g' zwei Freiheitsgrade, denn das bewegliche, durch a, b, c bestimmte Hyperboloid kann ∞^1 Formen annehmen, und jede dieser Flächen gestattet noch eine beliebige Drehung um g als Achse[1]. Nach dem vorher Gesagten laufen die Punkte von g' auf Kugeln mit g als Durchmesser, und ein Punkt U' von g' beschreibt einen Teil einer auf g' senkrechten Ebene. Man erkennt, daß U' alle Punkte eines ebenen Kreisrings um g als Achse durchläuft. Damit ist unsere Aufgabe gelöst. Eine andere mögliche Lösung ist in Abb. 256 gezeichnet. Man erhält diesen Mechanismus aus dem vorigen, wenn man die Rollen der beiden Regelscharen des beweglichen Hyperboloids vertauscht.

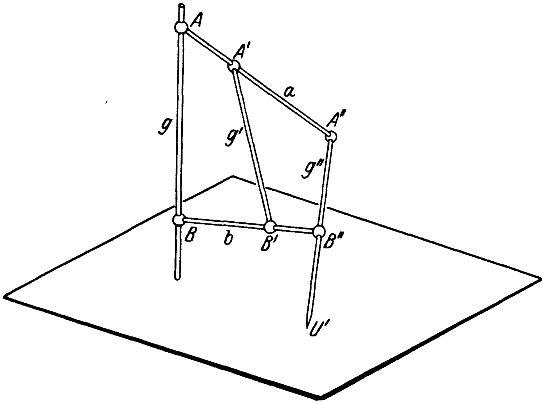

Abb. 256.

§ 41. Bewegung ebener Figuren.

Über eine feste Ebene möge eine zweite bewegliche Ebene in beliebiger Weise hingleiten. Wir wollen diesen Vorgang möglichst einfach geometrisch kennzeichnen.

Wie wir früher ausführlich erörtert haben, ist jede Bewegung einer Ebene in sich hinsichtlich ihrer Anfangs- und Endlage mit einer einzigen Drehung oder einer einzigen Parallelverschiebung identisch (S. 54). Wenn wir die Parallelverschiebungen als Drehungen um einen unendlich fernen Punkt auffassen, können wir sagen, daß ausnahmslos jede ebene Bewegung durch eine Drehung um einen bestimmten Mittelpunkt ersetzt werden kann.

Es sei nun ein bestimmter Bewegungsvorgang gegeben. Dann hat die bewegliche Ebene zu einer Zeit t eine bestimmte Lage A. Mit dieser Lage vergleichen wir die Lage A_h, die die bewegliche Ebene in einem kurz darauffolgenden Zeitpunkt $t + h$ einnimmt. Zu der Lagenänderung

[1] Man kann die Freiheitsgrade auch folgendermaßen abzählen: Wäre die Stange g' nicht vorhanden, so hätte das Tripel der Punkte $A'B'C'$ sechs Freiheitsgrade, da jeder einzelne auf einer Kugel beweglich ist und somit zwei Freiheitsgrade hat. Daß nun C' mit $A'B'$ auf einer Geraden liegen soll, bedeutet zwei Bedingungen, und daß $A'B'$ und $A'C'$ feste Länge haben, liefert je eine weitere Bedingung. Also ergeben sich $6 - 2 - 1 - 1 = 2$ Freiheitsgrade nach den in § 24 erläuterten Methoden.

$A \to A_h$ gehört ein bestimmter Drehmittelpunkt M_h. Wenn h immer kleiner gewählt wird, wenn sich also A_h immer weniger von A unterscheidet, rückt M_h gegen eine Grenzlage M. Der Punkt M heißt das Momentanzentrum der Bewegung im Zeitpunkt t. Die Bewegungsrichtung jedes andern Punktes P der bewegten Ebene steht in diesem Augenblick auf PM senkrecht.

