durch nichtlineare Funktionen, z. B. $w = z^2$, vermittelt wird, in ihrem Gesamtverlauf verfolgte. Die Stellen, in denen die Schichten einer RIEMANNschen Fläche analog wie das sphärische Bild eines Affensattels miteinander zusammenhängen, werden nach RIEMANN als Windungspunkte bezeichnet.

Fünftes Kapitel.

Kinematik.

Wir haben bisher hauptsächlich die im Raum *festen* Gebilde untersucht, da die Geometrie von diesen Gebilden ausgehen muß. Aber bereits in den Elementen der Geometrie spielt der Begriff der *Bewegung* eine Rolle. So haben wir zwei Figuren kongruent genannt, wenn sie durch eine Bewegung miteinander zur Deckung gebracht werden können. Ferner haben wir bewegliche Hyperboloide betrachtet (S. 15), haben Regelflächen durch eine wandernde Ebene bestimmt (S. 181) und haben Flächen verbogen und verzerrt (viertes Kapitel). In der Kinematik werden nun Bewegungen systematisch untersucht.

Wir wollen zunächst einen Teil der Kinematik behandeln, der eng mit der elementaren Metrik zusammenhängt: die Lehre von den Gelenkmechanismen. An zweiter Stelle wollen wir die stetigen Bewegungsvorgänge allgemeiner untersuchen; dabei werden wir nach differentialgeometrischen Methoden verfahren.

§ 40. Gelenkmechanismen.

Einen ebenen Gelenkmechanismus nennt man jedes ebene System von starren Stäben, die teilweise miteinander oder mit festen Punkten der Ebene drehbar verbunden sind, so daß das System in seiner Ebene noch bewegt werden kann. Der einfachste solche Mechanismus ist ein einziger starrer Stab, der in einem Endpunkt drehbar in der Ebene befestigt ist, also ein Zirkel. So wie der freie Endpunkt des Zirkels einen Kreis beschreibt, bewegen sich auch bei allen anderen ebenen Gelenkmechanismen alle Punkte der Stäbe auf algebraischen Kurven; d. h. auf Kurven, deren Koordinaten in einem cartesischen System einer algebraischen Gleichung genügen. Umgekehrt kann man zu jeder noch so komplizierten algebraischen Kurve eine geeignete Verbindung von Gelenken finden, mit deren Hilfe diese Kurve (wenigstens stückweise) konstruiert werden kann.

Für die einfachste algebraische Kurve, die gerade Linie, eine derartige Konstruktion anzugeben, ist das berühmte Problem der Geradführung. Ein Modell der Geradführung, den Inversor von PEAUCELLIER, werde hier näher betrachtet. Wir gehen aus von dem in Abb. 253

gezeichneten Mechanismus, der aus sechs Stäben besteht. Von ihnen sind a und b gleich lang, ebenso c, d, e, f. a und b sind in dem festen Punkt O drehbar befestigt. In jeder Stellung dieses Mechanismus müssen P und Q mit O in einer Geraden liegen, nämlich auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle AOB$. Mit Hilfe des Kreises um A mit dem Radius c erkennt man ferner auf Grund des Sehnensatzes, daß in jeder Stellung des Mechanismus die Relation gilt:

$$OP \cdot OQ = (OA + c)(OA - c) = a^2 - c^2.$$

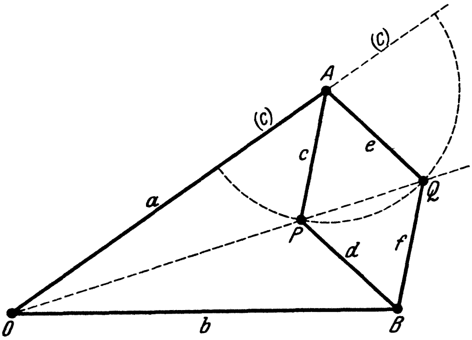

Abb. 253.

