sich, wenn der rollende Kreis ein drittelmal so groß ist wie der feste. Die dreispitzige Hypozykloide ist in Abb. 262 gezeichnet. Auch sie hat eine besondere Tangenteneigenschaft, die sich analytisch herleiten läßt. Das Tangentenstück ST im Innern der Kurve hat nämlich eine feste, vom Berührungspunkt unabhängige Länge. Diese Tatsache brachte man früher in Verbindung mit einem auf S. 189, 190 genannten geometrischen Minimumproblem: Eine Strecke soll in der Ebene so bewegt werden, daß sie sich schließlich um ihren Mittelpunkt um 180° gedreht hat, und daß das bei der Bewegung überstrichene Ebenenstück möglichst kleinen Flächeninhalt erhält. Wie schon erwähnt, kann man diesen Flächeninhalt durch geeignete Bewegung der Strecke beliebig klein machen, so daß also das Problem keine Lösung besitzt. Früher glaubte man aber, es gäbe eine Lösung, und man erhalte sie, wenn man die Strecke ST (Abb. 262) so auf einer dreispitzigen Zyklode tangential entlang gleiten läßt, daß die Endpunkte auf der Kurve bleiben. In der Tat lag die Vermutung nahe, daß dieses Flächenstück nicht mehr verkleinert werden könne.

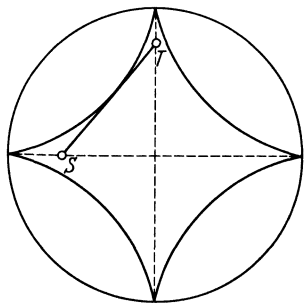


Abb. 263.

Auch die vierspitziige Hypozykloide (Abb. 263), die man gewöhnlich als Astroide bezeichnet, hat eine ähnliche Tangenteneigenschaft. Bezeichnet man nämlich mit S und T die Schnittpunkte einer Tangente mit den Symmetrieachsen der Kurve, so hat die Strecke ST feste Länge. Läßt man daher eine Strecke in ihren Endpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden

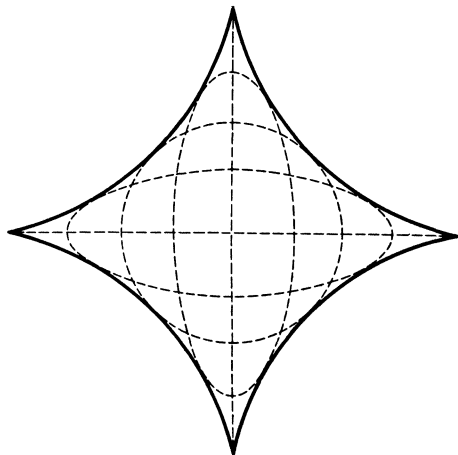


Abb. 264.

Geraden gleiten, so umhüllt diese Strecke eine Astroide. Wir hatten früher erwähnt, daß jeder Punkt einer so bewegten Strecke eine Ellipse beschreibt. Daraus läßt sich schließen, daß die Astroide von einer Ellipsenschar eingehüllt wird, bei der die Summe der Achsen konstant ist (Abb. 264).

Im allgemeinen ist der Verlauf der Zykloiden wesentlich verschieden, je nachdem die Radien r , R des rollenden und des festen Kreises kom-

mensurabel sind oder nicht. Ist r/R eine rationale Zahl, die als gekürzter Bruch a/b geschrieben sei, so besitzt die Zyklode b Spitzen und schließt sich, nachdem der bewegliche Kreis a -mal um den festen herumgerollt ist. Ist dagegen r/R irrational, so hat die Kurve unendlich viele Spitzen und schließt sich nicht. Man kann zeigen, daß die Kurve in diesem Falle an jedem Punkt des Gebietes, das von dem rollenden Kreis überstrichen wird, beliebig nahe vorbeikommt, wenn man den Verlauf der Kurve nur hinreichend weit verfolgt. Die Grenzfälle $r = \infty$ oder $R = \infty$ haben besonders einfache Bedeutung. Ist $r = \infty$, wird also der rollende Kreis durch eine Gerade ersetzt, so erhalten wir die Kreisevolvente (Abb. 8, S. 6). Ersetzt man den festen Kreis durch eine Gerade, so entsteht die „gewöhnliche Zyklode“. Auf einer solchen Kurve (Abb. 265) bewegt sich jeder Punkt der Peripherie eines Rades, das in der Ebene geradeaus rollt.