Wenn wir das Momentanzentrum für alle Zeitpunkte der Bewegung bestimmen, so ergibt sich in der festen Ebene als geometrischer Ort der Momentanzentren eine Kurve, die die Polhodie der Bewegung genannt wird. Nun können wir aber bei derselben Bewegung auch die vorher bewegliche Ebene als fest und die vorher feste Ebene als beweglich ansehen; so wird der Vorgang einem Beobachter erscheinen, der mit der zuerst beweglich gedachten Ebene mitgeführt wird. Also ergibt sich auch in dieser Ebene eine bestimmte Kurve als Ort der Momentanzentra; sie wird als Herpolhodie bezeichnet. Beide Kurven sind überall stetig; sie können auch durchs Unendliche laufen, müssen aber dort im Sinne der projektiven Geometrie geschlossen sein, d. h. sie müssen bei Zentralprojektion auf eine andere Ebene in Kurven übergehen, die an den entsprechenden Stellen des Horizonts stetig sind.

Die genauere Untersuchung ergibt nun, daß durch die Gestalt der Polhodie und der Herpolhodie die Bewegung völlig bestimmt ist, wenn noch zwei Punkte beider Kurven gegeben werden, die in irgendeinem Moment der Bewegung aufeinanderfallen. Wir erhalten nämlich den Bewegungsvorgang wieder, wenn wir beide Kurven so aneinanderlegen, daß sie sich in den angegebenen Punkten berühren, und wenn wir hierauf die Herpolhodie unter Mitführung ihrer Ebene auf der Polhodie abrollen lassen, ohne daß sie gleitet. Dabei berühren die Kurven einander stets im jeweiligen Momentanzentrum der Bewegung. Da die Kurven aufeinander abrollen, ohne zu gleiten, so folgt, daß zwei Punkte der Polhodie und die zwei zugehörigen Punkte der Herpolhodie stets gleich lange Bögen auf beiden Kurven begrenzen.

Wir haben damit für die stetigen Bewegungsvorgänge eine ähnlich einfache Kennzeichnung gewonnen wie früher für die einzelnen Bewegungen; jeder stetige Bewegungsvorgang entsteht durch Abrollung einer Kurve auf einer andern. Dabei muß zugelassen werden, daß beide Kurven in Punkte ausarten (Drehung).

Als Beispiel betrachten wir in der festen Ebene eine beliebige Kurve k und in der beweglichen Ebene eine Gerade g und verlangen, daß bei der Bewegung ein Punkt P von g die Kurve k durchläuft und daß g dabei stets auf k senkrecht steht (Abb. 257). Aus der Definition des Krümmungsmittelpunkts folgt unmittelbar, daß das Momentanzentrum M hier stets der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt von k sein muß. Die Polhodie ist also die Evolute m von k, und die Herpolhodie in der beweglichen Ebene ist die Gerade g selbst, da M stets auf g liegt. Die Bewegung entsteht also durch Abrollen von g auf m.

Dabei beschreibt der auf g feste Punkt P die Kurve k, deren Evolute m ist. Der Abstand zweier Punkte von g ist stets gleich dem Bogen zwischen den zugehörigen Punkten von m. Hieraus folgt die früher (S. 158) angegebene Fadenkonstruktion jeder Kurve aus ihrer Evolute.

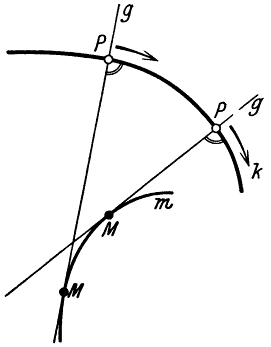

Abb. 257.

