geozentrische System der Astronomie Veranlassung zum eingehenden Studium dieser Kurven.

In unserem Beispiel sind M und m die Momentanzentra der Bewegungen (eE) und (fe). Das Momentanzentrum Q der Zykloidenbewegung (fE) ist, wie erwähnt, der Berührungspunkt der Kreise k und K. Die drei Momentanzentren liegen also auf einer Geraden. Man kann nun zeigen, daß ein analoger Satz allgemein gilt: Betrachtet man eine Bewegung (fE), die sich aus den Bewegungen (fe) und (eE) zusammensetzt, so liegen in jedem Zeitpunkt die Momentanzentra von (fE), (fe) und (eE) in einer Geraden.

§ 42. Ein Apparat zur Konstruktion der Ellipse und ihrer Rollkurven[1].

Zwei Stäbe c und c' der gleichen Länge c seien in ihren Endpunkten F_1, F_2 bzw. F_1', F_2' gelenkig mit zwei weiteren Stäben a_1 und a_2 der gleichen Länge $a > c$ verbunden (Abb. 266), so daß ein ebenes überschlagenes Viereck mit gleich langen Gegenseiten entsteht. Der Schnittpunkt E der Stäbe a_1 und a_2 wird auf diesen Stäben seinen Ort verändern, wenn man das Gelenkviereck in der Ebene seine verschiedenen möglichen Gestalten annehmen läßt. Im Punkt E sei ein Gelenk mit zwei gegeneinander drehbaren Hülsen angebracht, in denen die Stäbe a_1 und a_2 gleiten können. Ich halte nun den Stab c fest und betrachte die Kurve, die dann der Punkt E noch beschreiben kann. Ich behaupte, das ist eine Ellipse e mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der konstanten Abstandssumme a. Beweis: Die Dreiecke $F_1F_2F_2'$ und $F_1F_1'F_2'$ sind bei jeder Lage des Gelenkvierecks kongruent, weil sie paarweise gleiche Seiten haben. Darum ist $\sphericalangle F_1F_2'F_2 = \sphericalangle F_2'F_1F_1'$, d. h. das Dreieck $F_1F_2'E$ ist gleichschenklig. Hieraus folgt aber: $F_1E + EF_2 = F_2'E + EF_2 = a$, wie behauptet war.

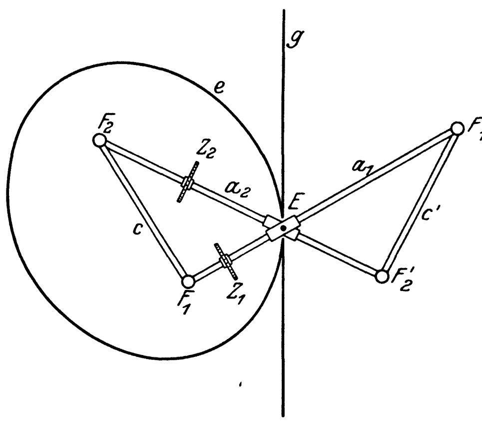

Abb. 266.

Nun seien noch in beliebigen Punkten der Stäbe a_1 und a_2 zwei Zahnräder Z_1 und Z_2 angebracht, die sich um diese Stäbe als Achsen

[1] Dieser Apparat ist von R. C. YATES angegeben worden (The Description of a surface of constant curvature, Amer. Math. Monthly, 1931).

drehen, jedoch nicht an ihnen entlanggleiten können (Abb. 266). Der Punkt E möge über irgendeine Kurve k hingeführt werden, während gleichzeitig die Zahnräder auf der Kurvenebene rollen mögen und die Fixierung der Punkte F_1, F_2 aufgegeben wird. Die Zahnräder bewirken, daß die Bewegungsrichtung des Radmittelpunkts in die Radebene fällt und daher stets auf dem Stab senkrecht steht, der das Rad trägt. Dann muß auch jeder andere Punkt der Stäbe a_1 und a_2 sich stets senkrecht zur jeweiligen Stabrichtung fortbewegen. Das läßt sich streng daraus schließen, daß die Abstände zweier Punkte eines Stabes konstant bleiben. Denken wir uns nun bei der Bewegung eine zur Ebene von k parallele Ebene f fest mit dem Stab c verbunden, so ist der Punkt E stets das Momentanzentrum für die Bewegung dieser Ebene. Denn da sich jeder Punkt von f stets senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem jeweiligen Momentanzentrum fortbewegt (vgl. S. 243), und da andererseits F_1 sich stets senkrecht zu a_1 fortbewegt, so muß das Momentanzentrum stets auf a_1 liegen; ebenso aber auch auf a_2. Es muß also in den Schnittpunkt dieser Stäbe fallen. Die Polhodie der Bewegung von f ist daher die Kurve k. Die Herpolhodie aber muß die Ellipse e sein, da wir gezeigt haben, daß E diese Ellipse beschreibt, wenn wir den Stab c festhalten. Die Punkte der Ebene f werden also durch unseren Apparat auf denselben Kurven geführt wie beim Abrollen der Ellipse e auf k. Man nennt jene Kurven Rollkurven der Ellipse.