Demnach liegen P und Q invers zum Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $\sqrt{a^2 - c^2}$ (vgl. S. 223, 224). Offenbar kann man P an jede Stelle des konzentrischen Kreisrings um O mit den Radien $\sqrt{a^2 - c^2}$ und $a - c$ bringen. Unser Apparat konstruiert also zu jedem Punkt dieses Gebiets den inversen bezüglich des genannten Kreises; der Mechanismus wird deshalb ein Inversor genannt. Beschreibt nun P einen Kreis, der durch O geht, so muß Q eine Gerade durchlaufen (S. 223, 224). Wir bringen deshalb in P noch einen Stab g an (Abb. 254), dessen zweiten Endpunkt wir in einem Punkt M befestigen, der von O den Abstand g hat. Dann ist P gezwungen, auf dem Kreis um M mit dem Radius g zu bleiben. Wegen der Gleichung $OM = g$ geht dieser Kreis durch O. Daher beschreibt Q eine Gerade q, und unser Problem ist gelöst. Wie man leicht einsieht, steht q senkrecht auf OM; die PEAUCELLIERsche Geradführung ist daher zugleich ein Mittel, um auf eine gegebene Gerade ein Lot zu fällen.

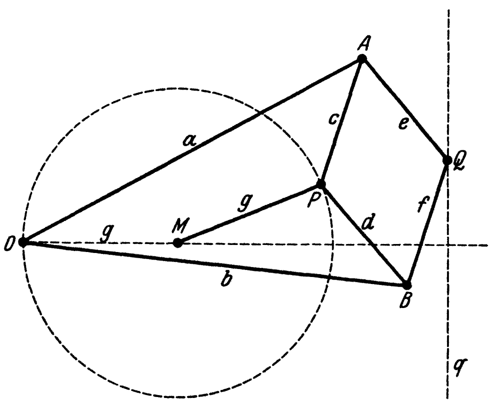

Abb. 254.

Im Raum sind die Gelenkmechanismen in analoger Weise erklärt. Die Gelenke, in denen die Stäbe aneinander oder an festen Raumpunkten befestigt sind, müssen aber in diesem Fall nicht nur ebene Drehungen gestatten, sondern Drehungen in allen räumlichen Richtungen. Für einen gewissen Spielraum läßt sich das durch Kugelgelenke praktisch erreichen. Die Stabenden eines räumlichen Gelenkmechanismus beschreiben stets algebraische Flächen. Dagegen ist bisher nicht bewiesen worden, daß jede algebraische Fläche durch einen Gelenkmechanismus konstruierbar ist. Dieser Satz ist höchst wahrscheinlich richtig.

Wir wollen wieder die einfachste dieser Konstruktionen, nämlich die ebene Führung eines Punkts, betrachten. Zu diesem Zweck gehen wir von dem beweglichen Stangenmodell des einschaligen Hyperboloids aus (S. 15 und 26). Seien g und g' zwei Geraden der einen Regelschar, h eine laufende Gerade der anderen Regelschar, die g und g' in den laufenden Punkten H und H' schneidet. Das Stangenmodell möge nun bewegt werden, aber unter Festhaltung der Stange g (vgl. Abb. 255). Dann behält jeder Punkt H' von g' festen Abstand von dem auf g zugeordneten Punkt H. Die Punkte von g' beschreiben also bei der Bewegung des Modells Kugeln um die zugeordneten Punkte von g. Wählen wir nun die Stellung der Geraden h so, daß sie g im unendlich fernen Punkt U von g schneidet, und ist U' der Schnittpunkt von h mit g', also der U zugeordnete Punkt, so muß U' im Endlichen liegen; denn sonst wäre $UU' = h$ eine unendlich ferne Gerade der Fläche, diese wäre also kein Hyperboloid, sondern ein hyperbolisches Paraboloid (vgl. S. 106). Bei der Bewegung des Modells beschreibt demnach U' eine Kugel mit unendlich großem Radius, d. h. eine Ebene.

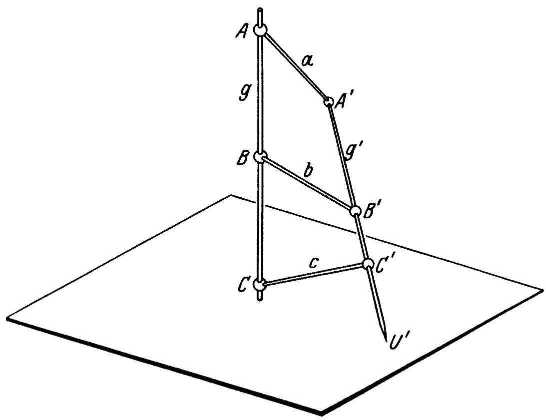

Abb. 255.