Besonders wichtig sind die Kurven, die die Punkte der beweglichen Ebene beschreiben, wenn Polhodie und Herpolhodie Kreise sind. Man erhält verschiedene Typen dieser Kurven, je nachdem der bewegliche Kreis den festen von innen oder von außen berührt. Im ersten Fall werden die Kurven Hypotrochoiden, im zweiten Epitrochoiden genannt. Liegt der die Kurve erzeugende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises, so heißt die Kurve eine Hypo- oder Epizykloide. Die Gestalt der Trochoiden und Zykloiden hängt ferner davon ab, wie sich der Radius des festen Kreises zum Radius des rollenden verhält.

Nehmen wir zunächst an, der rollende Kreis k sei halb so groß wie der feste Kreis K und berühre ihn von innen. Wir wollen in diesem Fall die Bahnkurve eines Punkts P von k, also eine Hypozykloide, bestimmen[1]. Wir beginnen mit dem Zeitpunkt, in dem k gerade in P den festen Kreis K berührt (Abb. 258). Wir betrachten ferner eine andere Lage k_1 des rollenden Kreises. Dabei sei P nach P_1 gelangt. M und m_1 seien die Mittelpunkte der Kreise K und k_1, und Q sei ihr Berührungspunkt. Da die Kreise aufeinander rollen, ohne zu gleiten, so ist der Bogen QP_1 von k_1 ebenso lang wie der Bogen QP von K. Da ferner k halb so groß ist wie K, so folgt: $\sphericalangle Qm_1P_1 = 2\sphericalangle QMP$. Aus demselben Grund muß aber M auf der Peripherie von k_1 liegen, nach dem bekannten Satz über Peripherie- und Zentriwinkel ist daher $\sphericalangle QMP_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle Qm_1P_1 = \sphericalangle QMP$. Demnach fällt die Gerade MP_1 mit MP zusammen, d. h. P_1 läuft bei der Bewegung auf der Geraden MP. Wir haben damit die überraschende Tatsache bewiesen, daß in unserem Fall die Hypozykloiden Durchmesser des festen Kreises sind. Gleichzeitig ergibt sich eine neue Methode der Geradführung.

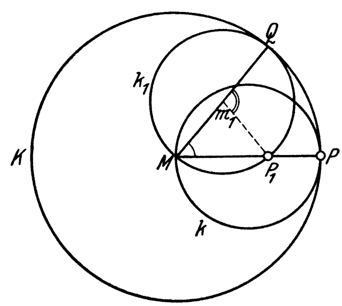

Abb. 258.

[1] Es ist gleichgültig, welchen Peripheriepunkt wir herausgreifen. Denn wegen der Symmetrie der Figur unterscheiden sich die Zykloiden verschiedener Peripheriepunkte von k nur durch eine Drehung um den Mittelpunkt von K.

Um auch die zugehörigen Hypotrochoiden zu bestimmen, beschreiben wir die Bewegung mit Hilfe des eben gewonnenen Ergebnisses in anderer Weise. Sind nämlich S und T irgend zwei diametrale Peripheriepunkte von k, so entspricht dem Kreisbogen ST von k bei der Abrollung ein Viertelkreis von K. S und T bewegen sich daher auf zwei senkrechten Durchmessern s und t von K (Abb. 259). Man kann nun leicht berechnen: Wenn man eine Strecke ST so bewegt, daß ihre Endpunkte auf zwei sich senkrecht schneidenden Geraden s und t laufen, dann beschreibt der Mittelpunkt der Strecke einen Kreis, und jeder andere Punkt P der Strecke beschreibt eine Ellipse, deren Achsen auf die Geraden s und t fallen; die Achsenlängen sind gleich den beiden Abschnitten, die P auf der Strecke ST bestimmt. Daraus folgt, daß die Hypotrochoiden unserer Rollbewegung sämtlich Ellipsen sind. Denn jeder mit k fest verbundene Punkt liegt auf einem Durchmesser von k, also auf einer Geraden, von der zwei Punkte längs senkrechter Geraden gleiten.