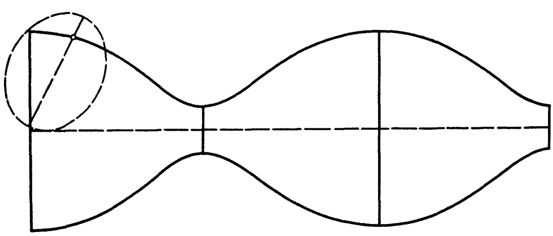

Abb. 267.

Unter den Rollkurven der Ellipse ist besonders die wichtig, die ein Brennpunkt beschreibt, wenn die Ellipse auf einer Geraden rollt. Eine solche Kurve wird in Abb. 267 dargestellt. Der Apparat von Yates führt die Ecken des Gelenkvierecks auf solchen Kurven, wenn wir den Punkt E auf einer Geraden g führen. Jeder andere Punkt des Stabes a_1 beschreibt eine Parallelkurve zur Bahnkurve des Punktes F_1 oder F_1'. Denn der Stab a_1 ist, wie schon erwähnt, gemeinsames Lot der Bahnkurven aller seiner Punkte. Hiernach führt der Apparat auf einen merkwürdigen geometrischen Satz: Man trage auf allen Normalen einer Rollkurve eines Ellipsenbrennpunktes vom Fußpunkt aus nach dem Krümmungsmittelpunkt zu Strecken ab, die gleich der konstanten Abstandssumme der Ellipse sind; dann liegen die Endpunkte jener Strecken wieder auf der Rollkurve eines Brennpunktes einer Ellipse; diese ist zur ersten Ellipse kongruent und rollt auf der gleichen Kurve wie jene, aber auf der andern Seite, ab.

Die in Abb. 267 gezeichnete Rollkurve tritt als Meridian der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung auf. Die Krümmung ist gleich der reziproken halben Abstandssumme der erzeugenden Ellipse. Wir erwähnten auf S. 202, daß es zu jeder Fläche konstanter mittlerer Krümmung eine Parallelfläche konstanter positiver GAUSSscher Krümmung gibt. In unserem Fall muß diese Parallelfläche wieder eine Rotationsfläche sein, und ihr Meridian muß eine Parallelkurve zum Meridian der zuerst betrachteten Fläche sein. Demnach beschreibt ein Punkt des Stabes a_1 in unserem Apparat eine Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter positiver GAUSSscher Krümmung. Aus der auf S. 202 angegebenen Krümmungsrelation läßt sich folgern, daß gerade der Mittelpunkt des Stabes a_1 diese Kurve beschreibt. Man erhält die Meridiane aller Rotationsflächen konstanter positiver GAUSSscher Krümmung mit Ausnahme der Kugel, wenn man den Stablängen c und a alle möglichen Werte zumißt.

§ 43. Bewegungen im Raum.

Wir übertragen die Betrachtungen des vorigen Abschnitts auf den Fall, daß ein Raum oder Raumstück r sich in einem als fest gedachten Raum R bewegt. Im Raum kann jede einzelne Bewegung durch eine Drehung um eine bestimmte Achse und eine Translation längs dieser Achse, d. h. durch eine Schraubung ersetzt werden (S. 73). Mit Ausnahme der Translationen wird dadurch jeder Bewegung eine bestimmte Gerade als Schraubungs- bzw. Drehungsachse zugeordnet. Die Sonderstellung der Translationen kann man aufheben, indem man sie als Drehungen um unendlich ferne Achsen auffaßt.

Indem man eine Lage des beweglichen Raums mit einer Nachbarlage vergleicht, kommt man analog wie in der Ebene zur Konstruktion der „momentanen Schraubungsachse" der Bewegung in einem Zeitpunkt. Im Laufe des Vorgangs ändert diese Gerade stetig ihre Lage und beschreibt in R und r je eine Regelfläche. Sie entsprechen der Polhodie und der Herpolhodie der ebenen Bewegungen und werden als die feste und die bewegliche Polfläche der Bewegung bezeichnet. Ein räumlicher Bewegungsvorgang ist durch Angabe der beiden Polflächen fest bestimmt, wenn noch für eine Gerade der einen Polfläche angegeben wird, welche Gerade der anderen Polfläche ihr entspricht. Man hat die beiden Flächen so aneinanderzulegen, daß jene beiden Geraden zusammenfallen und die Flächen einander längs dieser Geraden berühren. Die Bewegung entsteht dann, wenn man die bewegliche Polfläche auf der festen „abschrotet", d. h. sie in bestimmter Weise, die unten erklärt wird, so auf der festen fortwälzt, daß die Flächen stets eine Gerade gemein haben und sich längs dieser Geraden berühren.

Das Abschroten im Raum tritt also an Stelle des Rollens in der Ebene. Diese beiden Bewegungsarten zeigen aber wesentliche Unterschiede.