Aus dieser Überlegung ergibt sich eine einfache Ebenführung. Durch drei Stangen der einen Schar ist das Hyperboloid völlig bestimmt. Wir befestigen daher an einer festen Stange g (Abb. 255) in drei Kugelgelenken A, B, C drei weitere Stangen a, b, c. Deren Enden befestigen wir durch Kugelgelenke an drei Punkte A', B', C' einer Stange g'. Damit a, b, c ein Hyperboloid und kein hyperbolisches Paraboloid erzeugen, genügt es, die Punkte so zu wählen, daß $AB : AC \neq A'B' : A'C'$. Man kann nämlich zeigen, daß auf einem hyperbolischen Paraboloid die Abstände dreier Punkte auf g sich stets verhalten wie die Abstände der auf g' zugeordneten Punkte. In unserem Mechanismus hat jeder Punkt von

g' zwei Freiheitsgrade, denn das bewegliche, durch a, b, c bestimmte Hyperboloid kann ∞^1 Formen annehmen, und jede dieser Flächen gestattet noch eine beliebige Drehung um g als Achse[1]. Nach dem vorher Gesagten laufen die Punkte von g' auf Kugeln mit g als Durchmesser, und ein Punkt U' von g' beschreibt einen Teil einer auf g' senkrechten Ebene. Man erkennt, daß U' alle Punkte eines ebenen Kreisrings um g als Achse durchläuft. Damit ist unsere Aufgabe gelöst. Eine andere mögliche Lösung ist in Abb. 256 gezeichnet. Man erhält diesen Mechanismus aus dem vorigen, wenn man die Rollen der beiden Regelscharen des beweglichen Hyperboloids vertauscht.

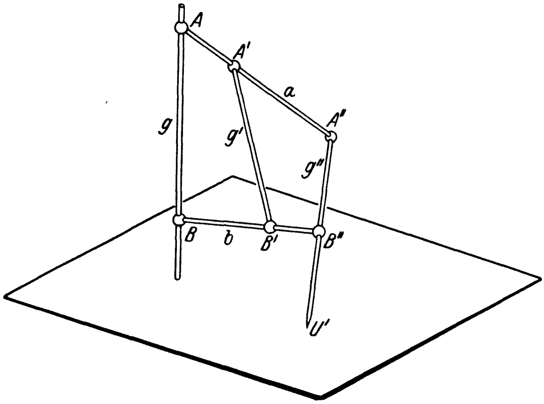

Abb. 256.

§ 41. Bewegung ebener Figuren.

Über eine feste Ebene möge eine zweite bewegliche Ebene in beliebiger Weise hingleiten. Wir wollen diesen Vorgang möglichst einfach geometrisch kennzeichnen.

Wie wir früher ausführlich erörtert haben, ist jede Bewegung einer Ebene in sich hinsichtlich ihrer Anfangs- und Endlage mit einer einzigen Drehung oder einer einzigen Parallelverschiebung identisch (S. 54). Wenn wir die Parallelverschiebungen als Drehungen um einen unendlich fernen Punkt auffassen, können wir sagen, daß ausnahmslos jede ebene Bewegung durch eine Drehung um einen bestimmten Mittelpunkt ersetzt werden kann.

Es sei nun ein bestimmter Bewegungsvorgang gegeben. Dann hat die bewegliche Ebene zu einer Zeit t eine bestimmte Lage A. Mit dieser Lage vergleichen wir die Lage A_h, die die bewegliche Ebene in einem kurz darauffolgenden Zeitpunkt $t + h$ einnimmt. Zu der Lagenänderung

[1] Man kann die Freiheitsgrade auch folgendermaßen abzählen: Wäre die Stange g' nicht vorhanden, so hätte das Tripel der Punkte $A'B'C'$ sechs Freiheitsgrade, da jeder einzelne auf einer Kugel beweglich ist und somit zwei Freiheitsgrade hat. Daß nun C' mit $A'B'$ auf einer Geraden liegen soll, bedeutet zwei Bedingungen, und daß $A'B'$ und $A'C'$ feste Länge haben, liefert je eine weitere Bedingung. Also ergeben sich $6 - 2 - 1 - 1 = 2$ Freiheitsgrade nach den in § 24 erläuterten Methoden.