Wir haben bisher nur Bewegungsvorgänge betrachtet, bei denen eine einzige bewegliche Ebene vorkommt. Die Physik führt aber auf das Studium allgemeinerer Erscheinungen, der Relativbewegungen.



Abb. 265.

Denken wir uns außer der festen Ebene E und der beweglichen Ebene e noch eine Ebene f , die in anderer Weise als e über E hingeleitet. Dann wird f auch eine ganz bestimmte Bewegung gegenüber e ausführen, so wie sie ein mit e fest verbundener Beobachter registrieren würde. Man kann den Bewegungsvorgang (fE) von f bezüglich E in die Bewegungen (fe) und (eE) zerlegt denken. Oft läßt sich ein komplizierter Vorgang durch eine solche Zerlegung vereinfachen. So können wir besonders einfach die Rollbewegung zweier Kreise K und k zerlegen. E sei die feste Ebene von K , f die bewegliche von k . M , m seien die Mittelpunkte von K , k . Um die Bewegung des Punktes m gegen E zu beschreiben, brauchen wir nur eine Ebene e einzuführen, in der m fest ist und die sich um M dreht. Die Bewegung von f gegen e kann dann nur eine Drehung um m sein. Die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um M und m müssen sich umgekehrt verhalten wie die Radien der Kreise K und k . Somit ergibt sich die Zyklidenbewegung als Resultat zweier Drehungen. Hierauf beruht die Bedeutung der Zykliden und Trochoiden in der Astronomie. Da nämlich die Bahnen aller Planeten um die Sonne annähernd kreisförmig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit sind und annähernd in derselben Ebene, der Ekliptik, verlaufen, so erscheint von der Erde aus die Bahn jedes Planeten ungefähr als Trochoide. So gab das vorkopernikanische

geozentrische System der Astronomie Veranlassung zum eingehenden Studium dieser Kurven.

In unserem Beispiel sind M und m die Momentanzentra der Bewegungen (eE) und (fe) . Das Momentanzentrum Q der Zykloidenbewegung (fE) ist, wie erwähnt, der Berührungspunkt der Kreise k und K . Die drei Momentanzentren liegen also auf einer Geraden. Man kann nun zeigen, daß ein analoger Satz allgemein gilt: Betrachtet man eine Bewegung (fE) , die sich aus den Bewegungen (fe) und (eE) zusammensetzt, so liegen in jedem Zeitpunkt die Momentanzentra von (fE) , (fe) und (eE) in einer Geraden.

§ 42. Ein Apparat zur Konstruktion der Ellipse und ihrer Rollkurven¹.

Zwei Stäbe c und c' der gleichen Länge c seien in ihren Endpunkten F_1, F_2 bzw. F'_1, F'_2 gelenkig mit zwei weiteren Stäben a_1 und a_2 der gleichen Länge $a > c$ verbunden (Abb. 266), so daß ein ebenes überschlagenes Viereck mit gleich langen Gegenseiten entsteht. Der Schnittpunkt E der Stäbe a_1 und a_2 wird auf diesen Stäben seinen Ort verändern, wenn man das Gelenkviereck in der Ebene seine verschiedenen möglichen Gestalten annehmen läßt.

Im Punkt E sei ein Gelenk mit zwei gegeneinander drehbaren Hülsen angebracht, in denen die Stäbe a_1 und a_2 gleiten können. Ich halte nun den Stab c fest und betrachte die Kurve, die dann der Punkt E noch beschreiben kann. Ich behaupte, das ist eine Ellipse

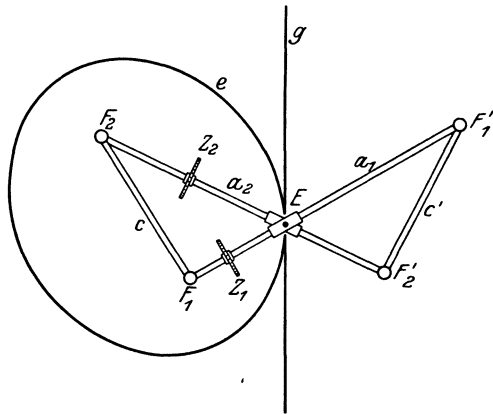


Abb. 266.

e mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der konstanten Abstandssumme a . Beweis: Die Dreiecke $F_1F_2F'_2$ und $F_1F'_1F'_2$ sind bei jeder Lage des Gelenkvierecks kongruent, weil sie paarweise gleiche Seiten haben. Darum ist $\sphericalangle F_1F'_2F_2 = \sphericalangle F'_2F_1F'_1$, d. h. das Dreieck $F_1F'_2E$ ist gleichschenkelig. Hieraus folgt aber: $F_1E + EF_2 = F'_2E + EF_2 = a$, wie behauptet war.

