Die in Abb. 267 gezeichnete Rollkurve tritt als Meridian der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung auf. Die Krümmung ist gleich der reziproken halben Abstandssumme der erzeugenden Ellipse. Wir erwähnten auf S. 202, daß es zu jeder Fläche konstanter mittlerer Krümmung eine Parallelfläche konstanter positiver GAUSSscher Krümmung gibt. In unserem Fall muß diese Parallelfläche wieder eine Rotationsfläche sein, und ihr Meridian muß eine Parallelkurve zum Meridian der zuerst betrachteten Fläche sein. Demnach beschreibt ein Punkt des Stabes a_1 in unserem Apparat eine Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter positiver GAUSSscher Krümmung. Aus der auf S. 202 angegebenen Krümmungsrelation läßt sich folgern, daß gerade der Mittelpunkt des Stabes a_1 diese Kurve beschreibt. Man erhält die Meridiane aller Rotationsflächen konstanter positiver GAUSSscher Krümmung mit Ausnahme der Kugel, wenn man den Stablängen c und a alle möglichen Werte zumißt.

§ 43. Bewegungen im Raum.

Wir übertragen die Betrachtungen des vorigen Abschnitts auf den Fall, daß ein Raum oder Raumstück r sich in einem als fest gedachten Raum R bewegt. Im Raum kann jede einzelne Bewegung durch eine Drehung um eine bestimmte Achse und eine Translation längs dieser Achse, d. h. durch eine Schraubung ersetzt werden (S. 73). Mit Ausnahme der Translationen wird dadurch jeder Bewegung eine bestimmte Gerade als Schraubungs- bzw. Drehungsachse zugeordnet. Die Sonderstellung der Translationen kann man aufheben, indem man sie als Drehungen um unendlich ferne Achsen auffaßt.

Indem man eine Lage des beweglichen Raums mit einer Nachbarlage vergleicht, kommt man analog wie in der Ebene zur Konstruktion der „momentanen Schraubungsachse" der Bewegung in einem Zeitpunkt. Im Laufe des Vorgangs ändert diese Gerade stetig ihre Lage und beschreibt in R und r je eine Regelfläche. Sie entsprechen der Polhodie und der Herpolhodie der ebenen Bewegungen und werden als die feste und die bewegliche Polfläche der Bewegung bezeichnet. Ein räumlicher Bewegungsvorgang ist durch Angabe der beiden Polflächen fest bestimmt, wenn noch für eine Gerade der einen Polfläche angegeben wird, welche Gerade der anderen Polfläche ihr entspricht. Man hat die beiden Flächen so aneinanderzulegen, daß jene beiden Geraden zusammenfallen und die Flächen einander längs dieser Geraden berühren. Die Bewegung entsteht dann, wenn man die bewegliche Polfläche auf der festen „abschrotet", d. h. sie in bestimmter Weise, die unten erklärt wird, so auf der festen fortwälzt, daß die Flächen stets eine Gerade gemein haben und sich längs dieser Geraden berühren.

Das Abschroten im Raum tritt also an Stelle des Rollens in der Ebene. Diese beiden Bewegungsarten zeigen aber wesentliche Unterschiede.

Während man nämlich eine ebene Kurve auf jeder beliebigen anderen ebenen Kurve auf viele Arten abrollen kann, läßt sich eine Regelfläche nicht auf jeder anderen abschroten. Wir haben erörtert (S. 184), daß zwei Regelflächen sich dann und nur dann längs einer Erzeugenden berühren können, wenn sie in ihr gleichen Drall besitzen. Ist das der Fall, so muß man sie so aufeinanderlegen, daß ihre zu dieser Geraden gehörigen Kehlpunkte aufeinanderfallen. Beim Abschroten müssen die beiden Polflächen nun beständig diese Bedingung erfüllen und diese Lage haben. Wenn auf beiden Flächen die Kehllinien in entsprechenden Punkten gleiche Winkel mit den Erzeugenden bilden, dann ist das Schroten eine reine Rollbewegung ohne Gleiten. Sind dagegen diese Winkel voneinander verschieden, so gleiten die beiden Flächen beim Abschroten gegeneinander längs der gemeinsamen Erzeugenden[1]. Im ersten, spezielleren Falle kann man sagen, daß die Bewegung sich aus infinitesimalen Drehungen zusammensetzt. Die beiden Polflächen sind dann zwei aufeinander abwickelbare Flächen.