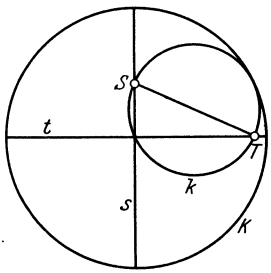

Abb. 259.

Wir betrachten nun den Fall, daß k von außen auf K abrollt. Die Epizykloiden haben dann die Form der Kurve e in Abb. 260. Man kann zeigen, daß wie bei dieser Kurve so auch bei allen anderen Epi- und Hypozykloiden stets Spitzen vorkommen. In ihnen trifft die Zykloide den festen Kreis stets senkrecht. Die Spitzen entsprechen derjenigen Lage der Kreise, in der der erzeugende Punkt der Zykloide gerade Berührungspunkt der Kreise ist. Da in unserem Fall k halb so groß ist wie K, so müssen genau zwei Spitzen auftreten.

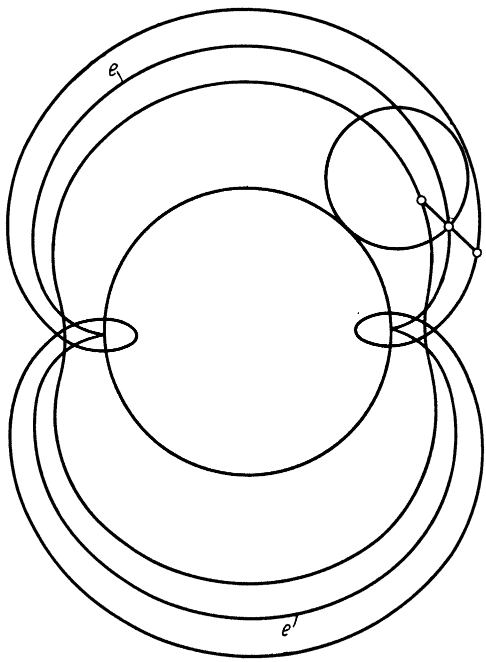

Abb. 260.

Unsere Kurve hat eine merkwürdige Tangenteneigenschaft. Sie wird durch Abb. 261 erläutert. Die Rollbewegung beginne, wenn der erzeugende Punkt P von k Berührungspunkt mit K ist, also die eine Spitze der Zykloide durchläuft. Es ist eine andere Lage k_1 von k gezeichnet. P ist längs eines Zykloidenbogens nach P_1 gewandert. Wir verbinden die Mittelpunkte M und m_1 von K und k_1. Die Gerade Mm_1 geht durch den Berührungspunkt Q von K und k_1 und trifft k_1 zum zweitenmal in R. t sei die Tangente der Zykloide in P_1. Da Q das Momentanzentrum der Bewegung in der betrachteten Lage von k ist, steht die Bewegungsrichtung von P_1, also auch die Gerade t, senkrecht auf QP_1. Daher fällt t mit P_1R zusammen, denn $\sphericalangle QP_1R$ ist als Peripheriewinkel über dem Halbkreis ein Rechter. Eine ähnliche Tangenteneigenschaft haben alle Epi- und Hypozykloiden. Aus der Gleichheit des Bogens PQ von K und des Bogens P_1Q von k_1 folgt aber in unserem Fall, wo k halb so groß ist wie K:

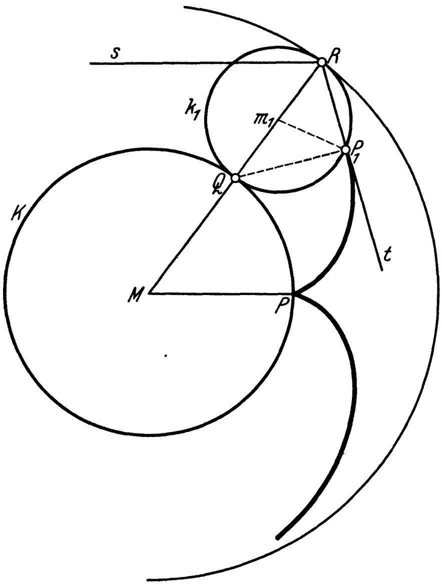

Abb. 261.