Nun seien noch in beliebigen Punkten der Stäbe a_1 und a_2 zwei Zahnräder Z_1 und Z_2 angebracht, die sich um diese Stäbe als Achsen

¹ Dieser Apparat ist von R. C. YATES angegeben worden (The Description of a surface of constant curvature, Amer. Math. Monthly, 1931).

drehen, jedoch nicht an ihnen entlanggleiten können (Abb. 266). Der Punkt E möge über irgendeine Kurve k hingeführt werden, während gleichzeitig die Zahnräder auf der Kurvenebene rollen mögen und die Fixierung der Punkte F_1, F_2 aufgegeben wird. Die Zahnräder bewirken, daß die Bewegungsrichtung des Radmittelpunkts in die Radebene fällt und daher stets auf dem Stab senkrecht steht, der das Rad trägt. Dann muß auch jeder andere Punkt der Stäbe a_1 und a_2 sich stets senkrecht zur jeweiligen Stabrichtung fortbewegen. Das läßt sich streng daraus schließen, daß die Abstände zweier Punkte eines Stabes konstant bleiben. Denken wir uns nun bei der Bewegung eine zur Ebene von k parallele Ebene f fest mit dem Stab c verbunden, so ist der Punkt E stets das Momentanzentrum für die Bewegung dieser Ebene. Denn da sich jeder Punkt von f stets senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem jeweiligen Momentanzentrum fortbewegt (vgl. S. 243), und da andererseits F_1 sich stets senkrecht zu a_1 fortbewegt, so muß

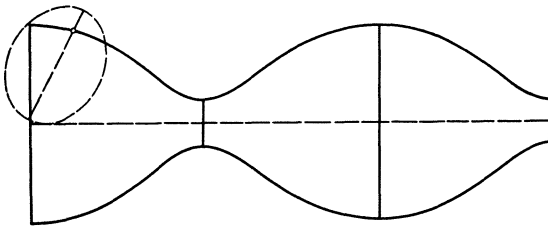


Abb. 267.

das Momentanzentrum stets auf a_1 liegen; ebenso aber auch auf a_2 . Es muß also in den Schnittpunkt dieser Stäbe fallen. Die Polhodie der Bewegung von f ist daher die Kurve k . Die Herpolhodie aber muß die Ellipse e sein, da wir gezeigt haben, daß E diese Ellipse beschreibt, wenn wir den Stab c festhalten. Die Punkte der Ebene f werden also durch unseren Apparat auf denselben Kurven geführt wie beim Abrollen der Ellipse e auf k . Man nennt jene Kurven Rollkurven der Ellipse.

Unter den Rollkurven der Ellipse ist besonders die wichtig, die ein Brennpunkt beschreibt, wenn die Ellipse auf einer Geraden rollt. Eine solche Kurve wird in Abb. 267 dargestellt. Der Apparat von YATES führt die Ecken des Gelenkvierecks auf solchen Kurven, wenn wir den Punkt E auf einer Geraden g führen. Jeder andere Punkt des Stabes a_1 beschreibt eine Parallelkurve zur Bahnkurve des Punktes F_1 oder F'_1 . Denn der Stab a_1 ist, wie schon erwähnt, gemeinsames Lot der Bahnkurven aller seiner Punkte. Hiernach führt der Apparat auf einen merkwürdigen geometrischen Satz: Man trage auf allen Normalen einer Rollkurve eines Ellipsenbrennpunktes vom Fußpunkt aus nach dem Krümmungsmittelpunkt zu Strecken ab, die gleich der konstanten Abstandssumme der Ellipse sind; dann liegen die Endpunkte jener Strecken wieder auf der Rollkurve eines Brennpunktes einer Ellipse; diese ist zur ersten Ellipse kongruent und rollt auf der gleichen Kurve wie jene, aber auf der andern Seite, ab.