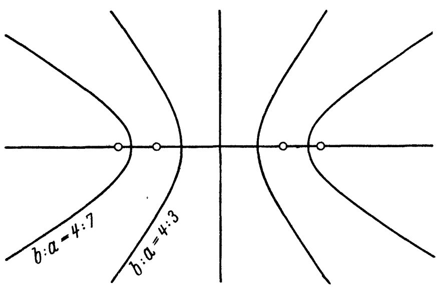

Abb. 268.

Als besonders einfaches Beispiel wollen wir den Fall betrachten, daß die beiden Polflächen zwei einschalige Rotationshyperboloide sind. Die Kehllinien sind dann die kleinsten Breitenkreise dieser Flächen. Wegen der Rotationssymmetrie der Flächen ist der Drall eine Konstante, die nur von der Gestalt und Größe der erzeugenden Hyperbel abhängt.

Die Hyperboloide von gleichem Drall lassen sich analytisch leicht kennzeichnen. In einem rechtwinkligen x, y-Koordinatensystem mögen die erzeugenden Hyperbeln die Gleichungen haben:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1 .$$

Die y-Achse ist also die Rotationsachse. Daß nun die beiden entstehenden Hyperboloide gleichen Drall haben, ist äquivalent mit der einfachen

[1] Die Bedingung, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß zwei Regelflächen Polflächen einer Bewegung sein können, läßt sich ohne analytische Hilfsmittel nicht verständlich machen. Zunächst müssen die Kehllinien beider Flächen sich so aufeinander beziehen lassen, daß die Flächen in entsprechenden Punkten gleichen Drall haben. Sind dann α, α' die Winkel der Kehllinie mit den Erzeugenden in entsprechenden Punkten, und sind s, s' die entsprechenden Bogenlängen auf den beiden Kehllinien, so muß noch die Gleichung bestehen:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} .$$

Gleichung $b = B$. In Abb. 268 sind zwei solche Hyperbeln und ihre Brennpunkte gezeichnet.

Beim Abschroten ändert sich die *gegenseitige* Stellung der beiden Hyperboloide nicht. Hält man also das eine fest, so beschreibt die Rotationsachse des zweiten eine Drehung D um die Rotationsachse des ersten. Der Bewegungsvorgang wird erheblich vereinfacht, wenn wir der ersten Fläche die zu D inverse Drehung um die Rotationsachse erteilen. Dann bleibt die Achse des zweiten Hyperboloids (und ebenso natürlich die des ersten) im Raum fest. Wir erhalten also die Abschrotung dieser beiden Flächen, indem wir sie so aneinanderlegen, daß sie einander längs einer Geraden berühren, und sie dann beide um ihre Rotationsachsen in geeignetem Geschwindigkeitsverhältnis drehen.

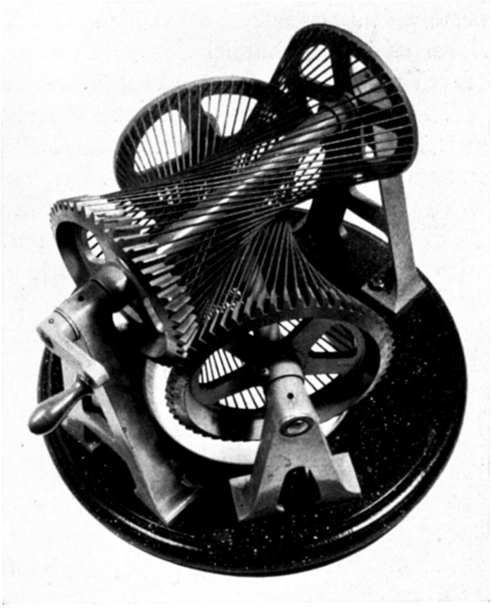

Abb. 269.

Hieraus ergibt sich eine technisch verwendbare Methode der Zahnradübertragung zwischen windschiefen Achsen. Da beim gegenseitigen Gleiten das Material leidet, muß man sich auf den Fall kongruenter Hyperboloide beschränken. Eine solche Übertragung ist in Abb. 269 dargestellt.

Sechstes Kapitel.

Topologie.

Schon die projektive Geometrie hat uns auf Erscheinungen geführt, die sich ohne Vergleichung von Längen und Winkeln feststellen lassen und die dennoch präzisen geometrischen Charakter haben. In der Topologie handelt es sich nun um geometrische Tatsachen, zu deren Erfassung nicht einmal der Begriff der Geraden und der Ebene herangezogen wird, sondern allein der stetige Zusammenhang zwischen den Punkten einer Figur. Wir denken uns eine Figur aus beliebig deformier-