$$\sphericalangle PMQ = \tfrac{1}{2} \sphericalangle P_1 m_1 Q = \sphericalangle P_1 R Q.$$

Ziehen wir durch R die Parallele s zu MP, so bilden demnach s und t gleiche Winkel mit MR. Das läßt sich nun als ein Satz der geometrischen Optik formulieren: Spiegelt man ein Büschel paralleler Lichtstrahlen (s) an einem Kreis um M mit dem Radius MR, so umhüllen die reflektierten Strahlen (t) eine zweispitzige Epizykloide, deren Basiskreis den Mittelpunkt M und den Radius $\frac{1}{2}MR$ hat. Die Spitzen der Zykloide liegen von M aus in der Richtung (s). Die Kurve wird wegen dieser optischen Eigenschaft auch als Brennlinie des Kreises bezeichnet. Man kann sie täglich in Tassen und Kannen beobachten.

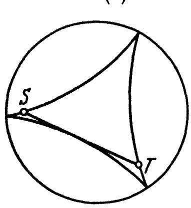

Abb. 262.

Zwei zugehörige Epitrochoiden sind in Abb. 260 gezeichnet. Alle Epitrochoiden sind singularitätenfrei, wenn der erzeugende Punkt im Innern des rollenden Kreises liegt, dagegen haben sie Schleifen und Doppelpunkte, wenn der erzeugende Punkt außerhalb gewählt ist. Die Zykloiden bilden den Übergang zwischen den beiden Arten von Trochoiden.

Der nächst einfache Fall ergibt sich, wenn der rollende Kreis ein drittelmal so groß ist wie der feste. Die dreispitzige Hypozykloide ist in Abb. 262 gezeichnet. Auch sie hat eine besondere Tangenteneigenschaft, die sich analytisch herleiten läßt. Das Tangentenstück ST im Innern der Kurve hat nämlich eine feste, vom Berührungspunkt unabhängige Länge. Diese Tatsache brachte man früher in Verbindung mit einem auf S. 189, 190 genannten geometrischen Minimumproblem: Eine Strecke soll in der Ebene so bewegt werden, daß sie sich schließlich um ihren Mittelpunkt um 180° gedreht hat, und daß das bei der Bewegung überstrichene Ebenenstück möglichst kleinen Flächeninhalt erhält. Wie schon erwähnt, kann man diesen Flächeninhalt durch geeignete Bewegung der Strecke beliebig klein machen, so daß also das Problem keine Lösung besitzt. Früher glaubte man aber, es gäbe eine Lösung, und man erhalte sie, wenn man die Strecke ST (Abb. 262) so auf einer dreispitzigen Zykloide tangential entlang gleiten läßt, daß die Endpunkte auf der Kurve bleiben. In der Tat lag die Vermutung nahe, daß dieses Flächenstück nicht mehr verkleinert werden könne.

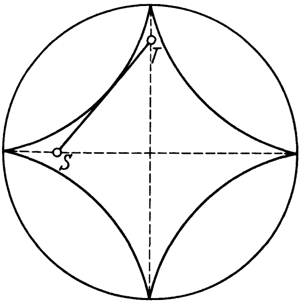

Abb. 263.

Auch die vierspitzige Hypozykloide (Abb. 263), die man gewöhnlich als Astroide bezeichnet, hat eine ähnliche Tangenteneigenschaft. Bezeichnet man nämlich mit S und T die Schnittpunkte einer Tangente mit den Symmetrieachsen der Kurve, so hat die Strecke ST feste Länge. Läßt man daher eine Strecke in ihren Endpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden Geraden gleiten, so umhüllt diese Strecke eine Astroide. Wir hatten früher erwähnt, daß jeder Punkt einer so bewegten Strecke eine Ellipse beschreibt. Daraus läßt sich schließen, daß die Astroide von einer Ellipsenschar eingehüllt wird, bei der die Summe der Achsen konstant ist (Abb. 264).