Die in Abb. 267 gezeichnete Rollkurve tritt als Meridian der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung auf. Die Krümmung ist gleich der reziproken halben Abstandssumme der erzeugenden Ellipse. Wir erwähnten auf S. 202, daß es zu jeder Fläche konstanter mittlerer Krümmung eine Parallelfäche konstanter positiver GAUSSScher Krümmung gibt. In unserem Fall muß diese Parallelfäche wieder eine Rotationsfläche sein, und ihr Meridian muß eine Parallelkurve zum Meridian der zuerst betrachteten Fläche sein. Demnach beschreibt ein Punkt des Stabes a_1 in unserem Apparat eine Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter positiver GAUSSScher Krümmung. Aus der auf S. 202 angegebenen Krümmungsrelation läßt sich folgern, daß gerade der Mittelpunkt des Stabes a_1 diese Kurve beschreibt. Man erhält die Meridiane aller Rotationsflächen konstanter positiver GAUSSScher Krümmung mit Ausnahme der Kugel, wenn man den Stablängen c und a alle möglichen Werte zumißt.

§ 43. Bewegungen im Raum.

Wir übertragen die Betrachtungen des vorigen Abschnitts auf den Fall, daß ein Raum oder Raumstück r sich in einem als fest gedachten Raum R bewegt. Im Raum kann jede einzelne Bewegung durch eine Drehung um eine bestimmte Achse und eine Translation längs dieser Achse, d. h. durch eine Schraubung ersetzt werden (S. 73). Mit Ausnahme der Translationen wird dadurch jeder Bewegung eine bestimmte Gerade als Schraubungs- bzw. Drehungsachse zugeordnet. Die Sonderstellung der Translationen kann man aufheben, indem man sie als Drehungen um unendlich ferne Achsen auffaßt.

Indem man eine Lage des beweglichen Raums mit einer Nachbarlage vergleicht, kommt man analog wie in der Ebene zur Konstruktion der „momentanen Schraubungsachse“ der Bewegung in einem Zeitpunkt. Im Laufe des Vorgangs ändert diese Gerade stetig ihre Lage und beschreibt in R und r je eine Regelfläche. Sie entsprechen der Polhodie und der Herpolhodie der ebenen Bewegungen und werden als die feste und die bewegliche Polfläche der Bewegung bezeichnet. Ein räumlicher Bewegungsvorgang ist durch Angabe der beiden Polflächen fest bestimmt, wenn noch für eine Gerade der einen Polfläche angegeben wird, welche Gerade der anderen Polfläche ihr entspricht. Man hat die beiden Flächen so aneinanderzulegen, daß jene beiden Geraden zusammenfallen und die Flächen einander längs dieser Geraden berühren. Die Bewegung entsteht dann, wenn man die bewegliche Polfläche auf der festen „abschrotet“, d. h. sie in bestimmter Weise, die unten erklärt wird, so auf der festen fortwält, daß die Flächen stets eine Gerade gemein haben und sich längs dieser Geraden berühren.

Das Abschroten im Raum tritt also an Stelle des Rollens in der Ebene. Diese beiden Bewegungsarten zeigen aber wesentliche Unterschiede.

Während man nämlich eine ebene Kurve auf jeder beliebigen anderen ebenen Kurve auf viele Arten abrollen kann, läßt sich eine Regelfläche nicht auf jeder anderen abschroten. Wir haben erörtert (S. 184), daß zwei Regelflächen sich dann und nur dann längs einer Erzeugenden berühren können, wenn sie in ihr gleichen Drall besitzen. Ist das der Fall, so muß man sie so aufeinanderlegen, daß ihre zu dieser Geraden gehörigen Kehlpunkte aufeinanderfallen. Beim Abschroten müssen die beiden Polflächen nun beständig diese Bedingung erfüllen und diese Lage haben. Wenn auf beiden Flächen die Kehllinien in entsprechenden Punkten gleiche Winkel mit den Erzeugenden bilden, dann ist das Schroten eine reine Rollbewegung ohne Gleiten. Sind dagegen diese Winkel voneinander verschieden, so gleiten die beiden Flächen beim Abschroten gegeneinander längs der gemeinsamen Erzeugenden¹. Im ersten, spezielleren Falle kann man sagen, daß die Bewegung sich aus

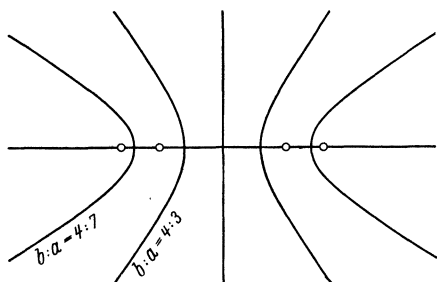


Abb. 268.

infinitesimalen Drehungen zusammensetzt. Die beiden Polflächen sind dann zwei aufeinander abwickelbare Flächen.