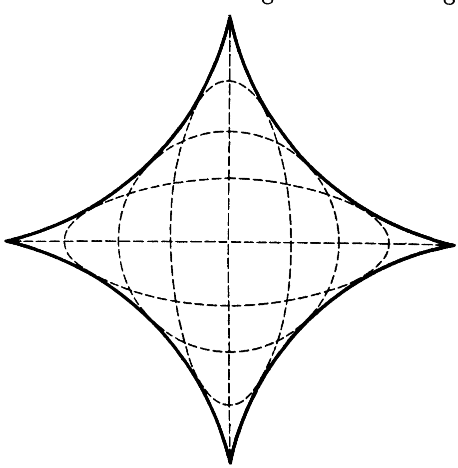
Abb. 264.

Im allgemeinen ist der Verlauf der Zykloiden wesentlich verschieden, je nachdem die Radien r, R des rollenden und des festen Kreises kommensurabel sind oder nicht. Ist r/R eine rationale Zahl, die als gekürzter Bruch a/b geschrieben sei, so besitzt die Zykloide b Spitzen und schließt sich, nachdem der bewegliche Kreis a-mal um den festen herumgerollt ist. Ist dagegen r/R irrational, so hat die Kurve unendlich viele Spitzen und schließt sich nicht. Man kann zeigen, daß die Kurve in diesem Falle an jedem Punkt des Gebietes, das von dem rollenden Kreis überstrichen wird, beliebig nahe vorbeikommt, wenn man den Verlauf der Kurve nur hinreichend weit verfolgt. Die Grenzfälle $r = \infty$ oder $R = \infty$ haben besonders einfache Bedeutung. Ist $r = \infty$, wird also der rollende Kreis durch eine Gerade ersetzt, so erhalten wir die Kreisevolvente (Abb. 8, S. 6). Ersetzt man den festen Kreis durch eine Gerade, so entsteht die „gewöhnliche Zykloide". Auf einer solchen Kurve (Abb. 265) bewegt sich jeder Punkt der Peripherie eines Rades, das in der Ebene geradeaus rollt.

Wir haben bisher nur Bewegungsvorgänge betrachtet, bei denen eine einzige bewegliche Ebene vorkommt. Die Physik führt aber auf das Studium allgemeinerer Erscheinungen, der Relativbewegungen.

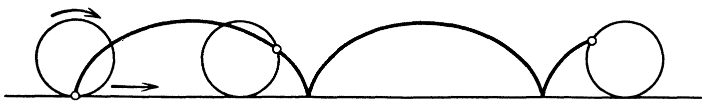

Abb. 265.

Denken wir uns außer der festen Ebene E und der beweglichen Ebene e noch eine Ebene f, die in anderer Weise als e über E hingleitet. Dann wird f auch eine ganz bestimmte Bewegung gegenüber e ausführen, so wie sie ein mit e fest verbundener Beobachter registrieren würde. Man kann den Bewegungsvorgang (fE) von f bezüglich E in die Bewegungen (fe) und (eE) zerlegt denken. Oft läßt sich ein komplizierter Vorgang durch eine solche Zerlegung vereinfachen. So können wir besonders einfach die Rollbewegung zweier Kreise K und k zerlegen. E sei die feste Ebene von K, f die bewegliche von k. M, m seien die Mittelpunkte von K, k. Um die Bewegung des Punktes m gegen E zu beschreiben, brauchen wir nur eine Ebene e einzuführen, in der m fest ist und die sich um M dreht. Die Bewegung von f gegen e kann dann nur eine Drehung um m sein. Die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um M und m müssen sich umgekehrt verhalten wie die Radien der Kreise K und k. Somit ergibt sich die Zykloidenbewegung als Resultat zweier Drehungen. Hierauf beruht die Bedeutung der Zykloiden und Trochoiden in der Astronomie. Da nämlich die Bahnen aller Planeten um die Sonne annähernd kreisförmig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit sind und annähernd in derselben Ebene, der Ekliptik, verlaufen, so erscheint von der Erde aus die Bahn jedes Planeten ungefähr als Trochoide. So gab das vorkopernikanische geozentrische System der Astronomie Veranlassung zum eingehenden Studium dieser Kurven.