Als besonders einfaches Beispiel wollen wir den Fall betrachten, daß die beiden Polflächen zwei einschalige Rotationshyperboloide sind. Die Kehllinien sind dann die kleinsten Breitenkreise dieser Flächen. Wegen der Rotationssymmetrie der Flächen ist der Drall eine Konstante, die nur von der Gestalt und Größe der erzeugenden Hyperbel abhängt.

Die Hyperboloide von gleichem Drall lassen sich analytisch leicht kennzeichnen. In einem rechtwinkligen x , y -Koordinatensystem mögen die erzeugenden Hyperbeln die Gleichungen haben:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Die y -Achse ist also die Rotationsachse. Daß nun die beiden entstehenden Hyperboloide gleichen Drall haben, ist äquivalent mit der einfachen

¹ Die Bedingung, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß zwei Regelflächen Polflächen einer Bewegung sein können, läßt sich ohne analytische Hilfsmittel nicht verständlich machen. Zunächst müssen die Kehllinien beider Flächen sich so aufeinander beziehen lassen, daß die Flächen in entsprechenden Punkten gleichen Drall haben. Sind dann α , α' die Winkel der Kehllinie mit den Erzeugenden in entsprechenden Punkten, und sind s , s' die entsprechenden Bogenlängen auf den beiden Kehllinien, so muß noch die Gleichung bestehen:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}.$$

Gleichung $b = B$. In Abb. 268 sind zwei solche Hyperbeln und ihre Brennpunkte gezeichnet.

Beim Abschroten ändert sich die *gegenseitige* Stellung der beiden Hyperboloide nicht. Hält man also das eine fest, so beschreibt die Rotationsachse des zweiten eine Drehung D um die Rotationsachse des ersten. Der Bewegungsvorgang wird erheblich vereinfacht, wenn wir der ersten Fläche die zu D inverse Drehung um die Rotationsachse erteilen. Dann bleibt die Achse des zweiten Hyperboloids (und ebenso natürlich die des ersten) im Raum fest. Wir erhalten also die Abschrotung dieser beiden Flächen, indem wir sie so aneinanderlegen, daß sie einander längs einer Geraden berühren, und sie dann beide um ihre Rotationsachsen in geeignetem Geschwindigkeitsverhältnis drehen.

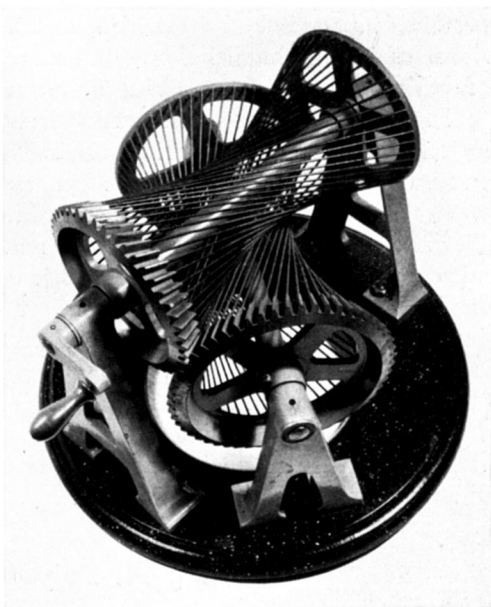


Abb. 269.

Hieraus ergibt sich eine technisch verwendbare Methode der Zahnradübertragung zwischen windschiefen Achsen. Da beim gegenseitigen Gleiten das Material leidet, muß man sich auf den Fall kongruenter Hyperboloide beschränken. Eine solche Übertragung ist in Abb. 269 dargestellt.

Sechstes Kapitel.

Topologie.

Schon die projektive Geometrie hat uns auf Erscheinungen geführt, die sich ohne Vergleichung von Längen und Winkeln feststellen lassen und die dennoch präzisen geometrischen Charakter haben. In der Topologie handelt es sich nun um geometrische Tatsachen, zu deren Erfassung nicht einmal der Begriff der Geraden und der Ebene herangezogen wird, sondern allein der stetige Zusammenhang zwischen den Punkten einer Figur. Wir denken uns eine Figur aus beliebig deformier-