In unserem Beispiel sind M und m die Momentanzentra der Bewegungen (eE) und (fe). Das Momentanzentrum Q der Zykloidenbewegung (fE) ist, wie erwähnt, der Berührungspunkt der Kreise k und K. Die drei Momentanzentren liegen also auf einer Geraden. Man kann nun zeigen, daß ein analoger Satz allgemein gilt: Betrachtet man eine Bewegung (fE), die sich aus den Bewegungen (fe) und (eE) zusammensetzt, so liegen in jedem Zeitpunkt die Momentanzentra von (fE), (fe) und (eE) in einer Geraden.

§ 42. Ein Apparat zur Konstruktion der Ellipse und ihrer Rollkurven[1].

Zwei Stäbe c und c' der gleichen Länge c seien in ihren Endpunkten F_1, F_2 bzw. F_1', F_2' gelenkig mit zwei weiteren Stäben a_1 und a_2 der gleichen Länge $a > c$ verbunden (Abb. 266), so daß ein ebenes überschlagenes Viereck mit gleich langen Gegenseiten entsteht. Der Schnittpunkt E der Stäbe a_1 und a_2 wird auf diesen Stäben seinen Ort verändern, wenn man das Gelenkviereck in der Ebene seine verschiedenen möglichen Gestalten annehmen läßt. Im Punkt E sei ein Gelenk mit zwei gegeneinander drehbaren Hülsen angebracht, in denen die Stäbe a_1 und a_2 gleiten können. Ich halte nun den Stab c fest und betrachte die Kurve, die dann der Punkt E noch beschreiben kann. Ich behaupte, das ist eine Ellipse e mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der konstanten Abstandssumme a. Beweis: Die Dreiecke $F_1F_2F_2'$ und $F_1F_1'F_2'$ sind bei jeder Lage des Gelenkvierecks kongruent, weil sie paarweise gleiche Seiten haben. Darum ist $\sphericalangle F_1F_2'F_2 = \sphericalangle F_2'F_1F_1'$, d. h. das Dreieck $F_1F_2'E$ ist gleichschenklig. Hieraus folgt aber: $F_1E + EF_2 = F_2'E + EF_2 = a$, wie behauptet war.

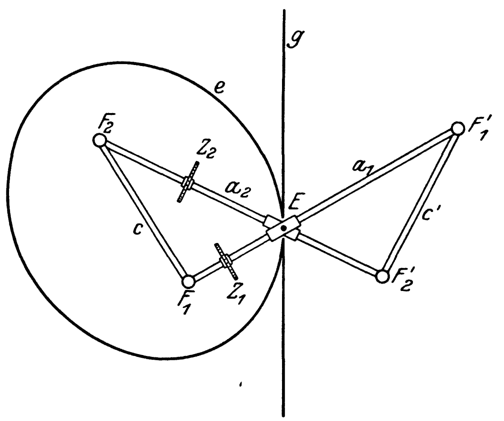

Abb. 266.

Nun seien noch in beliebigen Punkten der Stäbe a_1 und a_2 zwei Zahnräder Z_1 und Z_2 angebracht, die sich um diese Stäbe als Achsen

[1] Dieser Apparat ist von R. C. Yates angegeben worden (The Description of a surface of constant curvature, Amer. Math. Monthly, 1931).